





BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

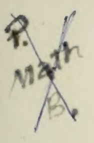
ASTRONOMIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel,* Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

5243 PARIS — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.



BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE,
LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

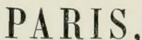
DEUXIÈME SÉRIE.

TOME III. — ANNÉE 1879.

(TOME XIV DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.





PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1879

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SANNIA (A.) e D'OVIDIO (E.), Professori nelle Università di Napoli e Torino. — Elementi di Geometria. 3ª edizione, corretta e modificata. — Napoli, B. Pellerano, 1876. 1 vol. petit in-8°, XVII-559 pages, 392 figures dans le texte. Prix : 6 fr.

MORENO (G.), Professore nel Collegio militare e nell' Istituto tecnico di Napoli. — Elementi di Geometria. 4ª edizione, con 372 figure intercalate nel testo. — Napoli, B. Pellerano, 1877. 1 vol. petit in-8°, 431 pages. Prix : 4 fr. 50.

FAIFOFER (A.), Prof. nel Liceo Marco Foscarini. — Elementi di Geometria. Venezia, tipografia Emiliana, 1878. 1 vol. petit in-8°, 504 pages, environ 340 figures dans le texte.

L'apparition presque simultanée de ces trois Ouvrages est une preuve des soins qu'apportent de nos jours les professeurs italiens au perfectionnement des méthodes d'enseignement de la Géométrie élémentaire. On sait que les règlements de l'instruction publique, en Italie, ont prescrit comme modèle de cet enseignement les

Éléments d'Euclide, en laissant d'ailleurs aux professeurs la liberté de modifier très-largement les détails. Cette sage mesure, en même temps qu'elle a préservé les auteurs italiens des changements ultra-radicaux que l'on rencontre dans certains Traités publiés dans d'autres pays, a forcé les maîtres à se retremper dans l'étude du chef-d'œuvre de la logique antique, le guide le plus sûr vers les principes modernes de la Philosophie mathématique, dont les altérations apportées par les successeurs d'Euclide à son admirable rigueur nous avaient notablement écartés. Il nous semble toutefois que le rôle des méthodes euclidiennes ne doit être considéré ici que comme transitoire, et que, une fois ramenée au vrai point de départ, la Science devra élargir peu à peu le cadre étroit de la Géométrie ancienne, tout en conservant précieusement les habitudes de rigueur qu'elle aura contractées, et qui ne sont nullement incompatibles avec les méthodes modernes.

Le premier des trois Traités dont nous voulons parler est une nouvelle édition du Livre que nous signalions il y a huit ans (¹) à l'attention des professeurs. L'auteur a conservé le plan général de l'ancienne édition; mais il a développé notablement certaines parties, celles surtout qui touchent aux principes fondamentaux. L'*Introduction,* au lieu de six pages, en occupe maintenant seize. Nous ne saurions garantir que tous les nouveaux développements fussent également nécessaires dans un Livre destiné à l'enseignement élémentaire, où il ne faut pas trop multiplier les énoncés. Quand le temps est venu d'initier les élèves à des considérations plus élevées, la forme euclidienne, universellement bannie des autres sciences, et qui a son dernier refuge dans les Traités de Géométrie, nous semble tout à fait impropre au développement des idées modernes.

Nous aurions encore quelques critiques de langage à adresser aux premières lignes de cette Introduction. La définition de l'axiome comme une vérité *évidente* ne nous satisfait pas, l'*évidence* ne pouvant être, dans les sciences abstraites, qu'un souvenir d'expériences plus ou moins répétées, et par suite un moyen d'induction, et non un caractère de certitude. Le mot *hypothèse* présenterait

(¹) *Bulletin*, 1re série, t. I, p. 359, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. X, p. 289.

moins d'équivoque. Un *théorème* est une conséquence des hypothèses admises, et la démonstration a pour but, non de rendre le théorème évident (il est souvent par lui-même plus *évident* que les hypothèses d'où il résulte), mais de faire ressortir ses liaisons avec les hypothèses et avec les autres théorèmes. Le mot *postulat* (αἴτημα) a été détourné depuis longtemps du sens que lui attribuait Euclide, et, malgré l'autorité des manuscrits et des éditeurs, nous avons peine à croire que l'auteur des *Éléments* ait entendu par là autre chose que la *demande* des moyens de tracer un cercle ou une droite et de prolonger celle-ci.

La possibilité de diviser en deux parties égales soit l'angle des deux directions opposées d'une même droite, soit un angle quelconque, soit une droite quelconque, résulte d'une proposition générale qui se démontre à l'aide du principe des limites, pour toute grandeur qui n'est susceptible de varier que dans deux sens déterminés et opposés. Plus d'un lecteur sera surpris de trouver à la page 33 du Volume la démonstration de l'existence d'un point milieu unique d'une droite donnée.

Les auteurs ont conservé, en la développant même en quelques points, la théorie euclidienne des proportions. Nous ne pouvons que répéter à ce sujet ce que nous disions il y a sept ans : cette théorie est un chef-d'œuvre que l'on ne pouvait trop étudier à une époque où les moyens plus rapides n'étaient pas connus. Aujourd'hui nous considérerions le temps comme mieux employé si on le consacrait à acquérir l'intelligence complète de la méthode des limites, chose indispensable dès que l'on veut pousser ses études mathématiques au delà des *quatre règles*. Cette prédilection des auteurs pour la méthode d'Euclide a, en outre, l'inconvénient de rompre l'unité de leur Ouvrage, dont une partie se trouve écrite dans l'esprit des anciens, l'autre dans l'esprit des modernes.

Si nous maintenons les critiques que nous avions formulées autrefois tant sur ce point que sur d'autres moins importants, nous maintenons aussi les éloges que nous avions donnés au travail consciencieux des deux savants professeurs, et nous en recommanderons vivement la lecture aux élèves et aux maîtres, mais surtout à ces derniers, qui y trouveront de grandes ressources pour perfectionner et varier leur enseignement.

Le Livre de M. Moreno offre un caractère plus élémentaire que le précédent, et naturellement les développements touchant à la philosophie de la Science n'y tiennent que bien peu de place. Nous pensons que l'auteur ferait bien, dans sa prochaine édition, de rayer du nombre des axiomes cette tautologie que « le tout est égal à la somme de ses parties ».

Le plan de l'Ouvrage est à peu près le même que celui qu'ont suivi MM. Sannia et d'Ovidio. Il se divise en deux Parties : Planimétrie et Stéréométrie. Chacune de ces Parties se divise elle-même en quatre Livres, ayant pour titres respectifs : I. La ligne droite. — II. Le cercle. — III. Relations métriques entre les éléments des figures. — IV. Mesure des figures. — V. La droite et le plan. — VI. Surfaces courbes. — VII. Relations métriques entre les éléments des figures. — VIII. Mesure des figures.

Il y a de plus deux Appendices, l'un à la suite de la Planimétrie, traitant des maxima et des minima, l'autre à la fin de la Stéréométrie, traitant de la similitude. L'Ouvrage est terminé par une « Note sur quelques propositions admises dans ces éléments ». Chacun des huit Livres est suivi d'un recueil d'Exercices. La notion de la longueur d'une ligne courbe ne nous paraît pas établie avec toute la rigueur désirable.

Nous dirons, pour conclure, que la lecture de l'Ouvrage de M. Moreno est une excellente préparation à celle du Traité de MM. Sannia et d'Ovidio, et qu'il contient déjà à lui seul toutes les propositions nécessaires pour aborder les parties plus élevées des Mathématiques.

Le traité de M. Faifofer, dont il nous reste à parler, s'écarte beaucoup plus que les deux précédents de la forme euclidienne, sans pour cela que la rigueur euclidienne y fasse défaut. Le mode d'exposition est moins dogmatique et se rapproche plus de la tendance analytique de la Science actuelle.

On y remarquera, par rapport à l'ordre habituel, quelques transpositions qui, au premier abord, pourront ne pas sembler naturelles; ainsi le Chapitre qui traite des parallèles ne commence qu'à la page 102. Mais on peut expliquer cette détermination de

l'auteur par le désir d'exposer d'abord toute la partie de la Géométrie plane qui ne repose pas sur l'axiome des parallèles.

La Géométrie de l'espace est un peu sacrifiée ; il n'est pas question de la théorie des triangles sphériques, qui aurait pu être traitée, sans augmentation sensible de l'étendue du Livre, en même temps que celle des angles trièdres, qui n'en est qu'une forme différente.

Voici un aperçu de la division de l'Ouvrage :

Des vingt-trois Chapitres dont il se compose, les treize premiers sont consacrés à la Planimétrie, les dix autres à la Stéréométrie.

Planimétrie. — I. Notions fondamentales. L'auteur y développe les propriétés les plus simples de la droite et du cercle, de manière à permettre au lecteur de résoudre par la règle et le compas les problèmes fondamentaux. — II. Angles et triangles. — III. Du cercle. — IV. Droites parallèles. — V. Parallélogrammes. — VI. Équivalence des polygones. — VII. Aires des polygones. — VIII. Angles dans le cercle. — IX. Polygones réguliers. — X. Rectification et quadrature approximatives du cercle. — XI. Proportion, proportionnalité. — XII. Segments proportionnels. — XIII. Similitude des figures.

Stéréométrie. — XIV. Plan et droite perpendiculaires. — XV. Dièdre. — XVI. Trièdre. — XVII. Parallélisme des droites et des plans. — XVIII. Prisme. — XIX. Pyramide. — XX. Polyèdres semblables. — XXI. Volumes des polyèdres. — XXII. Cylindre et cône. — XXIII. Sphère.

J. H.

Dra F.-J. STUDNICKY ZÁKLADOVÉ VYŠŠÍ MATHEMATIKY. — Díl první. O počtu differencialním. S četnými dřevotisky. Druhé, valně změněné vydání. — V Praze, 1878 (¹).

M. Studnička, professeur à l'Université de Prague, avait déjà publié sous le même titre, dans les années 1867-1871, un Cours

---

(¹) STUDNIČKA (Dr F. J.). *Éléments de Mathématiques supérieures.* Tome I : *Calcul différentiel.* Avec de nombreuses figures sur bois. Deuxième édition, notablement remaniée. Prague, 1878. 1 vol. in-8, 280 p.

d'Analyse supérieure en trois volumes, dont la nouvelle édition, qui commence à paraître, démontre suffisamment le succès. N'ayant connu que trop tard cet Ouvrage pour le signaler dans le *Bulletin* à l'époque de la première publication, nous rendrons compte des Volumes de la seconde édition à mesure qu'ils nous parviendront.

Bien que l'auteur ait pris à tâche de resserrer son exposition dans la moindre étendue possible, le mince volume que nous avons entre les mains n'en contient pas moins une grande richesse de matériaux. L'auteur y fait un heureux usage des déterminants, qui ont été pour lui l'objet de nombreux travaux. Il est entré, pour cette nouvelle édition, dans la voie ouverte par M. Baltzer, et l'on trouve, en notes au bas des pages, quelques utiles renseignements historiques.

Le titre même indique que l'auteur adopte la division habituelle du Calcul infinitésimal. Le premier Volume, consacré au Calcul différentiel, se compose de trois Livres, précédés d'une Introduction qui traite des fonctions en général, de leurs diverses natures, de leur continuité ou de leur discontinuité, de leur représentation graphique, de la mesure de la rapidité de leur variation (dérivée, différentielle), de la signification géométrique de la dérivée et du but général de la haute Analyse.

Le Livre I a pour objet la différentiation et les dérivées en général. Il se divise en quatre Sections :

A. *De la dérivée première.* — Différentiation des fonctions simples. Fonctions inverses, fonctions composées; différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes; fonctions implicites, fonctions de fonctions.

B. *Des dérivées d'ordres supérieurs.* — Après avoir un peu sommairement établi la représentation des dérivées d'ordres supérieurs au moyen des différentielles de même ordre, l'auteur passe à la détermination directe des dérivées d'ordre quelconque des fonctions, tant simples que composées, d'une ou de plusieurs variables, explicites ou implicites.

C. *Changement de variables.* — L'auteur traite les divers cas, et termine par l'élimination des constantes et des fonctions arbitraires au moyen de la différentiation.

D. *Des relations entre les fonctions primitives et leurs dérivées.* — Expression de l'accroissement de la fonction à l'aide d'une valeur moyenne de la dérivée première et à l'aide des dérivées supérieures. Séries de Taylor et de Maclaurin.

Le Livre II contient les applications du Calcul différentiel à la résolution des problèmes d'Algèbre supérieure.

A. *Détermination des vraies valeurs des expressions de forme indéterminée.*

B. *Maxima et minima des fonctions d'une ou de plusieurs variables.* — L'auteur prend pour base le développement par la série de Taylor, ce qui exclut le cas où la dérivée devient infinie.

C. *Développement des fonctions en série.* — Méthode des coefficients indéterminés. Application des séries de Taylor et de Maclaurin. Nombres de Bernoulli. Série de Bernoulli.

D. *Décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples.*

Le Livre III a pour titre : « Application du Calcul différentiel à la solution des problèmes de Géométrie supérieure. »

A. *Sur les courbes dans le plan.* — Tracé des courbes planes. Différentielles de l'arc et de l'aire ; on pourrait désirer ici quelques développements sur la définition de la longueur d'un arc de courbe. Tangentes, normales, asymptotes, contacts de divers ordres, courbure. Usage des coordonnées polaires. Points singuliers.

B. *Sur les courbes dans l'espace.* — Tangentes et plans normaux. Contact des courbes dans l'espace. Rayons et centres de courbure. Contact des courbes et des surfaces, plan et sphère osculateurs. Double courbure.

C. *Des surfaces.* — Plan tangent, normale. Positions relatives du plan tangent et de la surface. Contact des surfaces. Mesure de la courbure. Sections principales. Lignes de courbure.

D. *Des lieux géométriques.* — Courbes enveloppes. Développées. Surfaces enveloppes.

Grâce à la clarté avec laquelle est présentée la suite des formules dans les diverses Parties de ce Traité, il pourra être consulté avec grand profit par les personnes mêmes qui ne sont pas familières avec la langue dans laquelle il est écrit. J. H.

TABLES DE LOGARITHMES à 12 décimales jusqu'à 434 milliards, avec preuves, par A. NAMUR, secrétaire de l'École moyenne de l'État, à Thuin-sur-Sambre, précédées d'une Introduction théorique et d'une Notice sur l'usage des Tables, par P. MANSION, professeur à l'Université de Gand, publiées par l'Académie royale de Belgique. Bruxelles, F. Hayez; Paris, Gauthier-Villars, 1877. 26-XIV pages de texte, X de tables. Édition abrégée : XVI pages de texte, X de Tables.

L'Introduction théorique aux Tables de M. A. Namur est de l'auteur de ce compte rendu; la Notice sur l'usage des Tables est de M. Namur, mais elle a été rédigée aussi par M. Mansion; les Tables sont exclusivement l'œuvre de M. Namur. Il y a une édition où manque l'Introduction théorique. — I. Introduction théorique. **1**. Notice historique sur les grandes Tables de logarithmes. Nécessité de Tables auxiliaires qui permettent de calculer rapidement les logarithmes de tous les nombres à 10 décimales au moins. Tables de Callet, de Pineto, de Thoman; leurs inconvénients. **2**. Formules fondamentales.

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \theta\frac{z^3}{2}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < z < 1,$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \frac{\lambda}{2}\left(1 - \sqrt{1-2u}\right)^3, \quad -1 < \lambda < 1, \quad 0 < 2u < 1,$$

démontrées géométriquement au moyen des propriétés de l'hyperbole. **3**. Au moyen de ces formules, on établit sans peine le théorème suivant : « Pour la série des 994 nombres inférieurs à un million de fois le module M des logarithmes de Briggs, les différences logarithmiques commencent par 1000, 1001 ou 1002, et, par conséquent, l'interpolation logarithmique se fait plus facilement qu'en aucun autre endroit des Tables. Pour la série des 875 logarithmes à 6 décimales immédiatement supérieurs, de millionième en mil-

lionième, à celui de M, les différences antilogarithmiques commencent par les chiffres 1000, 1001, 1002, d'où une conséquence analogue. » 4. En multipliant un nombre quelconque par un ou deux facteurs convenablement choisis, on parvient à le ramener dans le voisinage de 1 000 000 M, et, par suite, à rendre la recherche de son logarithme aussi aisée que possible. On choisit les facteurs de manière que le travail du calculateur soit aussi grandement simplifié. Remarque analogue pour le calcul des antilogarithmes. 5. L'erreur maximum *théorique* possible que comporte la méthode de M. Namur est de 13 unités du treizième ordre décimal. — II. Les Tables de M. Namur pour la recherche des logarithmes comprennent : 1° les logarithmes des nombres de 433 300 à 434 300 à 12 décimales avec les différences ; 2° les logarithmes des nombres de 1000 à 1100 à 15 décimales : en multipliant un nombre dont les quatre premiers chiffres forment un autre nombre compris entre 3943 et 4343 par l'un des nombres de cette Table, il est ramené entre les limites de la Table principale ; 3° les logarithmes des nombres de 10 à 99 et de $10\frac{1}{2}$ à $19\frac{1}{2}$, d'unité en unité, à 15 décimales : en multipliant un nombre quelconque par l'un de ceux de cette Table, il est ramené à avoir ses quatre premiers chiffres entre 3933 et 4333. — Les Tables auxiliaires de facteurs dont nous venons de parler sont disposées de manière à servir également pour la recherche des antilogarithmes. La Table principale pour la recherche de ceux-ci permet de trouver à douze figures le nombre correspondant à un logarithme dont les cinq premières figures forment un nombre compris entre 63 778 (mantisse de logM) et 63 866. Les Tables et les calculs de M. Namur sont très-ingénieusement disposés. N'oublions pas de signaler une particularité importante : les Tables auxiliaires de facteurs sont faites de telle sorte que l'on peut trouver *de deux manières différentes* les logarithmes ou les antilogarithmes ; le calculateur peut donc se mettre en garde contre ses propres méprises. P. M.

MÉLANGES.

SUR LES SURFACES HOMOFOCALES DU SECOND ORDRE

Par M. LAGUERRE.

1. Étant données trois droites A, B et B′, menons, par un point a pris arbitrairement sur la première, une droite qui rencontre respectivement B et B′ aux points b et b'. La droite abb' décrit, lorsque le point a se déplace sur A, une surface du second ordre, et le conjugué harmonique du point a, par rapport au segment bb', décrit une génératrice de cette surface. Je dirai que cette génératrice est la *polaire de la droite* A *relativement aux droites* B *et* B′.

Dans une Note insérée dans le *Bulletin de la Société Mathématique* (¹), j'ai énoncé et démontré, par des considérations de Géométrie pure, la proposition suivante :

Étant donné un système (Σ) *de surfaces homofocales du second ordre et une droite fixe* D, *si par* D *on mène des plans tangents à une surface quelconque* Σ *du système et si l'on prend la polaire de* D *relativement aux normales menées à* Σ *aux deux points de contact, cette polaire est la même quelle que soit la surface du système que l'on considère.*

On peut dire que cette polaire est l'adjointe de D relativement au système homofocal (Σ), et il est facile de construire l'adjointe d'une droite quelconque quand on connaît une des focales du système. Que l'on mène en effet, par la droite donnée D, des plans rencontrant le plan de la focale suivant des tangentes à cette courbe et que, par les points de contact, on mène des perpendiculaires à ces plans, la droite adjointe de D sera la polaire de D relativement à ces perpendiculaires.

2. La proposition qui précède me paraît assez intéressante pour

(¹) *Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques* (*Bulletin de la Soc. Math.*, t. III, p. 179).

qu'il soit désirable d'en avoir une démonstration analytique; il est du reste utile, dans diverses recherches relatives aux surfaces du second ordre, de posséder les équations de l'adjointe d'une droite donnée.

Soient donc

$$\frac{x-\alpha}{L} = \frac{y-\beta}{M} = \frac{z-\gamma}{N}$$

les équations d'une droite D et

$$(1) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

l'équation d'une surface quelconque Σ du système homofocal considéré.

Menons par D deux plans tangents à cette surface, et appelons T′ et T″ les deux points de contact. En désignant par x, y, z les coordonnées d'un quelconque de ces points, on a les relations

$$\frac{x\alpha}{A} + \frac{y\beta}{B} + \frac{z\gamma}{C} = 1$$

et

$$\frac{xL}{A} + \frac{yM}{B} + \frac{zN}{C} = 0,$$

qui expriment que le plan tangent au point (x, y, z) contient la droite D; en désignant par t une quantité indéterminée, posons en outre

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = t.$$

Les trois équations précédentes, étant résolues par rapport à x, y et z, donnent les formules suivantes :

$$\frac{x}{A} = \frac{M - N + t(N\beta - M\gamma)}{\omega},$$

$$\frac{y}{B} = \frac{N - L + t(L\gamma - N\alpha)}{\omega},$$

$$\frac{z}{C} = \frac{L - M + t(M\alpha - L\beta)}{\omega},$$

où ω représente le déterminant (¹)

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Les coordonnées du point de contact devant satisfaire à l'équation (1), on aura, en posant, pour abréger,

$$p = \Sigma \mathrm{A}(\mathrm{M}-\mathrm{N})^2 - \omega^2,$$

$$q = \Sigma \mathrm{A}(\mathrm{M}-\mathrm{N})(\mathrm{N}\beta - \mathrm{M}\gamma), \quad \text{et} \quad r = \Sigma \mathrm{A}(\mathrm{N}\beta - \mathrm{M}\gamma)^2,$$

l'équation suivante, qui détermine la quantité t :

$$(2) \qquad p + 2qt + rt^2 = 0.$$

Si donc on désigne par t' et t'' les racines de cette équation, les coordonnées du point T′ sont données par les formules

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{x'}{\mathrm{A}} = \dfrac{\mathrm{M}-\mathrm{N}+t'(\mathrm{N}\beta-\mathrm{M}\gamma)}{\omega}, \\[2ex] \dfrac{y'}{\mathrm{B}} = \dfrac{\mathrm{N}-\mathrm{L}+t'(\mathrm{L}\gamma-\mathrm{N}\alpha)}{\omega}, \\[2ex] \dfrac{z'}{\mathrm{C}} = \dfrac{\mathrm{L}-\mathrm{M}+t'(\mathrm{M}\alpha-\mathrm{N}\beta)}{\omega}, \end{cases}$$

et celles du point T″ par les formules

$$(3') \qquad \begin{cases} \dfrac{x''}{\mathrm{A}} = \dfrac{\mathrm{M}-\mathrm{N}+t''(\mathrm{N}\beta-\mathrm{M}\gamma)}{\omega}, \\[2ex] \dfrac{y''}{\mathrm{B}} = \dfrac{\mathrm{N}-\mathrm{L}+t''(\mathrm{L}\gamma-\mathrm{N}\alpha)}{\omega}, \\[2ex] \dfrac{z''}{\mathrm{C}} = \dfrac{\mathrm{L}-\mathrm{M}+t''(\mathrm{M}\alpha-\mathrm{N}\beta)}{\omega}. \end{cases}$$

3. Les coordonnées d'un point quelconque S′ de la normale à

(¹) Je suppose nécessairement ce déterminant différent de zéro ; pour une droite donnée ne passant pas par l'origine, on peut toujours du reste, en choisissant convenablement les directions positives des axes, faire en sorte que sa valeur ne soit pas nulle.

la surface menée au point T′ sont données par les formules

$$x = x'\left(1 + \frac{\rho'}{A}\right), \quad y = y'\left(1 + \frac{\rho'}{B}\right) \quad \text{et} \quad z = z'\left(1 + \frac{\rho'}{C}\right),$$

où ρ' désigne un paramètre arbitraire; de même, en désignant par ρ'' un autre paramètre arbitraire, les coordonnées d'un point quelconque S″ de la normale menée en T″ sont données par les formules

$$x = x'\left(1 + \frac{\rho''}{A}\right), \quad y = y''\left(1 + \frac{\rho''}{B}\right) \quad \text{et} \quad z = z''\left(1 + \frac{\rho''}{C}\right).$$

Considérons sur la droite S′S″ deux points V′ et V″ divisant harmoniquement les segments S′S″; λ désignant un paramètre arbitraire, les coordonnées de ces points sont respectivement déterminées par les formules suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} x = \dfrac{x'\left(1 + \dfrac{\rho'}{A}\right) + \lambda x''\left(1 + \dfrac{\rho''}{A}\right)}{1 + \lambda}, \\[2ex] y = \dfrac{y'\left(1 + \dfrac{\rho'}{B}\right) + \lambda y''\left(1 + \dfrac{\rho''}{B}\right)}{1 + \lambda}, \\[2ex] z = \dfrac{z'\left(1 + \dfrac{\rho'}{C}\right) + \lambda z''\left(1 + \dfrac{\rho''}{C}\right)}{1 + \lambda}, \end{cases}$$

et

$$(4') \quad \begin{cases} x = \dfrac{x'\left(1 + \dfrac{\rho'}{A}\right) - \lambda x''\left(1 + \dfrac{\rho''}{A}\right)}{1 - \lambda}, \\[2ex] y = \dfrac{y'\left(1 + \dfrac{\rho'}{B}\right) - \lambda y''\left(1 + \dfrac{\rho''}{B}\right)}{1 - \lambda}, \\[2ex] z = \dfrac{z'\left(1 + \dfrac{\rho'}{C}\right) - \lambda z''\left(1 + \dfrac{\rho''}{C}\right)}{1 - \lambda}. \end{cases}$$

J'exprime que le point V′ est situé sur la droite D, ce qui donne les relations

$$\sum \frac{x'^2}{A} + \rho' \sum \frac{x'^2}{A^2} + \lambda \sum \frac{x' x''}{A} + \lambda\rho'' \sum \frac{x' x''}{A^2} = 1 + \lambda$$

et

$$\sum\frac{x'x''}{A}+\rho'\sum\frac{x'x''}{A^2}+\lambda\sum\frac{x''^2}{A}+\lambda\rho''\sum\frac{x''^2}{A^2}=1+\lambda.$$

Les deux points T′ et T″ étant sur la surface Σ, on a

$$\sum\frac{x'^2}{A}=\sum\frac{x''^2}{A}=1,$$

et les relations précédentes deviennent

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}\rho'\sum\frac{x'^2}{A^2}+\lambda\rho''\sum\frac{x'x''}{A^2}&=\lambda\left(1-\sum\frac{x'x''}{A}\right),\\ \rho'\sum\frac{x'x''}{A^2}+\lambda\rho''\sum\frac{x''^2}{A^2}&=\quad 1-\sum\frac{x'x''}{A},\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$\rho'=\frac{1-\sum\frac{x'x''}{A}}{\sum\frac{x'^2}{A^2}\sum\frac{x''^2}{A^2}-\sum^2\frac{x'x''}{A^2}}\left(\lambda\sum\frac{x''^2}{A^2}-\sum\frac{x'x''}{A^2}\right)$$

et

$$\lambda\rho''=\frac{1-\sum\frac{x'x''}{A}}{\sum\frac{x'^2}{A^2}\sum\frac{x''^2}{A^2}-\sum^2\frac{x'x''}{A^2}}\left(\sum\frac{x'^2}{A^2}-\lambda\sum\frac{x'x''}{A^2}\right).$$

Si l'on porte maintenant ces valeurs dans les équations (4′), on aura, en fonction du paramètre arbitraire λ, les coordonnées du point V″ qui décrit la polaire cherchée; mais, avant de faire cette substitution, il est d'abord nécessaire d'introduire les quantités qui définissent la droite D.

4. Si l'on pose, pour abréger,

$$P=\Sigma(M-N)^2,\quad Q=\Sigma(M-N)(N\beta-M\gamma),\quad\text{et}\quad R=\Sigma(N\beta-M\gamma)^2,$$

on obtient facilement les expressions suivantes :

$$\sum\frac{x'^2}{A^2}=\frac{P+2Qt'+Rt'^2}{\omega^2},\quad\sum\frac{x'x''}{A^2}=\frac{P+Q(t'+t'')+Rt't''}{\omega^2},$$

$$\sum\frac{x''^2}{A^2}=\frac{P+2Qt''+Rt''^2}{\omega^2},\quad\text{et}\quad 1-\sum\frac{x'x''}{A}=\frac{(t'-t'')^2r}{2\omega^2}.$$

On en déduit

$$\sum \frac{x'^2}{A^2} \sum \frac{x''^2}{A^2} - \sum^2 \frac{x' x''}{A^2} = \frac{(t' - t'')^2 (PR - Q^2)}{\Delta^4},$$

et, par suite,

$$\rho' = \frac{r}{2(PR - Q^2)} [\lambda(P + 2Qt'' + Rt''^2) - P - Q(t' + t'') - Rt't''],$$

$$\lambda\rho'' = \frac{r}{2(PR - Q^2)} \{P + 2Qt' + Rt'^2 - \lambda[P + Q(t' + t'') + Rt't'']\};$$

si l'on pose

$$\lambda = \frac{t' - \mu}{t'' - \mu},$$

d'où

$$\lambda - 1 = \frac{t' - t''}{t'' - \mu},$$

les valeurs précédentes deviennent

$$\rho' = \frac{r(\lambda - 1)}{2(PR - Q^2)} [P + Qt'' + \mu(Q + Rt'')],$$

$$\lambda\rho'' = \frac{r(1 - \lambda)}{2(PR - Q^2)} [P + Qt' + \mu(Q + Rt')].$$

Portons maintenant ces valeurs dans les équations (4'); en y remplaçant également x', y', z', x'', y'' et z'' par leurs valeurs, en faisant quelques réductions faciles et en remarquant qu'en vertu de l'équation (2)

$$t' + t'' = -\frac{2q}{r} \quad \text{et} \quad t't'' = \frac{p}{r},$$

on obtiendra les formules suivantes, qui donnent, en fonction d'un paramètre arbitraire μ, les coordonnées d'un point quelconque de la droite Δ adjointe à la droite D :

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} x\omega &= A(M - N) - \frac{(M - N)(Pr - Qq) + (N\beta - M\gamma)(Qp - Pq)}{PR - Q^2} \\ &\quad + \mu \left[A(N\beta - M\gamma) - \frac{(M - N)(Qr - Rq) + (N\beta - M\gamma)(Rp - Qq)}{PR - Q^2} \right], \\ y\omega &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z\omega &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de $y\omega$ et de $z\omega$ se déduisant de celle de $x\omega$ par de simples permutations de lettres, je me dispense de les transcrire ici.

5. Pour démontrer maintenant la proposition que j'ai rappelée au commencement de cette Note, il suffit de faire voir que les équations que je viens d'obtenir restent les mêmes quand, au lieu de considérer la surface définie par l'équation (1), on considère une surface quelconque du système, c'est-à-dire quand on change respectivement A, B et C en $A + \rho$, $B + \rho$ et $C + \rho$, ρ désignant une constante arbitraire.

Or, des valeurs données ci-dessus de p, q et r il résulte aisément que, quand on effectue le changement dont je viens de parler, p, q et r deviennent respectivement $p + \rho P$, $q + \rho Q$ et $r + \rho R$, et il est facile de vérifier que les valeurs de x, y et z données par les formules (6) ne sont pas changées.

La proposition est donc démontrée.

6. On peut chercher quelles sont les droites de l'espace qui sont perpendiculaires à leurs adjointes. Si l'on remarque que les cosinus directeurs de la droite adjointe à D sont proportionnels aux coefficients de μ dans les valeurs de $x\omega$, $y\omega$ et $z\omega$, on voit que les droites cherchées sont définies par la relation

$$\sum AL(N\beta - M\gamma) - \frac{1}{PR - Q^2}$$
$$\times \left[(Qr - Qq) \sum L(M - N) + (Rp - Qq) \sum L(N\beta - M\gamma) \right] = 0,$$

relation qui se réduit évidemment à

$$\Sigma AL(N\beta - M\gamma) = 0;$$

elle exprime, on le voit aisément, que la droite donnée est perpendiculaire relativement à une des surfaces du système.

D'où la proposition suivante :

Si une droite est perpendiculaire à son adjointe, elle est également perpendiculaire à sa polaire relativement à une quelconque des surfaces du système (Σ).

7. Supposons que la droite D soit une génératrice d'une des

surfaces du système, par exemple de la surface déterminée par l'équation (1). L'équation (2) est alors identiquement satisfaite, et l'on a

$$p = q = r = 0.$$

Les équations de la droite adjointe Δ deviennent alors

$$\frac{x\omega}{A} = M - N + \mu(N\beta - M\gamma),$$

$$\frac{y\omega}{B} = N - L + \mu(L\gamma - N\alpha),$$

$$\frac{z\omega}{C} = L - M + \mu(M\alpha - L\beta);$$

multipliant successivement ces trois équations par α, β, γ et faisant la somme, on en déduit, en remarquant que

$$\omega = \Sigma\alpha(M - N),$$

l'équation suivante :

$$\frac{x\alpha}{A} + \frac{y\beta}{B} + \frac{z\gamma}{C} = 1.$$

C'est évidemment l'équation du plan polaire, par rapport à Σ, du point (α, β, γ), de la droite D, et ce plan contient l'adjointe Δ. Comme le point (α, β, γ) est un point quelconque de la droite D, il en résulte que Δ est l'enveloppe des plans polaires, par rapport à Σ, des divers points de D, et, comme D est sur la surface, c'est la droite D elle-même.

Donc :

Si une droite est une génératrice d'une quelconque des surfaces du système (Σ), *cette droite se confond avec son adjointe.*

8. Par une droite D menons les plans tangents à une surface du système et les normales aux points de contact. Ces deux droites étant perpendiculaires à D, la droite qui les rencontre et leur est perpendiculaire est parallèle à D; par suite, le point milieu du segment compris entre les pieds de cette perpendiculaire se trouve sur la droite adjointe Δ.

Donc :

Si, par une droite quelconque D, *on mène les plans tangents*

à une surface quelconque du système, puis les normales aux points de contact ; si, en outre, on construit la droite qui rencontre ces deux normales et leur est perpendiculaire, le lieu du point milieu du segment compris entre les deux pieds de la perpendiculaire est la droite adjointe de D.

Il y a généralement deux surfaces du système qui touchent D; soient Σ l'une d'entre elles et Σ' une surface homofocale qui en diffère infiniment peu. Les normales menées aux points de contact des plans menés par C tangentiellement à Σ' sont infiniment voisines, et le point milieu du segment dont je viens de parler se confond à la limite avec le centre de courbure de la section droite du cylindre circonscrit à la surface Σ et ayant ses génératrices parallèles à D, ce centre de courbure correspondant au point de contact de D avec la surface.

D'où la proposition suivante :

Soient Σ *et* Σ_0 *les deux surfaces du système qui touchent la droite* D, m *et* m_0 *les points de contact ; soit, de plus,* K *le centre de courbure, au point* m, *de la section droite du cylindre circonscrit à* Σ *et ayant ses génératrices parallèles à* D; *soit de même* K_0 *le centre de courbure, au point* m_0, *de la section droite du cylindre circonscrit à* Σ_0 *et ayant également ses génératrices parallèles à* D : *la droite qui joint les points* K *et* K_0 *est l'adjointe de* D.

9. Jusqu'ici la surface Σ, déterminée par l'équation (1), et dont les éléments figurent dans les formules (6), est une surface quelconque du système. Supposons maintenant qu'elle soit tangente à la droite D; l'équation (2) devant alors avoir deux racines égales, on peut poser

$$p = G^2, \quad q = GH \quad \text{et} \quad r = H^2,$$

et les formules (6) deviennent

$$(7)\quad \begin{cases} x\omega = A[(M - N) + \mu(N\beta - M\gamma)] \\ \qquad + \dfrac{(N\beta - M\gamma)G - (M - N)H}{PR - Q^2}[(PH - QG) + \mu(QH - RG)], \\ y\omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z\omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces formules peuvent encore se simplifier si l'on suppose que le point (α, β, γ), dont la position sur la droite D est jusqu'à présent indéterminée, est précisément le point de contact m de cette droite avec Σ.

L'équation (2) se réduit alors à

$$(G + Ht)^2 = 0,$$

et l'on en déduit

$$\frac{\alpha\omega}{A} = M - N - \frac{G}{H}(N\beta - M\gamma), \quad \frac{\beta\omega}{B} = N - L - \frac{G}{H}(L\gamma - N\alpha),$$
$$\frac{\gamma\omega}{C} = L - N - \frac{G}{H}(M\alpha - L\beta).$$

Au moyen de ces relations, les équations (7) prennent la forme suivante :

$$(8)\quad \begin{cases} (x - \alpha)\omega = A(N\beta - M\gamma)\left(\frac{G}{H} + \mu\right) - \frac{\alpha}{A}\,\frac{H\omega[PH - QG + \mu(QH - RG)]}{PR - Q^2}, \\ (y - \beta)\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (z - \gamma)\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

10. Si, entre les équations précédentes, on élimine les quantités ω, $\frac{G}{H} + \mu$ et $\frac{H\omega[PH - QG + \mu(QH - RG)]}{PR - Q^2}$, on obtient l'équation qui suit :

$$\begin{vmatrix} x - \alpha & A(N\beta - M\gamma) & \frac{\alpha}{A} \\ y - \beta & B(L\gamma - N\alpha) & \frac{\beta}{B} \\ z - \gamma & C(M\alpha - L\beta) & \frac{\gamma}{C} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation d'un plan contenant l'adjointe Δ et passant par le point m; comme $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{\beta}{B}$ et $\frac{\gamma}{C}$ sont respectivement proportionnels aux cosinus directeurs de la normale menée en m à la surface Σ, on voit que ce plan contient cette normale.

D'ailleurs, les quantités $A(N\beta - M\gamma)$, $B(L\gamma - N\alpha)$, $C(M\alpha - L\beta)$ étant respectivement proportionnelles aux cosinus directeurs de la

tangente conjuguée de la droite D, ce plan contient également cette tangente conjuguée.

Donc :

Soit Σ *une surface du système touchant une droite* D *au point* m : *le plan, mené par le point* m *normalement à cette surface et passant par la tangente conjuguée de* D, *contient l'adjointe* Δ *de la droite* D.

En considérant la seconde surface du système qui touche D, on obtiendrait également un second plan contenant Δ; cette droite sera donc ainsi complétement déterminée.

11. En désignant comme ci-dessus par Σ_0 la seconde surface du système qui touche la droite D et par m_0 leur point de contact, considérons le plan mené en m tangentiellement à la surface Σ; ce plan contient la tangente conjuguée de D relativement à Σ; il résulte d'ailleurs d'une proposition bien connue qu'il contient la normale menée en m_0 à la surface Σ_0.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant données les deux surfaces Σ *et* Σ_0 *du système qui touchent respectivement une droite donnée* D *aux points* m *et* m_0, *si l'on construit la tangente conjuguée de* D *relativement à la surface* Σ, *cette tangente rencontre en un point* K_0 *la normale menée en* m_0 *à la surface* Σ_0. *Le point* K_0 *est le centre de courbure relatif au point* m_0 *de la section droite du cylindre circonscrit à* Σ_0 *et ayant ses génératrices parallèles à* D.

12. La considération de la droite adjointe permet de résoudre facilement diverses questions relatives à la courbure d'une surface du second ordre dont on connaît la focale. Imaginons en effet un cylindre circonscrit à une surface donnée Σ, et soit mT une des génératrices de ce cylindre touchant la surface au point m; construisons la droite adjointe de MT, et désignons respectivement par T′ et par K les points où cette droite perce le plan tangent en m et la normale en ce point. On voit par ce qui précède que mT′ est la tangente conjuguée de mT et que K est le centre de courbure de la section droite du cylindre.

13. Les formules (8) donnent aisément les coordonnées du point K; la droite mK étant en effet perpendiculaire au plan tangent mené en m à la surface Σ, ses coordonnées s'obtiendront en faisant $\mu = -\frac{G}{H}$. En les désignant donc par ξ, η et ζ, on aura

$$(\xi - \alpha) = \frac{\alpha}{A}\,\frac{PH^2 - 2QGH + RG^2}{PR - Q^2},$$

$$\eta - \beta = \frac{\beta}{B}\,\frac{PH^2 - 2QGH + RG^2}{PR - Q^2},$$

$$\zeta - \gamma = \frac{\gamma}{C}\,\frac{PH^2 - 2QGH + RG^2}{PR - Q^2}.$$

Soient, comme ci-dessus, Σ_0 la seconde surface du système qui touche D, et ρ la quantité dont diffèrent les carrés des axes de Σ et les carrés des axes de Σ_0.

L'équation

$$(G^2 - \rho P) + 2(GH - \rho Q)t + (H^2 - \rho R)t^2 = 0$$

devant avoir ses racines égales, on a

$$\rho = \frac{PH^2 - 2QGH + RG^2}{PR - Q^2},$$

et les formules précédentes deviennent

$$\xi - \alpha = \rho\,\frac{\alpha}{A}, \quad \eta - \beta = \rho\,\frac{\beta}{B}, \quad \zeta - \gamma = \rho\,\frac{\gamma}{C},$$

d'où

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 + (\zeta - \gamma)^2 = \rho^2\left(\frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{B^2} + \frac{\gamma^2}{C^2}\right).$$

Si donc on désigne par R le rayon de courbure mK du cylindre circonscrit à Σ et ayant ses génératrices parallèles à D, par δ la distance du centre des surfaces du système au plan tangent à ce cylindre le long de D, on a la relation $R^2 = \rho^2\delta^2$, d'où

$$R = \rho\delta.$$

De même, si l'on considérait le cylindre circonscrit à la surface Σ_0 et ayant ses génératrices parallèles à D, en désignant par R_0 son rayon de courbure le long de l'arête D et par δ_0 la distance du centre

au plan tangent au cylindre le long de cette arête, on aurait la relation

$$R_0 = -\rho\delta_0.$$

Des relations précédentes on déduit en particulier l'équation

$$\frac{R}{\delta} = \frac{R_0}{\delta_0},$$

qu'il est aisé de vérifier.

DEUX PIÈCES PEU CONNUES DE LA CORRESPONDANCE D'EULER (LETTRE D'ERIK PONTOPPIDAN A L. EULER, ET RÉPONSE D'EULER);

COMMUNIQUÉES

PAR M. BIRGER HANSTED,

Candidat en Philosophie, à Copenhague.

Les deux Lettres que j'ai l'honneur de communiquer aux lecteurs du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* se trouvent dans un *Essay sur la nouveauté du monde* publié à Copenhague, 1755, par le D[r] Erik Pontoppidan. J'ai cru que la Lettre d'Euler méritait d'être sauvée de l'oubli, qui serait son sort certain si elle restait cachée dans un livre danois peu connu ou pour mieux dire inconnu hors des frontières du Danemark. Cette Lettre, si franche, si sincère, caractérise à merveille l'illustre Euler; de plus, je crois que sa teneur peut la recommander aux lecteurs de nos jours. Le savant danois D[r] Erik Pontoppidan, théologien, naturaliste, historien et scrutateur infatigable de la nature, fut doué d'une rare faculté d'observation, de connaissances très-étendues et d'une activité qui ne se lassa jamais. Le but de sa vie fut alors de faire concorder le livre de la nature avec l'Écriture sainte. En s'occupant de ramasser des arguments en faveur de son idée que le monde, œuvre du souverain Seigneur, n'existe pas de toute éternité, mais, d'accord avec les renseignements de Moïse, ne date que de 6000 ans, pensée qu'il a développée dans son *Essay sur la nouveauté du monde,* il songea à s'adresser au professeur Euler, à Berlin, croyant avoir trouvé une diminution de la

durée de l'année comme suite nécessaire de la contraction de l'orbite de la Terre. Saisi de cette pensée, il écrit, après quelques hésitations, directement à Euler pour le prier de lui donner des explications (*voir* Lettre I). La réponse d'Euler (*voir* Lettre II), lui donnant les explications souhaitées, est assez remarquable pour mériter d'être connue de tous ceux qui s'intéressent aux études et aux découvertes des siècles passés. Voici les deux Lettres : Lettre I, datée de Bergen, en Norvége, le 26 de mars 1754, du Dr Erik Pontoppidan, à M. Euler, et Lettre II, datée de Berlin, ce 11 de mai 1754, réponse de M. Euler au Dr Erik Pontoppidan :

I.

« Monsieur,

» Vous vous étonnerez sans doute à la vue de ces lignes, dont l'auteur ne présume pas avoir l'honneur de vous être connu. Aussi ai-je bien balancé dans mon esprit le pour et le contre avant que de vous incommoder par là, eu surtout égard à la distance des lieux, sans laquelle j'aurois, il y a longtemps, recherché l'honneur et le plaisir de votre commerce. Vous jugerez aisément, Monsieur, que ce désir m'est venu de la lecture de vos Ouvrages, qui n'ont pas manqué d'inspirer à moy, comme à tout le monde, beaucoup de respect pour vos talens admirables et admirez en effect par toute l'Europe. Venons-en au fait, sans complimens superflus, qui ne me sont pas fort naturels. C'est dans le premier tome d'un livre appelé : *Physikalische Belustigungen* et dans le *Magazine de Londres* que j'ai lu une Lettre de votre main, adressée à M. Wetstein, sur l'approche continuelle de notre globe vers le Soleil comme vers son centre. Ce problème m'a paru très-intéressant et très-digne de toute la recherche possible, afin d'être mis en tout son jour, par conséquent un peu plus détaillé que je ne le trouve dans ladite Lettre. La raison particulière qui me fait souhaiter cela pour l'instruction du public, curieux sous nos jours plus que jamais, c'est que je travaille à un *Essay sur la nouveauté du monde,* pour l'opposer à Messieurs les matérialistes et autres incrédules de ce siècle, auxquels on n'appliqueroit pas mal les paroles de saint Pierre (IIe Épitre, C. III, v. 5). Or je vois

avec plaisir, Monsieur, qu'à la fin de votre Lettre vous tirez du principe en question la juste conséquence que notre globe va finir un jour sa carrière et achever sa destination présente. Tout cela cadre admirablement bien avec mes pensées et je souhaiterois qu'il n'y eût rien à dire contre cette position. Cependant, puisque je me sens la vue trop courte dans ces sortes de sujets, il faut de nécessité que je vous incommode par quelques questions, superflues sans doute, si j'étois plus versé dans l'Astronomie.

» En premier lieu, je me donne la liberté de vous demander par quelle raison vous alléguez la matière subtile qui remplit notre tourbillon (ne fût-ce que la matière de la lumière) comme un moyen qui pousse notre globe de plus en plus vers son centre? Car si c'est la matière lumineuse qui ne cesse d'émaner du Soleil, ne semble-t-elle pas devoir produire un effet contraire en repoussant notre globe rencontré en son chemin, plutôt que de l'attirer?

» En second lieu, cette matière lumineuse, supposé qu'elle parte incessamment du Soleil, ne devroit-elle pas s'attacher ou se fixer quelque part aux planètes, ou bien rendre notre tourbillon plus lumineux et plus brillant vers la fin des siècles que dans leur commencement?

» Troisièmement, ne devroit-elle pas, par la même raison, causer au corps du Soleil un préjudice considérable, en lui ôtant continuellement quelque chose de son volume?

» Quatrièmement, s'il y a eu un temps dans lequel notre globe se trouva plus éloigné du Soleil, ne s'ensuit-il pas que les hivers de ce temps-là ont plus de froid comme les étés moins de chaleur, et les habitans faits pour notre globe ont-ils pu s'accommoder de cela?

» En cinquième lieu, ne pourroit-on pas écarter ces inconvéniens par la supposition que le corps du Soleil, amoindri par l'émanation de la matière lumineuse, avoit été, du commencement, plus vaste et ne s'étoit diminué qu'à proportion de l'approche du globe et des autres planètes? Position qui, si elle seroit fondée, serviroit à glorifier infiniment la sagesse économique du grand Exécuteur.

» Enfin, le raccourcissement de l'année qui entre dans votre système est-il bien assuré, et quelle est la différence d'un siècle à un autre? Asis, roy de Thèbes, n'a-t-il pas mesuré l'année solaire

tout comme nous la mesurons aujourd'huy, en y ajoutant les cinq jours qui lui manquoient auparavant faute de calculs ?

» Voilà, Monsieur, mes six questions qui, pour être un peu épineuses à moy, n'en seront pas de même à un esprit fait comme le vôtre pour l'illustration de ce siècle. Si je considère ce dernier sous l'image de notre tourbillon, je vous place dans son centre comme le soleil de notre âge. Sur ce fondement, je vous demande pour réponse quelques rayons jettés dans un grand éloignement et d'autant plus bienvenus. Il ne me reste que de vous donner à bon Dieu et de vous souhaiter le comble de ses grâces et bénédictions, étant d'un cœur respectueux autant qu'un inconnu peut l'être,

» Monsieur, etc.

« De Bergen, en Norw., ce 26 mars 1754. »

II.

« Monsieur,

» Tout sensible que je sois à l'honneur de votre Lettre, je m'estimerois bien heureux si mes recherches peuvent jamais contribuer quelque chose à confondre la malice des esprits forts. Je croyois que l'approche successive des planètes vers le Soleil fournissoit une preuve convainquante, tant que le système du monde, tel qu'il est aujourd'huy, n'ayt existé depuis toute l'éternité, ni qu'il sauroit subsister éternellement. Or, pour prouver ce sentiment *a priori* et pour développer en même temps les questions dont vous avez bien voulu m'honorer, je prendrai la liberté de vous proposer, Monsieur, les remarques suivantes.

» 1. Je dis donc que l'espace du monde ne sauroit être vuide de toute matière, comme il seroit nécessaire si les planètes devoient décrire leurs orbites conformément aux règles établies par Kepler et soutenues par le grand Newton, qui a été obligé de supposer l'espace du monde entièrement vuide pour que les planètes, dans leur mouvement, n'y rencontrent aucune résistance, ayant bien reconnu qu'une résistance devoit nécessairement troubler leur

mouvement. Or, quoique Newton ait soutenu vuide l'espace du ciel, je dis que ce sentiment ne sauroit être admis et qu'il est toujours détruit par la théorie de la lumière, de quelque manière qu'on l'envisage. Car, si, comme le veut Newton luy même, la lumière est dardée du Soleil, avec cette terrible vitesse qui luy fait parcourir l'intervalle entre le Soleil et la Terre en moins de huit minutes, tout l'espace doit être absolument rempli de la matière de la lumière. Mais, croyant avoir suffisamment réfuté cette hypothèse de l'émanation actuelle de la lumière des corps lumineux, on est réduit par des raisons les plus fortes à soutenir que la lumière se répand par l'espace du ciel, de la manière que le son est répandu par l'ouïe. Il faut donc que l'espace du ciel soit rempli d'un fluide extrêmement élastique et rare pour transmettre les rayons de la lumière. Voilà donc, dans l'un et l'autre cas, l'univers rempli d'une matière subtile qui ne sauroit manquer d'influer sur le mouvement des planètes. Cet effet peut être double, car d'abord, en tant que ce fluide est matière, il faut que les corps qui s'y meuvent rencontrent quelque résistance qui tende à diminuer leur vitesse, et, en tant que cette matière est en mouvement, elle choquera les planètes selon la direction. Et c'est sur quoi roule votre première question, que par le mouvement de la lumière, les planètes devroient être de plus en plus éloignées du Soleil. Cela arriveroit, sans doute, si les planètes n'étoient pas continuellement attirées par la gravité, vers le Soleil. Mais, quelle que soit la cause de la gravité, il suffit de savoir que la force est la raison renversée des quarrés de la distance au Soleil. Or, la dernière force de la lumière, en cas qu'elle choquât sur les planètes en les repoussant du Soleil, devroit suivre la même raison, vu que la force de la lumière diminue aussi en raison du quarré des distances au Soleil; elle ne feroit donc que diminuer tant soit peu la force de la gravité, et il en seroit de même que si les planètes seroient attirées vers le Soleil par une force un peu moindre, mais qui suivroit également la même raison à l'égard de la distance. Or, si les planètes n'éprouvoyent qu'une telle force qui les poussât au Soleil, elles devroient toujours décrire des ellipses autour du Soleil, et leur grandeur devroit toujours demeurer la même éternellement. Ainsi, quoique la lumière agisse par impulsion sur les planètes en les repoussant au Soleil, cela ne sauroit altérer la grandeur de

l'orbite de chacune. Mais l'autre effet de cette matière subtile, qui résulte de la résistance, doit nécessairement tant soit peu retarder le mouvement, ou bien, après que la planète aura parcouru un certain arc, sa vitesse sera un peu moindre que si elle n'avoit pas éprouvé cette résistance. Or, dès que le mouvement d'une planète est devenu plus lent que la conservation de son orbite l'exige, la force de la gravité l'emporte, et la planète doit s'approcher davantage du Soleil. Cela est évident de là que, si le mouvement d'une planète étoit entièrement détruit, elle tomberoit directement dans le Soleil. Il est donc certain qu'à cause d'un fluide dont le ciel est rempli, de quelque nature qu'il soit, les orbites des planètes doivent insensiblement être rétrécies, quelque violente que puisse d'ailleurs être la force repoussante de la lumière.

» 2. Pour la seconde question, comme l'hypothèse de l'émanation actuelle de la lumière du Soleil est insoutenable, et que la lumière est plus tôt de la même manière répandue par l'éther, que le son par l'air, aussi peu qu'un bruit passé augmente un son présent, la lumière du temps passé pourra augmenter celle d'aujourd'hui. Aussi voit-on que, dès qu'on rend une chambre obscure, la lumière qui étoit entrée auparavant s'éteint subitement.

» 3. A la troisième question, il n'y a point de doute que, si la lumière étoit une émanation réelle du Soleil, son corps en devroit souffrir une perte très-considérable. Si nous considérons la rapidité que ce courant continuel, qui remplit tout l'univers, devroit avoir, quelque subtile que nous concevions la matière de la lumière, je doute fort que le Soleil pourroit subsister seulement une heure. Mais dans l'autre système, où la propagation de la lumière est semblable à celle du son, le Soleil ne perdra pas plus en nous éclairant qu'une cloche en sonnant.

» 4. La quatrième question n'a aucun doute, car, comme il est certain que nul homme ni nulle créature semblable aux nôtres ne sauroit subsister dans Saturne; ainsi, si la Terre avoit été jamais aussi éloignée du Soleil que Saturne l'est aujourd'hui, elle auroit été absolument inhabitable aux créatures qui l'occupent à présent. Donc, quoique le monde ait existé depuis toute éternité (ce qui

contredit déjà au rétrécissement successif des orbites) et que l'orbite de la Terre soit enfin parvenue à l'étendue qu'elle occupe actuellement, il faudroit absolument que dans un certain temps toutes les créatures y fussent produites par un vray miracle.

» 5. Comme je crois l'hypothèse de l'émanation actuelle de la lumière insoutenable, cette question n'a point de difficulté.

» 6. La dernière question est la plus importante. Il s'agit de savoir si l'on peut s'assurer par les observations d'un racourcissement des années, ce qui seroit une suite nécessaire de la contraction de l'orbite de la Terre. J'ay cru que cela pouvoit être prouvé par les observations rapportées par Ptolomée, et la longueur de l'année qu'il met de 365 jours 5 heures 55 minutes, tandis qu'elle n'est aujourd'hui que de 365 jours 5 heures et 48 minutes, sembloit favoriser mon sentiment. Mais, après un examen plus mûr, on trouve que Ptolomée s'est trompé dans son année et qu'elle n'a pas été plus longue alors qu'aujourd'hui. Mais il est certain que le mouvement de la Lune est aujourd'hui un peu plus vif qu'il n'étoit autrefois, ce qui me paraît suffisant pour mon sentiment. Car puisque nous mesurons les années par le nombre des jours, qui nous assure que les jours sont aujourd'huy aussi longs qu'autrefois? En cas que les jours soyent devenus un peu plus courts, les ans le seroient aussi, quoiqu'ils continssent le même nombre de jours.

» J'ay l'honneur d'être avec un très-profond respect,

» Monsieur, etc.

» Berlin, ce 11 de may 1754. »

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WITTSTEIN (Dr Armin). — Zur Geschichte des Malfatti'schen Problems. — Nordlingen, Beck'sche Buchhandlung, 1878; 27 pages, 2 Pl.

L'auteur a déjà fait paraître, en 1871, une intéressante histoire du problème de Malfatti, qui traitait déjà assez complétement le sujet. Toutefois, à cette époque, il lui avait été impossible de consulter une certaine partie des sources originales, et comme, en outre, dans ces dernières années, de nombreux documents nouveaux se sont ajoutés aux anciens, l'auteur a eu raison d'ajouter à son travail le présent Appendice.

La première Partie contient exclusivement des compléments à ses anciens travaux; il y est question des solutions analytiques du problème par Lechmütz, Adams, Cayley, et de la démonstration géométrique que Hart a donnée de la célèbre construction de Steiner. Viennent ensuite les travaux effectués dans les sept dernières années : on doit mentionner ici la manière dont Mertens a traité le problème dans le cas des triangles sphériques; deux solutions algébrico-géométriques par Simons et Catalan; une seconde étude de Mertens, qui introduit de la manière la plus ingénieuse les quantités imaginaires; enfin un ensemble de recherches synthétiques, se rattachant immédiatement aux méthodes de Steiner, et auxquelles l'auteur consacre un paragraphe spécial. Cette revue commence par la démonstration de Mendthal, puis elle passe à celle de Schroeter, qui, selon M. Wittstein, « répond seule à l'intention de Steiner », et que, pour cette raison, il expose avec grands détails; il termine par les démonstrations analogues de Godt et d'Affolter, où il est fait un usage répété de la transformation par rayons réciproques. Une biographie sommaire de Malfatti sert à arrondir cette esquisse, écrite d'un style qui sent la recherche.

Le nom de Lechmütz se trouvant assez souvent cité dans ce passage et ailleurs, nous croyons devoir faire observer, pour ne pas laisser accréditer une méprise, que, dans le Traité publié par Lehmus, alors professeur à Berlin (*Die reine Mathematik und die mechanischen Wissenschaften,* Berlin, 1845), on trouve, pages 126-129, une solution trigonométrique de notre problème, que l'auteur

fait suivre de ces mots : « Cette solution a été déjà communiquée par l'auteur, en 1820, au professeur Gergonne, pour être insérée dans ses *Annales*. A l'impression, le nom de l'auteur a été transformé en *Lechmütz*. » S. GÜNTHER.

BILLWILLER (R.). — UEBER ASTROLOGIE. Vortrag gehalten von ROBERT BILLWILLER, Chef der schweiz. meteorol. Centralstation in Zürich. — Basel, Schweighauser'sche Buchhandlung, 1878; 33 pages.

Que non-seulement l'histoire générale de la civilisation, mais encore spécialement l'histoire des sciences mathématiques, ne puisse en aucune façon se dispenser de tenir compte de la superstition astrologique des anciens temps si l'on veut que certaines questions importantes ne restent pas à jamais sans réponse, c'est ce qu'aucun historien ne peut méconnaître. Nous savons donc gré à M. Billwiller d'avoir, par la publication en brochure de sa conférence populaire, contribué à attirer l'intérêt général sur ce point, qui n'est pas encore, à beaucoup près, apprécié à sa juste valeur. Après avoir exposé, dans une courte Introduction, la tendance de son discours, il nous dépeint le double caractère de la science des astres dans l'antiquité : d'un côté, c'était une science physique (principalement météorologique) dont le but était relativement raisonnable; d'autre part, c'était une doctrine purement arbitraire (l'Astrologie judiciaire) lorsqu'elle se mêlait de faire des prédictions sur le sort des hommes et des États. M. Billwiller, tout en reconnaissant Ptolémée comme l'auteur des *Apparentiæ stellarum*, défend énergiquement cet astronome contre l'imputation d'avoir écrit le Τετράβιβλος; ses conjectures sur le véritable auteur de ce méfait littéraire paraissent dignes d'attention. Passant aux Arabes, M. Billwiller développe les règles systématisées par les sages de cette nation pour l'établissement des horoscopes, et, à cette occasion, il apporte aussi quelques éclaircissements intéressants sur le *Wallenstein* de Schiller. Il précise ensuite le caractère de l'Astrologie du moyen âge, avec son influence sur la Chimie et la Médecine, et enfin il expose les conceptions géométrico-astrologiques créées par le génie original de Kepler, et à l'importance desquelles

il rend pleine justice. « Si de nos jours », dit-il (p. 29), « dans la Psychologie spéculative, dans celle d'Erdmann par exemple, nous rencontrons encore l'expression de *genius terrester,* nous ne devrons pas trop chercher chicane à l'idée de Kepler, quand, à une époque remplie de mysticisme, il parle de l'âme de la Terre. » Nous irons plus loin : nous prétendons, d'accord avec l'excellent essai de Förster, *Johann Kepler und die Harmonie der Sphären,* que le grand astronome ne doit être aucunement séparé de l'ingénieux astrologue, et qu'au contraire l'un entraîne l'autre.

S. GÜNTHER.

АНДРЕЕВЪ (К.-А.), профессоръ чистой математики въ Харьковскомъ университета. — О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ въ примѣненіи къ вопросу о построеніи кривыхъ линій [1].

(Traduit par M. Potocki.)

Le but de l'auteur est d'étudier le problème de la construction des courbes géométriques, en connaissant un nombre suffisant de leurs points. On trace les sections coniques à l'aide de deux faisceaux, entre les rayons desquels existe une dépendance projective ou uniforme. La question posée par l'auteur est : « Quelle modification faut-il faire subir à la méthode du tracé des sections coniques pour obtenir un procédé plus général pour tracer les courbes d'ordre supérieur ? »

Selon l'auteur, deux transformations sont possibles :

1° On peut modifier les éléments de formation, c'est-à-dire remplacer les faisceaux de droites par des formes géométriques plus compliquées, et laisser sans changement les relations projectives existant entre les faisceaux ;

2° Tout en considérant les faisceaux de droites, généraliser leur mode de dépendance.

---

(1) ANDRÉIEF (K.-A.), professeur de Mathématiques pures à l'Université de Kharkof, *Des affinités géométriques appliquées au problème de la construction des courbes.* (*Математ. Сборникъ,* t. IX, 166 pages, gr. in-8°; 1879).

Dans le premier cas, les courbes d'ordre supérieur seront formées à l'aide des faisceaux de courbes d'ordre inférieur, dont les éléments sont liés par l'affinité homographique.

La question a été déjà traitée à ce point de vue ([1]).

Quant à la généralisation du second genre, tout en étant simple et naturelle au point de vue analytique, elle présente de grandes difficultés au point de vue géométrique. En effet, si une courbe d'ordre supérieur est engendrée par l'intersection des rayons correspondants des deux faisceaux rectilignes liés par une affinité d'ordre supérieur (multiforme), on devrait arriver à une construction qui, pour chaque rayon d'un faisceau, détermine les rayons correspondants de l'autre. La difficulté existe dans l'établissement de cette construction, et c'est à cette difficulté qu'on doit attribuer le fait que la généralisation du dernier genre n'a pas conquis jusqu'à présent dans la Science le rang atteint par celle du premier genre.

Pour résoudre le problème de construction des courbes par points, problème que Chasles appelle *le problème fondamental de la théorie des courbes géométriques* ([2]), l'auteur considère comme le plus commode de définir les courbes géométriques comme engendrées par deux faisceaux rectilignes dont les éléments sont liés par une affinité multiforme.

Dans ce cas, le problème de la construction des courbes géométriques d'après la connaissance d'un nombre suffisant de leurs points est ramené à la construction des éléments correspondants de deux faisceaux rectilignes étant entre eux dans une affinité multiforme, et en connaissant un nombre suffisant de couples de ces éléments. Au lieu d'un problème particulier de la construction des courbes, on arrive ainsi au *problème plus général de la théorie géométrique des affinités d'ordre supérieur.*

Ce problème forme le principal objet du travail analysé. L'au-

---

([1]) Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*. Bologne, 1862, § 10.

De Jonquières, *Essais sur la génération des courbes géométriques*.

Hartenberger, *Ueber die Erzeugung geometrischer Curven*. (*Journal de Crelle*, t. 58).

([2]) Chasles, *Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points*. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVI).

teur considère le principe des affinités comme le principe fondamental de la Géométrie moderne. Dans la Géométrie synthétique, tout genre d'affinité ne peut être considéré comme déterminé que lorsque la construction qui le produit est connue.

Si à chaque élément d'une forme correspondent plusieurs éléments d'une autre, une telle affinité s'appelle *multiforme*. Le domaine des affinités multiformes présente encore un vaste champ à l'exploration. Le professeur Em. Weyr donne, dans son Ouvrage intitulé : *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde,* une définition géométrique précise de l'affinité monobiforme. En 1875, M. Andréief, dans un Ouvrage : *De la formation géométrique des courbes planes,* donna le premier essai d'une représentation géométrique de l'affinité biforme réciproque sous une forme tout à fait générale.

Dans le Mémoire actuel, l'auteur cherche à développer les principes géométriques généraux pour obtenir, à l'aide des constructions, les affinités multiformes telles que le nombre d'éléments de chaque forme, correspondants à un élément quelconque d'une autre forme, n'y dépasse pas quatre. Il parvient ainsi à construire sur un plan les courbes géométriques générales jusqu'au cinquième ordre, y compris plusieurs groupes de courbes, dont certaines propriétés particulières appartiennent aux courbes d'ordres plus élevés. Dans toute son exposition, l'auteur suppose connues les définitions géométriques et les propriétés principales des affinités collinéaires et corrélatives.

Le deuxième Chapitre est intitulé : *Affinité biforme réciproque des faisceaux et construction des courbes des troisième et quatrième ordres.* Dans ce Chapitre, l'auteur étudie la construction à l'aide de laquelle on peut déterminer, pour chaque rayon d'un faisceau, deux rayons correspondants d'un autre faisceau. L'auteur établit, entre l'affinité de deux faisceaux réciproquement biformes, déterminés par huit couples de rayons, une dépendance déterminée par l'affinité corrélative de deux plans. En appliquant l'affinité biforme à la construction des courbes, il résout le problème relatif à la dépendance de l'ordre de la courbe engendrée et des caractéristiques numériques de la multiplicité des affinités entre les faisceaux qui l'engendrent. Ici l'auteur cite le théorème connu :

Deux faisceaux de droites liés entre eux par une dépendance multiforme telle, qu'à chaque rayon du premier correspondent m' rayons du second, et réciproquement à chaque rayon du second faisceau correspondent m rayons du premier, engendrent une courbe d'ordre $m'+m$; les centres de cette courbe renferment des points multiples dont les multiplicités sont respectivement égales à m et m'.

La connaissance de la construction des rayons correspondants de deux faisceaux liés par l'affinité réciproquement biforme permet à l'auteur de résoudre les deux problèmes suivants :

1° *Construire une courbe du quatrième ordre en connaissant dix de ses points, dont deux doubles*;

2° *Construire une courbe du troisième ordre, en connaissant neuf de ses points.*

Le troisième Chapitre a pour objet l'exposition géométrique des transformations dites de Cremona et de leurs applications.

Après avoir donné une définition géométrique de la correspondance quadratique, c'est-à-dire de la transformation du deuxième degré de Cremona, et avoir exposé ses propriétés fondamentales, l'auteur donne un aperçu historique sur le développement graduel de la théorie des transformations au point de vue purement géométrique. Il indique l'affinité établie pour la première fois par Steiner (1) ou la projection gauche de Transon (2), et les définitions géométriques de cette affinité données par Seydewitz (3), Reye (4), Darboux (5), Hirst (6), etc.

---

(1) Steiner, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*. Berlin, p. 351; 1832.

(2) Transon, *De la projection gauche*. (*Nouvelles Annales de Mathém.*, t. IV, p. 285-393, 1865, et t. V, p. 63-70; 1866).

(3) Seydewitz, *Darstellung der geometrischen Verwandtchaften*. (*Grunert's Archiv*, t. VII, p. 113-148).

(4) Reye, *Geometrische Verwandtschaft zweiten Grades*. (*Zeitschrift für Math. und Ph.*, t. XI, p. 280-310; 1866).

(5) Darboux, *Sur un mode de transformation des figures*. (*Bull. de la Soc. Ph.*, t. XI, p. 72-80; 1868).

(6) Hirst, *On the quadric conversion of plane curves*. (*Proceedings of the Royal Soc.*; 1865).

Les transformations de Cremona d'ordres supérieurs se présentent comme dérivant de la répétition de la dépendance quadratique. La possibilité d'obtenir par ce procédé toutes les transformations de Cremona a été démontrée pour la première fois par Nöther (¹) et Rosanes (²), qui l'ont fait indépendamment l'un de l'autre. A propos des transformations de Cremona, on remarque que la construction donnée par Saltel (³) pour établir le principe appelé par lui *arguesien* n'est autre chose que la transformation du troisième degré de Cremona. On donne ensuite la généralisation de cette construction, déjà indiquée par Saltel.

Parmi les applications géométriques, la plus remarquable est celle qui est relative à la construction des courbes rationnelles ou unicursales. L'auteur démontre que, si une courbe de ce genre est déterminée par la connaissance d'un nombre suffisant de ses points, parmi lesquels se trouvent tous les points multiples donnés avec leur degré de multiplicité, tous les autres points de cette courbe peuvent être obtenus à l'aide d'une règle.

Une autre application consiste dans la recherche des points d'intersection de deux coniques sans tracer ces courbes. L'auteur donne deux procédés pour la solution de ce problème. Par le premier, la construction s'effectue à l'aide d'une règle et d'une courbe du troisième ordre et de troisième classe, située dans le plan d'une manière quelconque. Le second consiste dans l'emploi de la règle, du compas et d'une section conique située dans le plan d'une manière quelconque, mais autre que la circonférence ou deux droites.

Dans le quatrième Chapitre, l'auteur examine les systèmes linéaires des coniques. Le plus simple de ces systèmes est un faisceau. Vient après le réseau, c'est-à-dire un système linéaire contenant un nombre doublement infini de courbes. L'auteur appelle *réseau du deuxième genre* un système linéaire contenant un nombre triplement infini de courbes. De la même manière on formerait les réseaux de troisième, quatrième genre, etc.

(¹) Nöther, *Mathematische Annalen*, t. III; 1870.

(²) Rosanes, *Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen*. (*Journal de Crelle*, t. LXXIII, p. 97-110; 1871.)

(³) Saltel, *Sur l'application de la transformation arguesienne, etc.* (*Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique*, t. XXII; 1872).

Saltel, *Mémoire sur le principe arguesien unicursal*. (*Ibid.* t. XXIII; 1873).

Après avoir donné une définition géométrique rigoureuse des réseaux et indiqué leurs propriétés fondamentales, l'auteur résout quelques problèmes relatifs à la construction d'une conique, avec la condition que cette conique appartienne à un ou à plusieurs réseaux déterminés. Vient après l'étude des affinités entre les réseaux de sections coniques. En premier lieu, l'auteur examine les affinités collinéaires, et il démontre qu'une telle affinité entre deux réseaux de même espèce peut être entièrement déterminée à l'aide d'un nombre suffisant de couples de courbes et indique la construction qui permet de trouver, pour chaque conique d'un réseau, une conique correspondante de l'autre.

Après avoir remarqué que chaque réseau est un système auquel le principe de dualité s'applique, l'auteur passe à l'affinité réciproque entre les réseaux. Dans ce cas, à chaque point situé sur un plan de l'un des réseaux correspond une conique située dans le plan de l'autre. Deux points dont chacun se trouve sur une conique correspondante à l'autre s'appellent *conjugués*.

S'étant assuré d'abord que l'affinité réciproque de deux réseaux de coniques peut être déterminée à l'aide d'un nombre suffisant de couples d'éléments réciproquement correspondants, l'auteur démontre encore que chaque couple de ces éléments peut être remplacé par un nombre suffisant de couples de points conjugués. De là résulte la possibilité de déterminer l'affinité réciproque des réseaux simplement à l'aide d'un nombre suffisant de couples de points conjugués.

Le cinquième Chapitre est intitulé : *Affinité réciproque triforme et tétraforme de faisceaux; construction de courbes engendrées par deux faisceaux liés par l'affinité de ce genre.*

Ce Chapitre est principalement consacré à la construction des courbes géométriques. A l'aide d'une construction très-simple, l'auteur est parvenu à lier l'affinité réciproque de réseaux avec l'affinité entre deux faisceaux rectilignes, telle qu'à chaque rayon d'un faisceau correspondent au plus quatre rayons de l'autre, de manière que ces deux espèces d'affinités s'établissent l'une par l'autre.

Le lieu géométrique des points d'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux reliés par l'affinité nommée tout à l'heure est une courbe géométrique d'un ordre qui n'est pas su-

périeur à huit. On sait que Chasles a donné une méthode de construction d'une courbe du troisième ordre dont neuf points sont connus. M. de Jonquières a donné quelques principes particuliers pour la construction des courbes du quatrième ordre.

En définitive, le résultat du Mémoire analysé conduit à fournir une méthode très-générale de tracé des courbes du quatrième ordre déterminées par quatorze points, et des courbes du cinquième ordre déterminées par vingt points. En outre, l'auteur donne la construction de plusieurs formes particulières de courbes d'ordres supérieurs. Les moyens géométriques employés pour ces constructions sont les mêmes que les moyens employés pour la détermination des points d'intersection de deux sections coniques, c'est-à-dire une règle et une courbe fixe du troisième ordre et de la troisième classe, ou une règle, un compas et une conique fixe autre qu'une circonférence ou un système de deux droites.

Il importe d'ajouter que le Mémoire de M. Andréief est remarquable par la clarté de son exposition, la profondeur de vues et l'originalité des résultats qu'il contient.

N. Bougaïef.

KOENIGSBERGER (L.). — Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. — Leipzig, 1878. In-8°, 170 p.

Dans ces dernières années, M. Koenigsberger a publié dans divers Recueils mathématiques une suite de travaux sur les fonctions hyperelliptiques; il rend un véritable service à ceux qui s'occupent de ces matières en réunissant les résultats complétés et ordonnés de ses recherches en un Volume, qui formera une suite naturelle à ses Leçons classiques sur la théorie des fonctions elliptiques [1]; on y retrouvera les mêmes qualités d'ordre, de clarté et de concision.

Après avoir montré comment on peut, sur une surface de Riemann à deux feuillets, représenter la racine carrée d'un polynôme, et discuté les conditions nécessaires et suffisantes sur le nombre et la position des points critiques sur une telle surface pour l'existence

---

[1] Voir *Bulletin*, IX, 145.

d'une fonction rationnelle de z et de $\sqrt{R(z)}$, l'auteur définit les intégrales des trois espèces et établit leur forme, puis montre comment une intégrale hyperelliptique peut être déterminée par les conditions relatives à la discontinuité et aux périodes. L'auteur passe ensuite à la réduction de l'intégrale hyperelliptique générale aux intégrales des trois types normaux, étudie les coefficients de ces intégrales dans les formules de réduction, établit les relations entre les périodes de deux intégrales hyperelliptiques appartenant à la même irrationnalité, démontre le théorème d'Abel, traite le problème de la transformation dans sa généralité. Enfin, les deux derniers Chapitres sont consacrés, l'un aux intégrales hyperelliptiques qui se réduisent aux fonctions algébriques et aux transcendantes élémentaires, l'autre à la multiplication et à la division des intégrales hyperelliptiques.

MÉLANGES.

QUELQUES FORMULES FONDAMENTALES POUR L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU PREMIER ORDRE ET DU SECOND DEGRÉ ENTRE DEUX VARIABLES ET A INTÉGRALE GÉNÉRALE ALGÉBRIQUE (¹);

PAR F. CASORATI,
Professeur à l'Université de Pavie.

(TRADUIT PAR E. DEWULF.)

1. Représentons par a, b, c trois fonctions des variables u, v, et considérons la résultante de l'élimination de la constante arbitraire Ω entre

$$a\Omega^2 + 2b\Omega + c = 0 \tag{1}$$

et la différentielle

$$da\,\Omega^2 + 2\,db\,\Omega + dc = 0.$$

(¹) *Alcune formole fondamentali per lo studio delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e secondo grado tra due variabili ad integrale generale algebrica.* (Note lue dans la séance du 10 décembre 1874 de l'*Institut royal Lombard.*) Cette Note sera suivie d'applications.

Cette résultante est

$$(2)\qquad (c\,da - a\,dc)^2 - 4(a\,db - b\,da)(b\,dc - c\,db) = 0.$$

Posons

$$(3)\quad g = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix},\quad k = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix},\quad k^2 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_u & b_u & c_u \\ a_v & b_v & c_v \end{vmatrix};$$

le dernier déterminant est le déterminant à éléments réciproques, ou, en d'autres termes, celui du système adjoint au système des éléments de k.

La valeur de g permet de mettre (2) sous la forme importante

$$(2_2)\qquad (dg)^2 - 4g[da\,dc - (db)^2] = 0.$$

On a donc pour la résultante les deux expressions suivantes en du, dv :

$$(2_3)\qquad (b_v\,du - b_u\,dv)^2 - 4(c_v\,du - c_u\,dv)(a_v\,du - a_u\,dv) = 0,$$

$$(2_4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv\right)^2 - 4g\left[\left(\frac{\partial a}{\partial u}du + \frac{\partial a}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial c}{\partial u}du + \frac{\partial c}{\partial v}dv\right)\right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \left(\frac{\partial b}{\partial u}du + \frac{\partial b}{\partial v}dv\right)^2\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Par suite, en représentant la résultante par

$$(2_5)\qquad A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0,$$

on obtient pour A, B, C les deux systèmes d'expressions

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= \quad b_v^2 \quad - 4a_v c_v, \\ B &= - b_u b_v + 2a_u c_v + 2a_v c_u, \\ C &= \quad b_u^2 \quad - 4a_u c_u, \end{aligned}\right.$$

$$(4_1)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - 4g\left[\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u} - \left(\frac{\partial b}{\partial u}\right)^2\right], \\ B &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - 2g\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial u} - 2\frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v}\right), \\ C &= \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 - 4g\left[\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial v} - \left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)^2\right]. \end{aligned}\right.$$

Cherchons le rapport du déterminant

$$G = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \tag{5}$$

et de g. On tire des formules (4)

$$G = 4(a_u b_v - a_v b_u)(b_u c_v - b_v c_u) - 4(c_u a_v - c_v a_u)^2,$$

et des formules (3), d'après une propriété des déterminants à éléments réciproques,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial k^2}{\partial a_0} &= b_u c_v - b_v c_u = ka, \\ \frac{\partial k^2}{\partial b_0} &= c_u a_v - c_v a_u = kb, \\ \frac{\partial k^2}{\partial c_0} &= a_u b_v - a_v b_u = kc; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

le rapport cherché est donc exprimé par la formule remarquable [1]

$$\frac{G}{g} = 4k^2. \tag{7}$$

On peut introduire g et ses dérivées dans le déterminant k. Il résulte de cette opération trois formules que l'on obtient en exprimant les valeurs des inconnues c, $-2b$, a tirées du système des équations algébriques linéaires

$$\left\{\begin{aligned} & ca - 2bb + ac = 2g, \\ & c\frac{\partial a}{\partial u} - 2b\frac{\partial b}{\partial u} + a\frac{\partial c}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u}, \\ & c\frac{\partial a}{\partial v} - 2b\frac{\partial b}{\partial v} + a\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

---

[1] Cette formule, que j'ai trouvée en 1869 en faisant des recherches que je n'ai pu reprendre avant cette année, a été trouvée aussi par M. Catalan, sous la forme

$$B^2 - 4AC = (P^2 - 4Q)\left(\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx}\right)^2,$$

en faisant $a = 1$, dans l'élimination qu'il a eu à faire de la constante arbitraire c entre l'équation $c^2 + Pc + Q = 0$ et sa différentielle immédiate (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 4 juillet 1870).

et qui sont

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
ck &= \begin{vmatrix} 2g & b & c \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial b}{\partial u} & \dfrac{\partial c}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial b}{\partial v} & \dfrac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}, \\
-2bk &= \begin{vmatrix} a & 2g & c \\ \dfrac{\partial a}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial c}{\partial u} \\ \dfrac{\partial a}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}, \\
ak &= \begin{vmatrix} a & b & 2g \\ \dfrac{\partial a}{\partial u} & \dfrac{\partial b}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} \\ \dfrac{\partial a}{\partial v} & \dfrac{\partial b}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

2. Toutes les formules ci-dessus subsistent, quelle que soit la nature des fonctions a, b, c, mais elles acquièrent une plus grande importance quand on suppose que les fonctions a, b, c sont algébriques, rationnelles, entières. Dans cette hypothèse, il faut remarquer d'abord, parmi les conséquences de ces formules, celles que l'on rencontre en comparant entre eux les deux discriminants et le déterminant k.

Un facteur qui entre m fois dans g entre au moins $m - 1$ fois dans k. En effet, considérons, pour plus de simplicité, un facteur premier φ de ce facteur et qui y entre r fois : il entre $rm - 1$ fois dans chaque élément d'une colonne du second membre de chacune des formules (9), et, par suite, le facteur φ entrera $rm - 1$ fois dans chaque premier membre, c'est-à-dire dans k. Dans le cas où une puissance φ^μ de ce facteur diviserait simultanément a, b, c, le facteur $\varphi^{\mu-1}$ se trouverait dans les deux autres colonnes des seconds membres; on voit donc que φ doit entrer au moins $rm + \mu - 2 \geqq m - 1$ fois dans k, puisque φ^{rm-1}, $\varphi^{\mu-1}$, φ^μ et φ entrent respectivement dans les trois colonnes et dans la première ligne.

Mais de ce que des facteurs entrent dans k on ne peut pas conclure qu'ils entrent aussi dans g. En prenant, par exemple, une

fonction a contenant $\varphi^{\alpha+1}$ et une fonction b non divisible par φ, on aura φ^{α} dans k, et g ne sera pas divisible par φ.

En comparant g et k, on peut prendre $ba - c^2$ ou $cb - a^2$ au lieu de $ac - b^2$ comme valeur de g.

Puisque k entre deux fois dans G, il résulte du théorème ci-dessus que k divise le déterminant

$$(10) \qquad K = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \dfrac{\partial A}{\partial u} & \dfrac{\partial B}{\partial u} & \dfrac{\partial C}{\partial u} \\ \dfrac{\partial A}{\partial v} & \dfrac{\partial B}{\partial v} & \dfrac{\partial C}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

En désignant respectivement par

$$m, \quad m', \quad m''$$

les degrés de multiplicité d'un facteur premier dans

$$g, \quad k, \quad G,$$

la relation (7) donne

$$(11) \qquad m + 2m' = m'',$$

et de cette relation, combinée avec le théorème concernant g et k, on déduit les inégalités

$$(12) \qquad 3m' \geqq m'' - 1, \quad m'' \geqq 3m - 2, \quad m' \geqq m - 1.$$

Parmi les propositions ainsi écrites, il faut maintenant remarquer particulièrement les suivantes : *Tout facteur premier simple de* G *est facteur simple de g et ne divise pas k; tout facteur premier multiple de* G *est aussi facteur de k.*

3. Supposons maintenant que (1) soit l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(13) \qquad \alpha\, du^2 + 2\beta\, du\, dv + \gamma\, dv^2 = 0,$$

où α, β, γ représentent des fonctions rationnelles entières de u, v. En rapprochant cette équation de (25), on trouve

$$(14) \qquad A = \theta\alpha, \quad B = \theta\beta, \quad C = \theta\gamma,$$

d'où

$$(15)\qquad G = 4(ac-b^2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v}\end{vmatrix}^2 = \theta^2(\alpha\gamma-\beta^2),$$

et

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial C}{\partial u} \\ \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial B}{\partial v} & \frac{\partial C}{\partial v}\end{vmatrix} = \theta^3 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial u} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Dorénavant nous supposerons toujours que les fonctions α, β, γ sont premières entre elles. Il résulte de là que le facteur rationnel θ doit être entier.

En désignant par σ le discriminant de (13), c'est-à-dire en posant

$$(17)\qquad \sigma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

d'où

$$G = \theta^2\sigma,$$

nous écrirons (7) ou (15) comme il suit :

$$(18)\qquad 4gk^2 = \theta^2\sigma.$$

Il résulte de ce qui précède que *tout facteur premier de θ doit être facteur de k*. L'égalité

$$(19)\qquad \theta(\alpha\,du^2 + 2\beta\,du\,dv + \gamma\,dv^2) = (dg)^2 - 4g[da\,dc - (db)^2]$$

prouve qu'*un facteur qui entre une seule fois dans g ne divise pas θ*; car, s'il en était autrement, il devrait diviser dg ou les deux premières dérivées partielles de g, ce qui ne peut avoir lieu que pour des facteurs multiples de g. Pour ceux-ci, au contraire, l'égalité ci-dessus montre qu'*un facteur qui entre plusieurs fois dans g entre au moins autant de fois dans θ*.

En comparant σ et g, l'équation (18) nous montre que *tout facteur premier entre dans ces deux discriminants un nombre impair*

de fois ou entre dans ces deux discriminants un nombre pair de fois; ainsi, en particulier, *les facteurs qui entrent un nombre impair de fois sont les mêmes pour les deux discriminants.* Nous noterons aussi, par rapport à σ et k, que *tout facteur qui entre plusieurs fois dans σ entre aussi dans k.*

NOUVELLE THÉORIE DES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE ET DU SECOND DEGRÉ ENTRE DEUX VARIABLES;

Par M. F. CASORATI.

(Communication faite à l'Académie royale des Lincei, le 5 mars 1876) ([1]).

(TRADUIT PAR M. E. DEWULF.)

Les théories des équations différentielles généralement connues jusqu'à ce jour sont toutes plus ou moins incomplètes et même en partie inexactes, ainsi que l'a fait remarquer aussi M. Darboux à l'Académie des Sciences de Paris, il y a quelques années ([2]). Cette nouvelle théorie ne paraîtra donc pas inopportune, si, comme je le pense, elle résout complétement et exactement les questions qui se présentent ordinairement au sujet de ces solutions. Cette Communication ne vise que la classe la plus simple des équations susceptibles de solutions singulières; mais cette classe a par elle-même une très-grande importance dans l'Analyse pure et dans ses applications, et, en outre, on reconnaîtra dans cette Communication une bonne partie des idées qui doivent servir à l'étude des autres classes.

Les propositions que nous ne ferons qu'énoncer se démontrent brièvement en s'appuyant sur la Note : *Quelques formules fon-*

([1]) *Nuova teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali di primo ordine e secondo grado tra due variabili.* Communicazione del prof. F. Casorati, fatta alla Reale Accademia dei Lincei, il 5 marzo 1876.

([2]) *Sur la surface des centres de courbure des surfaces algébriques.* (*Comptes rendus* du 20 juin 1870). — *Réponse aux observations de M. Catalan.* (*Comptes rendus* du 25 juillet 1870).

damentales dans l'étude des équations différentielles algébriques, etc.

I.

Soit

$$(1) \qquad \alpha(u,v)\,du^2 + 2\beta(u,v)\,du\,dv + \gamma(u,v)\,dv^2 = 0$$

l'équation différentielle dont il s'agit, où $\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v)$ représentent des fonctions de u et v, *rationnelles, entières et premières entre elles*. Supposons que cette équation soit irréductible, c'est-à-dire qu'elle ne se décompose pas en deux équations *différentielles* aussi rationnelles en u, v, du, dv, et qu'elle admette une primitive complète algébrique; cette primitive pourra se mettre sous la forme

$$(2) \qquad a(u,v)\Omega^2 + 2b(u,v)\Omega + c(u,v) = 0,$$

où $a(u,v)$, $b(u,v)$, $c(u,v)$ représentent des fonctions de u, v rationnelles, entières et premières entre elles, et où Ω est la constante arbitraire.

En éliminant Ω entre cette primitive et sa différentielle immédiate

$$da\,.\,\Omega^2 + 2\,db\,.\,\Omega + dc = 0,$$

on trouve la résultante

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ da & 2db & dc & 0 \\ 0 & da & 2db & dc \end{vmatrix} = 0,$$

qui doit être le produit de (1) par une fonction

$$\theta(u,v)$$

rationnelle entière, qui peut être une constante.

Si une fonction $\Phi(u,v)$ rationnelle entière en u, v et non décomposable en facteurs aussi rationnels, égalée à zéro, donne une équation de laquelle il résulte que (3) est satisfaite sans que (1) le soit, cette fonction doit être un facteur de θ, et, si l'on veut, on pourra dire que l'équation $\Phi = 0$ est une solution de (3), mais *impropre*. Une solution de cette équation ne devant être dite *propre* que

quand elle est aussi une primitive de (1), l'équation (1) ne peut se réduire à une identité qu'en ayant recours à la différentielle de la primitive.

Dans une équation rationnelle entière $E(u, v) = 0$ qui se présente comme solution d'une équation différentielle, il est important de distinguer les diverses équations rationnelles entières des degrés les plus bas dans lesquelles elle peut se décomposer. Quelques-unes de ces équations pourront ne pas satisfaire à l'équation différentielle; chacune des autres donnera une solution *simple*. Si ces dernières sont $S_1(u, v) = 0$, $S_2(u, v) = 0$, ..., l'équation $E = 0$ pourra être dite *solution composée* de ces solutions simples.

Nous nommerons *particulière*, suivant l'usage général, une solution ou primitive ou intégrale de (1) quand elle se confond avec une équation déduite de (2), en y mettant pour Ω un nombre particulier, ou quand elle est un facteur de cette équation, et *singulière* toute autre solution.

Dans les anciennes théories des solutions singulières, on affirmait, d'une manière plus ou moins différente, que l'on pouvait obtenir ces solutions en égalant à zéro l'un ou l'autre des discriminants

$$\sigma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}, \quad g = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix},$$

sans tenir un compte suffisant du rapport entre ces deux discriminants, et sans faire une distinction suffisamment détaillée entre les différents facteurs en lesquels ils peuvent se décomposer. Cette distinction est indispensable, car ces facteurs se comportent diversement, suivant leurs divers degrés de multiplicité dans les deux discriminants, ce que les raisonnements les plus usités jusqu'ici ne faisaient même pas soupçonner.

D'après la relation

$$\theta^2 \sigma = 4 k^2 g,$$

qui a lieu entre σ, g, θ et le déterminant

$$k = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{da}{du} & \dfrac{db}{du} & \dfrac{dc}{du} \\ \dfrac{da}{dv} & \dfrac{db}{dv} & \dfrac{dc}{dv} \end{vmatrix},$$

il est manifeste que les facteurs rationnels et premiers, ou indécomposables, qui entrent un nombre *impair* de fois dans σ, entrent aussi un nombre impair de fois dans g. En tenant compte de cette observation, nous distinguerons les facteurs en sept espèces, et en désignant respectivement par p, q, r, σ, x, y, z un facteur quelconque de chaque espèce, nous exprimerons la composition de g et σ comme il suit :

$$(5)\qquad \begin{cases} g = p \ldots q \ldots r^{2\mu+1} \ldots s^{2\nu+1} \ldots x^{2\xi} \ldots y^{0} \ldots z^{2\zeta}, \\ \sigma = p \ldots q^{2\lambda+1} \ldots r \ldots s^{2\rho+1} \ldots x^{0} \ldots y^{2\eta} \ldots z^{2\omega}, \end{cases}$$

λ, μ, ν, ρ, ξ, η, ζ, ω représentant des nombres entiers *plus grands que zéro*. Et l'on entend qu'il peut exister plusieurs facteurs de chaque espèce, par exemple x_1, x_2, ... avec les exposants $2\xi_1$, $2\xi_2$, ... L'exposant o de x veut dire que cette espèce de facteurs manque toujours dans σ, et, s'il n'y en avait pas non plus dans g, x serait une constante.

Voici maintenant le *résumé* de la manière dont chacune de ces espèces de facteurs se comporte par rapport à (1). Nous indiquerons aussi quels facteurs divisent le multiplicateur θ, c'est-à-dire donnent (en les égalant à zéro) des solutions de (3) qui sont impropres si elles ne satisfont pas à (1), et quels facteurs divisent le déterminant k.

1° *Les facteurs p donnent toutes les solutions singulières et ne donnent qu'elles. Ils n'entrent ni dans θ ni dans k.*

2° *Les facteurs q donnent toujours des solutions particulières. Ils n'entrent pas dans θ, ils entrent dans k.*

3° *Les facteurs r ne donnent jamais de solutions. Ils entrent dans θ et dans k.*

4° *Les facteurs s ne donnent pas, en général, de solutions, et, quand ils en donnent, elles sont particulières. Ils entrent dans θ et dans k.*

5° *Les facteurs x ne donnent jamais de solutions. Ils entrent dans θ et dans k.*

6° *Les facteurs y ne donnent pas, en général, de solutions ; celles qu'ils peuvent donner sont particulières. Ils n'entrent pas dans θ, ils entrent dans k.*

7° *Les facteurs z ne donnent pas, en général, de solutions, et,*

quand ils en donnent, elles sont particulières. Ils entrent dans ϑ *et dans* k.

Quoique les propositions qui constituent la partie purement analytique de notre théorie des solutions singulières pour les équations de la classe (1) se trouvent toutes dans le résumé précédent, nous pensons qu'il ne sera pas superflu de les énoncer de la manière suivante :

Théorème. — *Les équations que l'on obtient en égalant à zéro les différents facteurs premiers qui entrent une seule fois dans les deux discriminants des équations différentielle et intégrale sont toutes des primitives singulières, et il n'y en a pas d'autres.*

Ce théorème ne donne que la solution d'un des problèmes fondamentaux de la théorie, celui qui consiste à déduire les primitives singulières de la primitive complète. La solution du second problème, celui de déduire ces primitives de l'équation différentielle, découle de cet autre théorème :

Théorème. — *Parmi les facteurs premiers et simples du discriminant de l'équation différentielle, ceux qui égalés à zéro satisfont à l'équation elle-même en donnent toutes les primitives singulières, et ils ne donnent qu'elles.*

Il s'agit toujours, bien entendu, de l'équation différentielle du second degré.

Théorème. — *Tout facteur premier et simple de* g *donne une primitive de* (1).

Théorème. — *Un facteur multiple de* g *ne donne, en général, qu'une solution impropre de* (3), *et, quand il donne une solution propre, elle est particulière.*

Théorème. — *Parmi les facteurs premiers et simples de* g, *ceux qui sont multiples dans* σ *donnent des primitives particulières de* (1), *et, réciproquement, ceux qui donnent des primitives particulières de* (1) *sont multiples dans* σ.

Pour σ isolément :

Théorème. — *S'il y a des solutions de* (1) *qui correspondent à*

des facteurs de σ, elles sont singulières quand elles correspondent à des facteurs simples, particulières quand elles correspondent à des facteurs multiples.

Pour k :

Théorème. — *Les facteurs de g et de σ qui donnent des solutions singulières ne divisent pas k, tandis que tous les autres facteurs le divisent.*

II.

Quittons maintenant le champ de l'Analyse pure et entrons dans celui de la Géométrie, pour chercher, en nous appuyant sur les propriétés exposées, quelle est la signification que prennent les divers facteurs des deux discriminants dans l'interprétation géométrique ordinaire des équations différentielle et intégrale.

Cette interprétation consiste à considérer (2) comme l'équation en coordonnées cartésiennes u, v d'une famille de lignes L dans un plan, chacune d'elles correspondant à une valeur particulière de Ω. Par tout point (u_0, v_0) du plan passent deux *individus* L_1 et L_2 de cette famille; ce sont les deux lignes qui correspondent aux valeurs Ω_1 et Ω_2 de Ω qui sont les racines de l'équation

$$(6) \qquad a(u_0, v_0)\Omega^2 + 2b(u_0, v_0)\Omega_0 + c(u_0, v_0) = 0,$$

et dont les tangentes ou directions $(du : dv)_1$ et $(du : dv)_2$ en ce point sont données par l'équation

$$(7) \qquad \alpha(u_0, v_0)\,du^2 + 2\beta(u_0, v_0)\,du\,dv + \gamma(u_0, v_0)\,dv^2 = 0.$$

Pour tout point du lieu $g = 0$, les racines Ω_1 et Ω_2 sont égales entre elles, et, par suite, les lignes L_1, L_2 se confondent; pour tout point du lieu $\sigma = 0$, les deux tangentes se confondent.

En supposant que les coefficients des fonctions a, b, c, et par suite ceux des fonctions α, β, γ, soient réels, les régions du plan où il existe des lignes réelles de la famille (2) sont celles dont les points (u_0, v_0) donnent des racines réelles aux équations (6) et (7), c'est-à-dire celles pour lesquelles $g \leqq 0$, $\sigma \leqq 0$. Lorsque, dans le mouvement du point (u_0, v_0), ces discriminants passent de valeurs

négatives à des valeurs positives, les racines de ces équations cessent d'être réelles. Les équations des confins entre les régions de réalité et celles de non-réalité s'obtiennent en égalant à zéro les facteurs qui entrent un nombre *impair* de fois dans g, ou, ce qui revient au même, dans σ.

En tenant présentes à l'esprit ces conclusions et les propositions du *résumé*, il est assez facile de trouver la signification de chacune des équations $p = 0, \ldots, q = 0, \ldots, z = 0, \ldots$.

1° Imaginons que le point (u_0, v_0) partant de l'intérieur des régions de réalité parvienne en un point quelconque d'une ligne $p = 0$. Les racines Ω_1 et Ω_2 deviennent égales, et les individus L_1 et L_2 viennent se confondre en un seul individu L, qui touchera en ce point le confin $p = 0$ de réalité, mais sans le traverser et sans pouvoir se confondre avec lui, car $p = 0$ n'est jamais un individu ou une partie d'individu de la famille (2). Donc, $p = 0$ *est l'enveloppe de toutes les séries de lignes* L *ou de quelques-unes de ces séries.*

2° Au contraire, toute ligne de l'espèce $q = 0$ étant intégrale particulière, c'est-à-dire une ligne ou portion de ligne L, si le *point courant* (u_0, v_0) parvient à une ligne $q = 0$, les deux *branches courantes,* c'est-à-dire les branches de L_1 et L_2 qui passent par (u_0, v_0) viennent se confondre en une même branche de $L_1 = L_2$ qui sera la ligne $q = 0$ elle-même. Cette ligne, étant aussi un confin de réalité, peut être considérée comme une vraie *limite vers laquelle tendent les branches courantes* quand (u_0, v_0) tend vers ce confin.

Exemple :

$$[v\,du - (u + 2v)\,dv]^2 + 16v^3(u + v)\,dv^2 = 0, \quad \sigma = 16(u + v)v^3,$$

$$(\Omega + v^2)^2 + v(u + v) = 0, \quad g = v(u + v), \quad h = 2v^2, \quad \theta = 1.$$

La ligne $p = u + v = 0$ enveloppe réellement toutes les L correspondant à des valeurs négatives de Ω. La ligne $q = v = 0$ est une portion de celle en laquelle se confondent L_1 et L_2 quand (u_0, v_0) atteint $v = 0$.

3° Quand (u_0, v_0) parvient à une ligne $r = 0$, les branches courantes deviennent des branches de la ligne unique L, en laquelle se confondent L_1 et L_2, branches qui se toucheront sur $r = 0$, mais

sans traverser ni toucher cette ligne, puisque $r = 0$ ne satisfait pas à l'équation différentielle. Donc $r = 0$ *est le lieu des points de rebroussement des lignes* L.

Exemple :

$$4du^2 - gvdv^2 = 0, \quad \sigma = -36v,$$
$$(u - \Omega)^2 - v^3 = 0, \quad g = -v^3, \quad k = 3v^2, \quad \theta = -v^3.$$

Les lignes L sont les lieux successivement occupés par l'une d'entre elles qui court parallèlement à l'axe des u; $u^2 - v^3 = 0$ a un point cuspidal à l'origine, et, par suite, l'axe des u, c'est-à-dire $r = v = 0$, est le lieu de ces points cuspidaux.

4° Pour une $s = 0$, si l'équation différentielle n'est pas satisfaite, ce que nous avons dit pour $r = 0$ est vrai; si l'équation différentielle est satisfaite, ce que nous avons dit pour $q = 0$ est vrai.

Exemple de $s = 0$ ne satisfaisant pas à l'équation différentielle :

$$4(du + dv)^2 + 25v^3dv^2 = 0, \quad \sigma = 100v^3,$$
$$(\Omega + u + v)^2 + v^5 = 0, \quad g = v^5, \quad k = 5v^4, \quad \theta = v^5.$$

Les lignes L sont les lieux que pourrait occuper successivement l'une d'elles en courant parallèlement à l'axe des u. Cet axe $s = v = 0$ est parcouru par le point cuspidal de cette ligne.

Exemple de $s = 0$ satisfaisant à l'équation différentielle :

$$(vdu + 3udv)^2 + 16uvdv^2 = 0, \quad \sigma = 16uv^3,$$
$$(\Omega + v^2)^2 + uv^3 = 0, \quad g = uv^3, \quad k = -2v^4, \quad \theta = v^4.$$

Si (u_0, v_0) tend vers un point de $s = v = 0$, les branches courantes tendent à se confondre avec la branche $v = 0$ de L

$$(L_1 = L_2 = v^4 + uv^3 = 0)$$

correspondant à la racine double $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. Quant à $p = u = 0$, elle enveloppe réellement les L qui correspondent aux valeurs négatives de Ω.

5° Un facteur qui entre un nombre pair de fois dans g ou dans s ne donne pas de lignes faisant partie des confins de réalité des L. Donc, en particulier, une $x = 0$ peut s'étendre à l'intérieur et à l'extérieur de ces régions. Si le point (u_0, v_0) parvient à une $x = 0$

dans les régions de réalité, les branches courantes deviennent des branches d'une seule L; elles ne se touchent pas entre elles, puisque s ne s'annule pas. Cette L aura là un nœud; mais, dans les régions de non-réalité, le nœud est remplacé par un point isolé. En somme, $x = 0$ *est le lieu des nœuds ou des points isolés des* L.

Exemple :

$$(2v\,du + u\,dv)^2 + 4v\,dv^2 = 0, \quad \sigma = 16v^3,$$
$$(\Omega + v)^2 + vu^2 = 0, \quad g = vu^2, \quad k = -2uv, \quad \theta = u^2.$$

Toute L qui correspond à une valeur positive de Ω a un nœud dans la portion de droite $x = u = 0$ contenue dans la région $s < 0$; toute L qui correspond à une valeur négative de Ω a un point isolé dans l'autre portion de cette droite. Quant à la ligne $q = v = 0$, elle fait partie de la L correspondant à $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ et est asymptote des branches de L qui tendent vers elle quand (u_0, v_0) s'en approche.

6° Quand (u_0, v_0) parvient en un point d'une ligne $y = 0$ dans l'intérieur de la région de réalité, les branches courantes ne cessent pas d'appartenir à deux individus différents L_1 et L_2, mais leurs directions y coïncident. Donc, si l'équation différentielle n'est pas satisfaite, $y = 0$ *sera le lieu des contacts entre les* L. Quand, au contraire, $y = 0$ satisfait à l'équation différentielle et est, par suite, elle-même une branche de la famille (2), les branches courantes non-seulement se touchent, mais elles se confondent entièrement avec $y = 0$, une seule d'entre elles ne pouvant en rester distincte. La $y = 0$ appartiendra à deux L différentes.

Exemple de $y = 0$ ne satisfaisant pas à l'équation différentielle :

$$(2v^2 + 1)du^2 + (u^2 + v^2 + 2uv + 2)du\,dv + (2u^2 + 1)dv^2 = 0,$$
$$\sigma = \tfrac{1}{4}(v - u)^2(4 - u^2 - v^2 - 6uv),$$
$$\Omega^2 + (u + v)\Omega + 1 - uv = 0, \quad g = \tfrac{1}{4}(4 - u^2 - v^2 - 6uv),$$
$$k = \tfrac{1}{2}(v - u), \quad \theta = 1.$$

Les L sont des hyperboles équilatères, dont l'axe transverse est sur la droite $y = v - u = 0$, qui se touchent aux sommets dont cette droite est le lieu. Elles sont enveloppées par

$$p = 4 - u^2 - v^2 - 6uv = 0.$$

Exemple de $y = 0$ satisfaisant à l'équation différentielle :

$$(v - 8u + 8u^3)v\,du^2 + 2(v - 4u - 4u^3)u\,du\,dv + u^2 dv^2 = 0,$$

$$\sigma = 16u^4[uv - (1 + u^2)^2],$$

$$\Omega^2 + 2u^2\Omega + uv - 2u^2 - 1 = 0,$$

$$g = uv - (1 + u^2)^2, \quad k = 2u^2, \quad \theta = 1.$$

La droite $y = u = 0$ appartient aux deux L qui correspondent aux valeurs -1 et $+1$ de Ω. Quant à la ligne $p = uv - (1 - u^2)^2 = 0$, elle enveloppe réellement les L qui correspondent aux valeurs négatives de Ω.

7° Enfin, quand (u_0, v_0) parvient à une $z = 0$, les branches courantes deviennent des branches de la L où viennent coïncider entre elles L_1 et L_2, et, puisque les tangentes à ces branches viennent aussi se confondre, nous concluons que $z = 0$ *est le lieu des contacts entre deux branches d'une même* L. Par suite, si l'équation différentielle est satisfaite, la $z = 0$ sera une ligne où les deux branches dont nous venons de parler, non-seulement se touchent, mais se confondent.

Exemple de $z = 0$ ne satisfaisant pas à l'équation différentielle :

$$4(1 + v)du^2 - v^2(4 + 5v)^2 dv^2 = 0, \quad \sigma = -4v^2(1 + v)(4 + 5v)^2,$$

$$(\Omega + u)^2 - v^4 - v^3 = 0, \quad g = -(1 + v)v^4,$$

$$k = -(4 + 5v)v^3, \quad \theta = -v^4.$$

Les L sont les lieux que peut successivement occuper une de ces courbes courant parallèlement à l'axe des u. Pour $\Omega = 0$, la L est symétrique par rapport à l'axe des v et a la forme d'une boucle qui s'élargit depuis $v = 1$ jusqu'à $v = -\frac{4}{5}$, puis se resserre et forme à l'origine la singularité que M. Cayley nomme *tacnœud* et qui s'étend enfin en deux branches infinies dans la région $v > 0$. Quand L se déplace, le tacnœud décrit la droite $z = v = 0$, et le point du minimum $v = -1$ décrit l'enveloppe $p = 1 + v = 0$; les points de u maximum et minimum décrivent la droite

$$y = 4 + 5v = 0,$$

sur laquelle se touchent, par conséquent, les diverses positions de la ligne mobile.

Exemple de $z = 0$ satisfaisant à l'équation différentielle :

$$v^2 du^2 + 4uv\,du\,dv + 4u(u+1)dv^2 = 0, \quad \sigma = 4uv^2,$$

$$\Omega^2 + 2v\Omega + v^2(u+1) = 0, \quad g = uv^2, \quad k = -v^2, \quad \theta = v^2.$$

La droite $z = v = 0$ fait partie de la ligne $v^2(u+1) = 0$ où, pour $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, L_1 et L_2 viennent se confondre.

Ce qui précède jette aussi une grande lumière sur les propriétés de la jacobienne $k = 0$; mais, pour ne pas dépasser les limites d'une simple Communication, nous laisserons de côté, pour le moment, les observations relatives à ce lieu. Nous ne dirons rien non plus du lieu $\theta = 0$, et, à plus forte raison, des autres particularités intéressantes dont le nombre et la variété, comme on le voit immédiatement, se multiplient à mesure que l'on approfondit le sujet en subdivisant les singularités. Nous ajouterons cependant quelques remarques très-courtes sur les Notes de M. Darboux citées plus haut, sans vouloir en diminuer la valeur, que nous estimons très-grande; nous voulons rendre encore plus manifeste combien M. Darboux a eu raison de donner l'éveil sur la prétendue exactitude des théories des solutions singulières.

La condition (3) de la page 267 (*Comptes rendus* du 25 juillet 1870) est satisfaite par les équations de l'espèce $p = 0$, comme cela se voit sur-le-champ; elle ne l'est pas par celles des espèces $r = 0$, $x = 0$. Les dérivées de R, c'est-à-dire $\frac{d\sigma}{du}$, $\frac{d\sigma}{dv}$, s'annulent, en même temps, avec des facteurs des espèces q, s, y, z. Par suite, la distinction des cas faite aux n°s 1, 2, 3 de la page 268 doit être complétée suivant notre analyse. Le cas des points cuspidaux correspond seulement aux facteurs des espèces r, s.

Ce qui est écrit dans les lignes 8-14 exige une correction. Notre analyse fait voir que même dans cette condition les enveloppes peuvent faire défaut; nous avons voulu donner un exemple de cela dans les deuxième, troisième et cinquième cas particuliers.

Enfin, relativement à ce qui est dit de la courbe (R) ou σ dans les lignes 5-8 de la page 270, nous réclamons la nécessité de distinguer les parties de (R) qui correspondent aux facteurs qui en-

trent dans R un nombre *impair* de fois des autres parties qui ne constituent pas des confins de réalité des lignes données par les primitives particulières (¹).

NOTE SUR LA DÉCOUVERTE DES PLANÈTES INTRA-MERCURIELLES PENDANT L'ÉCLIPSE DU 29 JUILLET 1878;

Par M. G. RAYET.

Les éclipses totales de Soleil de 1868, 1869 et 1870 ont jeté une vive lumière sur la constitution physique du Soleil, des protubérances, de la couronne et des gloires qui paraissent envelopper la Lune à l'instant de la totalité; pour ce qui concerne la constitution physique du Soleil et des protubérances, il semble même qu'il y ait aujourd'hui plus à attendre d'observations précises, entreprises et longuement continuées dans des circonstances atmosphériques particulièrement favorables, que de remarques rapides, faites à la hâte pendant le temps toujours très-court de l'obscurité totale. En ce qui regarde la couronne et les gloires, les astronomes sont plus éloignés d'une solution satisfaisante aux questions posées, et, pendant longtemps encore, il y aura intérêt à ne négliger aucune des occasions où ces phénomènes lumineux peuvent être étudiés.

Les instructions que M. Harkness avait préparées, au nom de l'Observatoire naval de Washington (²), pour l'observation de l'éclipse totale du 29 juillet 1878, portent la trace de ces préoccu-

---

(¹) Nous ferons observer que les Notes nécessairement très-courtes des *Comptes rendus* ne pouvaient donner qu'un abrégé de notre théorie. L'auteur ne paraît pas connaître le travail plus étendu que nous avons publié au tome IV du *Bulletin*, où nous nous sommes placé, du reste, à un point de vue tout différent de celui qu'il a adopté dans le travail que nous reproduisons. M. Casorati a traité, et, selon nous, avec beaucoup de succès et d'intérêt, la question des solutions singulières, en admettant que l'on connaît à la fois l'équation différentielle et l'intégrale générale; pour nous, au contraire, sauf à la fin du Mémoire précédemment cité, nous avons traité cette question en supposant que l'on connaît seulement l'équation différentielle. Il y a une grande différence entre ces deux manières d'envisager le problème. G. D.

(²) *Instructions for observing the total Solar Eclipse of July* 29, 1878. 1 br. in-4°. Washington, 1878.

pations. L'auteur s'étend longuement sur les observations de la couronne à faire à l'œil nu et sur les procédés propres à en obtenir une représentation correcte, sur les observations photographiques et aussi sur les observations spectroscopiques; les essais doivent, dans ce cas, être dirigés vers la recherche de la couche de Young (couche dans laquelle le spectre ne présente aucune ligne ni brillante ni obscure) et vers l'étude du spectre propre de la couronne.

Mais ce qui distingue surtout des instructions antérieures celles préparées par l'Observatoire de Washington, c'est l'existence d'une Carte donnant pour les régions voisines du Soleil la position de toutes les étoiles jusqu'à la 7e grandeur, Carte dressée en vue de la recherche de la planète ou des planètes intra-mercurielles dont l'existence probable avait été signalée il y a longtemps déjà par Le Verrier.

Il semble que ces planètes, auxquelles Le Verrier attribue l'accélération du mouvement du périhélie de Mercure, devraient avoir été observées souvent pendant leurs passages devant le Soleil; il n'en est rien cependant, et les observations de cette nature que l'on retrouve çà et là dans les Recueils astronomiques sont difficiles à concilier entre elles, inexactes ou même fausses. L'existence réelle de ces corps pouvait donc, il y a quelques mois encore, être mise en doute, mais aujourd'hui les observations de MM. Watson et Swift ne laissent aucune incertitude sur le fait de l'existence de deux planètes plus voisines du Soleil que Mercure.

Au sujet des observations faites par lui à Denver (Colorado) le 29 juillet, M. Watson écrivait d'Ann-Arbor le 13 août (¹) :

« ... La lunette dont je me suis servi est un excellent réfracteur d'Alvan Clark, ayant un objectif de 4 pouces, un oculaire grossissant 45 fois et monté équatorialement. L'instrument se trouvant dépourvu de cercles, j'avais placé sur ses axes des disques de bois, recouverts d'un carton et mobiles devant des repères fixes, en sorte que par un trait de crayon il était possible de marquer à tout instant la position de l'instrument....

» ... Immédiatement après la totalité, je commençai à balayer le ciel à l'est et à l'ouest du Soleil jusqu'à environ 8°.

(¹) *Astronomische Nachrichten*, t. XCIII, p. 161 et suiv. (numéro du 22 septembre 1878).

Le premier balayage fut vers l'est. Au cinquième, je trouvai entre le Soleil et θ de l'Écrevisse, et en outre au sud, une étoile de $4\frac{1}{2}$ grandeur (d'après une estime faite au moment même) qui attira immédiatement mon attention en raison de son apparence générale. J'avais dans la mémoire la position relative des étoiles voisines du Soleil et j'avais placé devant moi, de manière à pouvoir y recourir aisément, la Carte de la région. L'objet que j'avais dans le champ brillait d'une vive lumière rouge et avait certainement un disque plus large que le disque factice d'une étoile. Je marquai donc sa position sur les cercles de carton et je notai l'heure de l'observation; cet objet est désigné par a. Quelques instants avant, j'avais marqué la position de la lunette dirigée vers le Soleil. L'objet ne présentait aucun allongement, comme cela aurait dû être si cela avait été une comète. Les balayages furent alors continués, et finalement j'amenai dans le champ ce que je supposais être ζ de l'Écrevisse, quoique l'astre fût plus brillant que δ de l'Écrevisse, que j'avais vu auprès du Soleil au commencement des recherches faites pendant la totalité. Je déterminai alors la position de cet astre en le désignant par b. L'opération était à peine terminée, que l'éclipse totale prenait fin. »

M. Watson note alors de nouveau la position du Soleil et s'assure que l'instrument n'a pas été dérangé pendant les observations.

M. Watson indique ensuite comment, de retour à Ann-Arbor, il a déterminé, à l'aide de cercles gradués et avec tout le soin nécessaire, les angles dont son instrument avait dû tourner pour passer du Soleil au corps a et au corps b. De ces mesures ainsi que de l'heure des pointés il résulte [1] que ces deux astres avaient les positions suivantes :

Temps moyen.	Washington.	Objet.	α app.	δ app.
	h m s		h m s	° ′
1878. Juillet 29	5.16.37	a	8.27.24	+ 18.16
» 29	5.17.46	b	8. 9.24	+ 18. 3

« Je dois dire », ajoute M. Watson dans cette dernière Lettre

(1) *Astronomische Nachrichten*, t. XCIII, p. 191 (numéro du 27 septembre 1878). — Les *Astron. Nachr.* du 22 septembre renfermaient déjà des positions des corps a et b, moins exactes, toutefois, que celles renfermées dans le numéro actuel.

(datée du 2 septembre), « que j'ai vu à la fois *a* et θ Écrevisse et que le premier objet était d'une grandeur entière, ou même plus, plus lumineux que le second.... L'objet *b* était plus brillant que *a*, et je puis assurer que c'était aussi une étoile nouvelle. Que ces deux objets soient oui ou non des planètes intra-mercurielles, c'est ce qui sera décidé plus tard. Mon opinion est que ce sont des planètes. »

Dans une dernière Communication, datée d'Ann-Arbor, 17 septembre (¹), M. Watson établit enfin que, pendant la durée de l'éclipse, aucun coup de vent n'a pu déranger son instrument, et que l'éclat de la planète *a* était, le 29 juillet, celui d'une belle étoile de 4ᵉ grandeur; quant à la planète *b*, plus brillante que la première, son intensité lumineuse était celle d'un astre de 3ᵉ grandeur.

Les Lettres du célèbre astronome d'Ann-Arbor que renferment les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris (²) sont, en général, moins détaillées que ses Communications aux *Astr. Nachr.*; aussi c'est le journal du Dʳ Peters que j'ai cru devoir suivre dans mon récit.

Quant aux observations faites à Denver par M. L. Swift, elles sont consignées dans une Lettre écrite par lui de Rochester le 5 août (³) :

« J'avais », dit-il, « une lunette achromatique de $4\frac{1}{2}$ pouces avec un oculaire grossissant 25 fois et donnant un champ de 1°30′. Environ une minute après la totalité, j'ai observé deux étoiles, dont la distance au Soleil a été estimée à 3° vers le sud-ouest, et disposées suivant une ligne dirigée vers le Soleil; ces étoiles étaient environ de 5ᵉ grandeur, leur éclat dans la lunette étant analogue à celui de la polaire vue à l'œil nu.... Je les ai vues trois fois.... A chaque observation, elles m'ont paru exactement de la même grandeur et toutes deux aussi rouges que Mars. J'ai cherché si elles scintillaient, mais elles étaient aussi dépourvues de scintillation que la planète Saturne. Toutes les deux m'ont paru avoir un petit disque rond, assez semblable à celui d'Uranus. »

Dans un autre paragraphe, M. Swift ajoute que, quoique l'une

(¹) *Astronomische Nachrichten*, t. XCIII, p. 239 (numéro du 14 octobre 1878).

(²) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, p. 229, 376, 514, 552 et 786.

(³) *Astronomische Nachrichten*, t. XCIII, p. 164 (numéro du 22 septembre 1878).

des deux étoiles puisse être θ de l'Écrevisse, il ne serait cependant pas étonné que l'on vînt à reconnaître que toutes deux sont des planètes.

Les témoignages indépendants de MM. Watson et Swift, ainsi que les détails précis de leurs observations, ne peuvent laisser aucun doute sur l'existence de deux ou au moins d'une planète intra-mercurielle. Mais ces planètes sont-elles celles que quelques observateurs pensent avoir vu passer devant le Soleil dans des années antérieures? C'est ce qu'il importe d'examiner et ce qui a été recherché par M. Gaillot.

On sait que, parmi les passages supposés de la planète intra-mercurielle Vulcain, Le Verrier avait été conduit à n'en admettre comme exacts que six, et il avait en outre montré que ces six observations pouvaient être représentées par une série d'orbites différentes dont il retint quatre, comme étant les plus probables.

Dans deux Notes consécutives, à la date des 5 août et 30 septembre, M. Gaillot établit que la position du corps *a* de Watson peut être représentée par l'orbite I de Le Verrier, à condition que, dans les calculs qui en déterminent la grandeur, on rejette l'observation faite par Lumnis en 1862. Les observations représentées sont alors :

Fritsch	1802	Octobre.	10,0
Starck.	1819	Octobre.	9,0
De Cuppis.	1839	Octobre.	2,0
Lescarbault.	1859	Mars.	26,22
Watson *a*.	1878	Juillet.	29,44

L'orbite II de Le Verrier représente à son tour le corps *b* de Watson et les observations suivantes :

Fritsch.	1802	Octobre.	10,0
Starck.	1819	Octobre.	9,0
De Cuppis	1839	Octobre.	2,0
Lumnis.	1862	Mars.	19,87
Watson *b*.	1878	Juillet.	29,44

Et l'on arrive ainsi à cette conclusion, que M. Gaillot déclare lui-même difficile à admettre, que, parmi les observations antérieures, plusieurs se rapportent également bien soit au corps *a*, soit au

corps *b*. Plusieurs de ces observations me paraissent donc devoir être regardées comme douteuses, et, si l'existence de planètes intra-mercurielles est aujourd'hui certaine, il faut avouer que les astronomes ne savent encore rien sur leurs orbites.

SUR LES POLYGONES CIRCONSCRIPTIBLES A UN CERCLE;

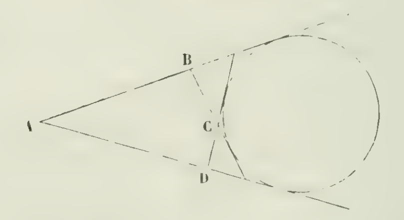
PAR M. G. DARBOUX.

Dans un article inséré au Tome 32 du *Journal de Crelle*, Steiner étudie le quadrilatère circonscriptible, et il fait remarquer que, dans la plupart des Traités de Géométrie élémentaire, on énonce d'une manière inexacte la condition pour qu'un quadrilatère soit circonscriptible à un cercle. Cette condition paraît avoir été donnée pour la première fois par Pitot, en 1725, dans les *Mémoires de l'Académie des Science*, (p. 45), sous la forme suivante :

Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés.

Or, il est aisé de reconnaître que cet énoncé est inexact même pour le quadrilatère convexe. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur la *fig.* 1, qui représente un quadrilatère circonscrit à un cercle, mais de telle manière que les points de contact des différents côtés et du cercle soient sur les prolongements de ces côtés. On démontrera aisément que l'on a toujours

Fig. 1.



$$AD + DC = AB + BC;$$

mais on n'a pas, en général,

$$AB + CD = AD + BC.$$

La proposition de Pitot a donc besoin d'une correction, et Steiner lui substitue la proposition suivante, qui est générale et rigoureuse :

Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, la somme de deux côtés, opposés ou adjacents suivant les cas, est égale à celle des deux autres côtés.

Réciproquement, *toutes les fois que dans un quadrilatère la somme de deux côtés quelconques est égale à celle des deux autres, le quadrilatère est circonscriptible à un cercle.*

Steiner ne donne pas de démonstration complète de cette double proposition; il se contente d'établir la première partie en quelques lignes à la fin de son article et de la déduire de l'examen de toutes les positions possibles de quatre tangentes à un cercle. Le théorème complet se trouve démontré dans l'excellent Traité de Mathématiques élémentaires de M. Baltzer (t. II, p. 31). La théorie des sections coniques conduit aussi à une démonstration très-simple de la seconde proposition, la seule qui puisse offrir quelque difficulté.

Considérons, en effet, un quadrilatère ABCD, et supposons que dans ce quadrilatère la somme de deux côtés soit égale à celle des deux autres. On ne pourra avoir que l'une des trois égalités

$$AB + BC = AD + DC,$$
$$AB - BC = AD - DC,$$
$$AB - BC = DC - AD,$$

et l'une quelconque d'entre elles exprime qu'il y a une conique ayant pour foyers les deux sommets opposés A et C et passant par les deux autres sommets B et D du quadrilatère. Menons les tangentes en B et D à cette conique. Elles se coupent en un point M, et l'on sait qu'en ce point viennent passer une des bissectrices de l'angle A et une des bissectrices de l'angle C. Le point M est donc à égale distance des quatre côtés du quadrilatère ABCD, et, par conséquent, il est le centre d'un cercle inscrit à ce quadrilatère.

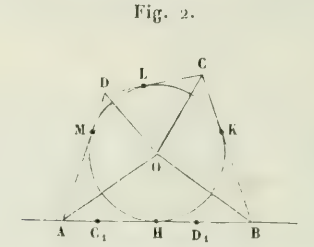
Après avoir rappelé tous ces résulats, nous allons faire connaître

une proposition nouvelle qui nous a été suggérée par l'étude des systèmes articulés.

Supposons qu'étant donné un quadrilatère circonscriptible ABCD on le déforme de telle manière, que les sommets consécutifs A, B restent fixes. Dans toutes les positions de ce quadrilatère il y aura un cercle inscrit : je dis que le centre de ce cercle décrit un autre cercle.

Soit ABCD (*fig.* 2) le quadrilatère dans une de ses positions. Dé-

Fig. 2.



signons ses côtés AB, BC, CD, DA par a, b, c, d, et supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$a + c = b + d.$$

Alors le cercle inscrit sera placé comme l'indique la figure et, toutes les fois que le quadrilatère ABCD sera convexe, touchera les côtés de ce quadrilatère en des points qui seront sur les côtés eux-mêmes et non sur leurs prolongements. Soit O le centre du cercle, on sait que les angles COD, AOB sont supplémentaires. Faisons tourner le triangle OCD dans son plan autour de O jusqu'à ce que CD vienne s'appliquer sur AB; C viendra en un point C_1 tel que

$$C_1H = CL,$$

et de même D viendra en un point D_1 tel que

$$D_1H = DL.$$

On aura donc

$$AD_1 = HD_1 + AH = DM + AM = d,$$
$$BC_1 = BH + HC_1 = BK + CK = b,$$

et, par conséquent, les points C_1 et D_1 seront des points de la base AB qui demeureront fixes quand le quadrilatère articulé BCDA se

déformera. Il est utile de remarquer que C_1, D_1 sont les positions que viennent occuper les sommets C et D quand le quadrilatère ABCD se déforme de telle manière que tous ses sommets viennent se placer en ligne droite.

Ce point étant admis, nous avons une propriété géométrique du centre O du cercle inscrit, qui permet de trouver le lieu de ce point. Le triangle OC_1D_1 étant égal au triangle OCD, il en résulte que les deux angles sous lesquels on voit du point O les deux segments fixes AB, C_1D_1 sont supplémentaires. On est donc ramené à cher-

Fig. 3.

O

A C_1 P D_1 B

cher le lieu des points O d'où l'on voit ces deux segments sous des angles supplémentaires.

L'angle C_1OD_1 (*fig.* 3) étant supplémentaire de l'angle AOB, on a

$$\widehat{C_1 O D_1} = \hat{A} + \hat{B}.$$

On peut donc mener une droite OP partageant l'angle C_1OD_1 en deux parties C_1OP, POD_1 respectivement égales aux angles A et B. On aura alors

$$\overline{OP}^2 = PA.PC_1 = PB.PD_1.$$

Le point P est donc le point central de l'involution définie par les deux segments AC_1, BD_1, et le lieu du point O est le cercle ayant pour diamètre le segment qui divise harmoniquement les deux segments AC_1, BD_1. Nous avons donc le théorème suivant :

Étant donné un quadrilatère ABCD *circonscriptible à un cercle et qui se déforme de telle manière que les sommets* A *et* B *demeurent fixes, les grandeurs des côtés étant invariables, le lieu du centre du cercle inscrit est un cercle ayant pour diamètre le segment qui divise harmoniquement les deux diagonales* AC, BD *du quadrilatère quand il est amené dans la position où il a ses quatre sommets en ligne droite.*

La même méthode de recherche peut être étendue aux polygones d'un nombre pair quelconque de côtés. Supposons qu'un polygone de $2n$ côtés $A_1 A_2, \ldots, A_{2n-1} A_{2n}$ soit circonscrit à un cercle, et, pour fixer les idées, admettons qu'il est convexe et que le cercle inscrit est à l'intérieur de ce polygone. Alors la somme des côtés de rang pair est égale à celle des côtés de rang impair. La somme des angles sous lesquels on voit du centre les côtés de rang impair est égale à π. Il est aisé de démontrer que ce polygone peut être déformé de manière à rester toujours circonscriptible à un cercle, et de trouver le lieu du centre du cercle inscrit lorsqu'on suppose que deux sommets consécutifs, par exemple A_1 et A_2, soient fixes.

Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ les côtés $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots, A_{2n} A_1$ du polygone, et soient $t_1, t_2, \ldots, t_{2n}$ les tangentes menées des différents sommets du polygone au cercle inscrit. On aura

$$(1)\qquad \begin{cases} t_1 + t_2 = a_1, \\ t_2 + t_3 = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_{2n} + t_1 = a_{2n}. \end{cases}$$

Ces $2n$ équations se réduisent à $2n - 1$, car, en les ajoutant de deux en deux, on trouve

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_{2n} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n},$$

et ces deux équations donnent la relation nécessaire

$$a_1 + \ldots + a_{2n-1} = a_2 + a_2 + \ldots + a_{2n},$$

et se réduisent à une seule, contenant les quantités t. Mais, si les équations ne définissent pas complètement les tangentes t, il est aisé de reconnaître qu'elles font connaître la somme de deux tangentes quelconques dont les indices ont des parités différentes. On a, par exemple,

$$t_{2k} + t_{2h+1} = a_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} + \ldots + a_{2h},$$

h étant plus grand que k, et

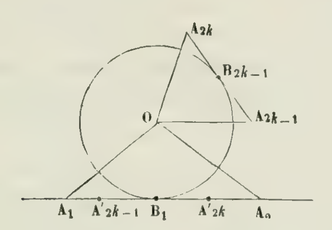
$$t_{2h+1} + t_{2k} = a_{2h+1} - a_{2h+2} + \ldots + a_{2k-1},$$

k étant plus grand que h.

Cela posé, considérons les triangles ayant pour sommet commun

le centre O (*fig.* 4) du cercle inscrit au polygone et pour bases les côtés de rang impair $A_{2k-1}A_{2k}$. Faisons tourner l'un quelconque d'entre eux dans son plan autour du point O jusqu'à ce que $A_{2k-1}A_{2k}$ vienne se placer sur le premier côté A_1A_2. Alors les som-

Fig. 4.



mets viennent occuper des positions $A'_{2k-1}A'_{2k}$ et l'on a

$$A'_{2k}\ \ B_1 = A_{2k}\ \ B_{2k-1} = t_{2k},$$
$$A'_{2k-1}B_1 = A_{2k-2}B_{2k-1} = t_{2k-1},$$

et, par conséquent,

$$A_1A'_{2k}\ \ = t_1 + t_{2k},$$
$$A_2A'_{2k-1} = t_2 + t_{2k-1}.$$

En vertu de la remarque faite plus haut, les seconds membres de ces équations ne dépendent que des longueurs des côtés, et, par conséquent, les positions des points A'_k seront fixes et connues dès que l'on connaîtra les longueurs des côtés du polygone.

Il est à remarquer que la ligne $A_1A_2A'_3\ldots A'_{2n}A_1$ peut être considérée comme un polygone aplati qui est une position limite du polygone proposé quand celui-ci se déforme et que ses sommets viennent se placer en ligne droite.

Les angles $A'_{2k-1}OA'_{2k}$ sont évidemment égaux aux angles $A_{2k-1}OA_{2k}$ sous lesquels on voit du point O les côtés de rang impair du polygone proposé, et l'on peut dire par conséquent que le point O jouit de la propriété suivante : La somme des angles sous lesquels on voit de ce point les n segments A_1A_2, $A'_3A'_4, \ldots,$ $A'_{2n-1}A'_{2n}$ est égale à π. Je dis que, réciproquement, si l'on a trouvé un point O jouissant de cette propriété, on pourra circonscrire au cercle de centre O tangent à A_1A_2 un polygone dont les côtés seront $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$.

En effet, joignons ce point O aux points $A_1, A_2, \ldots, A'_3, \ldots, A'_{2n}$; nous formons ainsi $2n$ triangles $OA_1A_2, OA_2A'_3, \ldots, OA'_{2n}A_1$. La somme des angles en O de ces triangles est la même pour les triangles de rang pair que pour les triangles de rang impair. La somme totale de ces angles est donc égale à 2π. Remarquons seulement que le sens des angles aux sommets A_{k-1}, OA_k est différent pour des triangles dont des rangs ont des parités différentes. Pour supprimer cette distinction, faisons tourner tous les triangles de rang pair de 180° autour d'un de leurs côtés passant en O. Alors nous aurons une suite de $2n$ triangles tels que : 1° tous les angles en O aient le même sens de rotation; 2° que la somme de ces angles soit égale à 2π; 3° que les bases de ces triangles soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ et que les hauteurs soient toutes égales; 4° que le premier côté de chaque triangle soit égal au second côté du triangle précédent. On pourra donc, en faisant tourner ces triangles autour de O dans leur plan, les assembler de telle manière que chaque premier côté de l'un des triangles coïncide avec le dernier du triangle précédent, et l'on formera ainsi un polygone fermé de côtés $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ inscrit à un cercle de centre O.

Nous sommes donc conduits à cette conclusion qu'on peut déformer le polygone de telle manière qu'il ne cesse pas d'être tangent à un cercle, et, pour obtenir le lieu du centre du cercle inscrit quand deux sommets consécutifs du polygone restent fixes, nous sommes ramenés à la question suivante :

Trouver la courbe lieu des points d'où l'on voit p segments déterminés sur une ligne droite sous des angles dont la somme est égale à π ou est un multiple de π.

De telles courbes sont des cas particuliers de celles que j'ai considérées dans mon Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* page 74. Voici comment on peut obtenir leur équation.

Prenons pour axe des x la droite qui contient les segments et pour axe des y une perpendiculaire. Désignons par α_k, β_k les abscisses des extrémités du $k^{\text{ième}}$ segment, et posons, pour abréger,

$$z = x + y\sqrt{-1}, \quad z' = x - y\sqrt{-1}.$$

Si V_k est l'angle sous lequel on voit du point xy le segment $(\alpha_k \beta_k)$, on trouvera facilement

$$e^{2V_k\sqrt{-1}} = \frac{(z-\beta_k)(z'-\alpha_k)}{(z-\alpha_k)(z'-\beta_k)},$$

et par conséquent, en posant

$$S = V_1 + \ldots + V_p,$$

$$f(z) = (z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_p),$$
$$\varphi(z) = (z-\beta_1)\ldots(z-\beta_p),$$

on aura

$$e^{2S\sqrt{-1}} = \frac{\varphi(z)}{f(z)}\frac{f(z')}{\varphi(z')};$$

S devant être égal à un multiple de π, l'équation devient

$$(1) \qquad \frac{\varphi(z)}{f(z)} = \frac{\varphi(z')}{f(z')},$$

et elle se réduit au degré $p-2$ après la suppression du facteur $z-z'$. Donc, pour un polygone de degré $2n$, le lieu du centre du cercle inscrit est une courbe de degré $2n-2$, ce qui est bien d'accord avec le résultat obtenu pour le quadrilatère.

Les propriétés générales des courbes que nous rencontrons, et qui ont été étudiées dans l'Ouvrage cité, trouvent ici leur application. En effet, l'équation de la courbe cherchée peut aussi s'écrire

$$\frac{\varphi(z)+\lambda f(z)}{\varphi(z)+\mu f(z)} = \frac{\varphi(z')+\lambda f(z')}{f(z')+\mu\varphi(z')}.$$

Supposons λ et μ réels et posons

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z)+\lambda f(z)}{1+\lambda},$$

$$f_1(z) = \frac{\varphi(z)+\mu f(z)}{1+\mu};$$

nous pourrons écrire l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad \frac{\varphi_1(z)}{f_1(z)} = \frac{\varphi_1(z')}{f_1(z')},$$

toute semblable à la première. La courbe proposée peut donc être définie de la même manière avec une infinité de systèmes différents de segments, puisqu'on peut choisir arbitrairement λ et μ. Il suffira que λ et μ satisfassent à certaines inégalités, par exemple soient très-grands ou très-petits, pour que les équations

$$f_1(z) = 0, \quad \varphi_1(z) = 0$$

aient leurs racines réelles comme les précédentes

$$f(z) = 0, \quad \varphi(z) = 0.$$

Je me contenterai de ces indications et je n'examinerai pas non plus les polygones qui sont circonscrits à des cercles, mais de telle manière que les points de contact des côtés soient sur leurs prolongements. Les résultats sont identiques à ceux qui précèdent. Les signes seuls de certains côtés sont changés dans la relation

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GÜNTHER (S.). — Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. 3e fascicule. Halle, 1878. In-8°, 87 pages [1].

Le troisième Mémoire de M. Günther sur l'histoire de la Géographie mathématique et physique forme le Chapitre IV de ces recherches d'érudition. Il traite en particulier d'une question qui s'est rencontrée incidemment dans le cours des précédents Mémoires.

Chap. IV. — *Hypothèses anciennes et modernes, relatives au changement chronique du centre de gravité de la Terre sous l'influence de la masse des eaux.* (129-215, 12 figures.)

La découverte des écrits d'Archimède avait permis de concevoir nettement la notion du centre de masse d'un corps et l'existence d'un centre de gravité unique et invariable dans un système formé de points matériels liés entre eux. On arriva bientôt à reconnaître que les divers phénomènes naturels, comme la chute d'une pierre, l'agitation de la surface des eaux sous l'influence du vent, déplaçaient nécessairement le centre de gravité de la Terre de sa position primitive et devaient modifier sa situation relativement à trois axes fixes dans l'espace. Il est vrai que de telles influences ne produisent pas de variations sensibles, mais il en est d'autres qui pourraient amener des modifications notables, comme le retour à des époques glaciaires et à des changements de climat, pour l'explication desquels les premiers géologues n'ont pas hésité à admettre des variations brusques dans la position de l'axe de la Terre, des éruptions volcaniques, la rencontre d'autres corps célestes et diverses causes surnaturelles. Nous ne suivrons pas les géologues dans leurs conceptions plus ou moins justifiées, et il ne sera question ici que de la Terre, considérée comme une sphère et même comme un ellipsoïde à trois axes principaux, dont l'un sera l'axe de rotation actuel. Nous allons voir qu'il a existé de tout temps des hommes qui ont attribué à la masse liquide une in-

---

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 410 et 437.

fluence perturbatrice sur la position du centre de gravité mathématique du globe. Le développement historique de cette doctrine fait l'objet de ce troisième Mémoire, dont nous allons indiquer les principaux passages.

Le mérite d'avoir exprimé pour la première fois et avec toute la netteté désirable la sphéricité de la Terre et d'avoir cherché à en établir des preuves appartient au philosophe de Stagyre; mais il est à observer que longtemps avant Aristote s'était développée une doctrine semblable à celle que nous traitons, et qui admettait, comme hypothèse nécessaire, que la Terre est ronde ou au moins limitée de toutes parts. Hippocrate a bien compris que les inégalités de la surface terrestre n'exercent plus d'influence, mais il paraît n'avoir pas eu l'idée que les variations qu'éprouve le niveau des mers modifient nécessairement le centre de gravité de leur masse près de la surface du globe. Cette hypothèse originale semble s'être présentée à l'esprit d'Hérodote. Dans son *Euterpe* (Livre II), le célèbre historien demande la vraie cause des crues qui s'observent tous les ans dans le Nil avec une si grande régularité. Il dit qu'il en connaît trois explications :

Ou bien un refoulement des eaux par des courants de vents étésiens;

Ou bien l'influence de l'Océan qui entoure la totalité du globe et donne naissance au fleuve du Nil;

Ou enfin la fonte de grandes masses de neige amoncelées en Éthiopie.

Il examine chacune de ces hypothèses et en discute le degré de vraisemblance et de probabilité.

« En hiver », dit-il, « la violence des tempêtes rejette le Soleil hors de son orbite véritable et le dirige vers la Libye. Lorsque le Soleil parcourt ce pays, il y produit le même effet qu'il a coutume de produire en été quand il passe par le milieu du ciel, c'est-à-dire qu'il attire les vapeurs à lui et les repousse ensuite vers les lieux élevés, où les vents, les ayant reçues, les dispersent et les fondent.

» Lorsque l'hiver est adouci, le Soleil retourne au milieu du ciel et de là attire également les vapeurs de tous les fleuves. Jusqu'alors ils augmentent considérablement, à cause des pluies dont la terre est arrosée et qui forment des torrents; mais ils deviennent faibles en été, parce que les pluies leur manquent et que

le Soleil attire une partie de leurs eaux. Il n'en est pas de même du Nil : comme en hiver il est dépourvu des eaux de pluie, et que le Soleil en élève des vapeurs, c'est avec raison la seule rivière dont les eaux soient beaucoup plus basses en cette saison qu'en été. Le Soleil l'attire de même que tous les autres fleuves, mais l'hiver il est le seul que cet astre mette à contribution; c'est pourquoi je regarde le Soleil comme la cause de ces effets.

» Si l'ordre des saisons et la position du ciel venaient à changer, de manière que le nord prît la place du sud, et le sud celle du nord, alors le Soleil, chassé du milieu du ciel par l'hiver, prendrait sans doute son cours par la partie supérieure de l'Europe, comme il le fait aujourd'hui par le haut de la Libye, et je pense qu'en traversant ainsi toute l'Europe il agirait sur l'Ister (le Danube) comme il agit actuellement sur le Nil. »

Parmi les Ouvrages d'Archimède, il en est un célèbre qui ne nous est parvenu que fort tard et sous une traduction arabe qui laissait beaucoup à désirer. Cet Ouvrage est le Livre *Des corps qui sont portés sur un fluide.* Varenius y a remarqué, le premier, qu'Archimède affirme clairement que la surface de l'Océan doit être également distante d'un point déterminé et que le centre de cette surface sphérique doit être le même que celui du globe terrestre.

Les contemporains d'Archimède paraissent avoir été moins pénétrés de cette vérité. Cependant Strabon adresse de vifs reproches à Ératosthène, parce que ce mathématicien de vocation a perdu de vue cette règle fondamentale et a pensé que certaines parties de la Méditerranée ne se trouvent point au même niveau. Il paraît qu'un nivellement de l'isthme de Corinthe, exécuté sous Démétrius Poliorcète, avait conduit à ce résultat, que le golfe de Naupacte (région ouest de l'isthme) était à un niveau inférieur à celui du golfe d'Égine (région est). Il semble qu'Ératosthène, qui devinait en l'oasis d'Ammon le lit d'une ancienne mer, avait conçu la notion paradoxale de variations du niveau des mers, afin de donner une base théorique à des résultats de recherches géognosiques et paléontologiques faites par lui. En revanche, Strabon a admis que l'Ister établit une communication entre la mer Noire et la mer Adriatique, et il a ainsi patronné cette malheureuse erreur géographique du canal océanique, qui donne aux Cartes du moyen âge un aspect si désagréable.

G.

Strabon pouvait donc avec raison blâmer Ératosthène et Hipparque à cause de leurs méprises; mais nous devons, d'un autre côté, reconnaître que sa propre argumentation n'était pas du tout exacte et qu'elle ne fournissait pas moins une suite de sophismes comme origine et comme résultat.

Les théories des philosophes grecs ne furent pas essentiellement modifiées ni perfectionnées par les naturalistes romains. Pline ne s'est occupé qu'incidemment de la sphéricité de la Terre. Il n'en est pas de même de Sénèque, dont les idées accusent un caractère d'originalité mieux marqué. Sénèque saisit parfaitement l'importance de l'eau comme mécanisme puissant de la configuration superficielle de notre planète. Il s'est prononcé avec netteté pour la théorie de la constance de la sphéricité géométrique sous l'influence des causes ordinaires. Dans les *Questions naturelles,* il existe toute une série d'explications ayant pour objet de démontrer comment il peut se faire que, malgré la multiplicité des phénomènes, la masse de l'eau des mers puisse demeurer toujours égale et conserver la même répartition.

Sénèque se livre toutefois à une seule digression très-importante, dont Nehring a dépeint le caractère dans les termes suivants : « De temps à autre a dû certainement arriver une augmentation générale et extraordinaire du niveau de la mer, résultant, par exemple, de vagues diluviennes qui surviennent avec une grande régularité au terme de longues périodes géologiques et produisent de grandes variations dans la forme superficielle de notre planète. » Sénèque fait évidemment allusion à ces épouvantables cataclysmes dont les découvertes paléontologiques de Cuvier et d'Agassiz nous ont donné la preuve, et qui confirment la variation du centre de gravité de la Terre sous l'influence d'une des constellations connues, ou, pour employer un langage plus moderne, le déplacement continu du centre de la Terre dans le cours des siècles, car, suivant Sénèque, il n'y a qu'un événement cosmique, et non simplement terrestre, qui puisse donner naissance à des conséquences aussi étendues. « Ainsi le monde, à son origine, contenait également et le Soleil, et la Lune, et le cercle des révolutions sidérales, et les animaux encore à naître, et les principes de toutes les révolutions du globe. Parmi ces principes figure le déluge, qui, comme l'hiver et l'été, n'a lieu qu'en vertu d'une des

lois du monde. Ne donnez donc pas pour cause à cette destruction la pluie : la pluie y contribuera; l'irruption de la mer : cette irruption y contribuera ; les tremblements de terre : ces commotions y contribueront. La nature s'aidera de tout pour accomplir ses décrets. »

Les autres écrivains latins ne donneraient pas beaucoup de renseignements. Terentius Varro, le premier, a nettement parlé d'un aplatissement de la Terre; mais il est à croire qu'il ne l'entendait point dans le sens que l'on donne aujourd'hui à cette notion et qu'il s'agissait plutôt d'un renflement équatorial de l'Océan, tandis que les eaux abandonneraient en partie les deux pôles.

L'obscure période de la Cosmographie patristique ne nous offre rien d'intéressant ni de précis. Il faut arriver pour cela jusqu'à la seconde moitié du moyen âge, vers les XIIe et XIIIe siècles, époque à laquelle les doctrines de la Scolastique commencèrent à faire place à des notions plus exactes.

Dans son Traité des météores, Albert le Grand dit qu'une partie changeante des continents disparaît sous les eaux et que d'autres parties s'élèvent à leur tour. Il ne s'agit ici évidemment que des oscillations du niveau de la mer, et l'auteur n'a pas songé à un véritable changement du centre de gravité du globe, puisqu'il affirme nettement qu'une dépression de l'eau en un point correspond à une intumescence au point diamétralement opposé.

Roger Bacon se borne à savoir que l'eau et les continents ne forment qu'un tout sphéroïdal. Un passage de ses écrits semblerait devoir donner lieu à une interprétation spéciale, qui pourrait cependant ne pas corroborer certain sophisme adopté au siècle suivant. Pierre d'Ailly, son commentateur, dit en effet que « l'eau forme un bras de mer entre les deux pôles, et s'étend depuis la limite de l'Espagne jusqu'aux Indes, sans occuper une grande largeur, de sorte que le commencement de l'Inde pourrait être au delà du milieu du cercle équinoxial, sous la terre, et toucherait certainement aux confins de l'Espagne. » Ce courant à double sens que devrait suivre l'eau pourrait bien se rapporter à un bourrelet de matière fluide s'étendant le long de l'équateur, sans exercer la moindre influence sur la position du centre de gravité du globe. Peut-être s'agirait-il encore de l'aplatissement, tel que Varro l'avait conçu.

Commentant un passage d'Aristote relatif à la forme que doit prendre une masse fluide abandonnée à elle-même, Thomas d'Aquin reconnaît que l'eau, à la surface du globe, gagne toujours les parties concaves, c'est-à-dire plus rapprochées du centre. Il examine les conséquences de cette observation et conclut à la nécessité d'adopter deux hypothèses différentes : « La première est », dit-il, « que l'eau est aussi naturellement pesante; elle s'écoule, naturellement, toujours vers la région plus concave ou plus basse. Une autre hypothèse est que cette partie plus concave et plus basse est aussi plus voisine du centre du monde. » Ainsi la Terre ne peut être plane. Sa forme doit être sphérique, et les divers éléments sont rangés dans leur ordre normal, suivant des sphères concentriques, dont la Terre occupe le centre. Les autres éléments, l'eau, l'air et le feu, entourent le noyau solide. Nous retrouvons ici la théorie exposée à propos de Moïse ben Maimoun.

Nous pouvons ranger, parmi les anciens écrivains scolastiques, Vincent de Beauvais, dans l'Encyclopédie duquel on trouve une élégante interprétation de théories exactes des anciennes autorités, en même temps que les premières traces d'erreurs qui s'accréditèrent dans la suite.

Hipparque avait déjà, comme on sait, évalué assez exactement l'excentricité de l'orbite apparente du Soleil, et tous ses commentateurs avaient adopté ses démonstrations et les conséquences qui en découlaient, relativement à la connaissance de la Géographie. Les Grecs ne pressentirent pas en quoi cette circonstance pouvait produire une influence physique importante; mais on la trouve étudiée par les Arabes, qui l'ont intimement rattachée à l'hypothèse d'une action attractive exercée par le Soleil et semblable à celle qu'admettait Hérodote pour l'explication des crues du Nil. On a pu en voir déjà une trace dans le deuxième de ces Mémoires, à propos de Schems Eddin de Damas, qui, en effet, s'exprime en ces termes : « Le Soleil se meut autour de son propre centre, qui n'est pas le centre de la Terre, ainsi qu'à son périgée il s'approche d'une partie de la Terre, la partie méridionale, en s'éloignant à son apogée de l'autre, la partie septentrionale, qui devient terre ferme et élevée, puisque les eaux sont attirées par le Soleil vers la partie méridionale en se retirant de la partie septentrionale. »

Nous ne faisons que signaler cette assertion de Schems Eddin,

le commentaire de R. Wolf et un passage de Kazouini, pour arriver aux théories de Masudi. Masudi paraît avoir été l'un des premiers savants du moyen âge qui revint à une doctrine de l'ancienne Géographie, presque oubliée à cette époque. Suivant cette doctrine, la terre ferme ne présenterait pas une courbure régulière et continue, mais offrirait, dans une direction déterminée, un renflement semblable à celui d'une coupe, d'une cloche ou d'une timbale.

Nous avons remarqué, au début même de ce Mémoire, une notion géographique analogue, à propos d'un passage d'Hippocrate. D'ailleurs, au témoignage d'Alexandre de Humboldt, Ératosthène et Polybe présumaient aussi que la Terre s'élève en bourrelet dans le voisinage de l'équateur.

D'ignorants commentateurs propagèrent encore cette doctrine parmi les théosophes de la première époque byzantine. Ce renflement équatorial passa bientôt pour être la ligne de séparation entre les contrées habitables et la région mystérieuse, inaccessible à l'homme, désignée sous le nom de *Terra incognita*.

Un voyageur qui à cette époque se rendit célèbre par le talent et l'exactitude de ses observations contribua, sans le vouloir, à l'affermissement d'une erreur accréditée *a priori*. C'est ainsi que, dans la relation du voyage que Ruysbroek (Guil. de Rubruquis) avait fait à la résidence du grand khan de Mongolie, nous trouvons le passage suivant : « A dater de notre arrivée à la cour du khan suprême Mangu, il n'alla que deux fois vers les contrées méridionales, d'où il commença à retourner vers le nord, c'est-à-dire vers Caracarum. Durant tout ce voyage, j'ai principalement porté mon attention sur un fait que m'avait signalé comme très-digne de remarque le seigneur Baudouin de Hainaut, avant mon départ de Constantinople : c'est que l'on allait toujours en montant et jamais en descendant. Et, en effet, tous les cours d'eau venaient de l'orient vers l'occident, soit directement, soit indirectement, c'est-à-dire obliquant vers le midi ou vers le nord. »

Ruysbroek ne pouvait se méprendre sur une observation personnelle, qu'il traduisait fidèlement. Mais il fallait aussi compter avec des idées moins conformes à l'expérience, de véritables préjugés, suivant lesquels la terre ferme, au lieu d'être sphéroïdique, surgissait à pic du sein des mers.

Ainsi que l'a établi Santarem dans une étude très-consciencieuse,

le mythe d'un paradis situé sur notre globe avait éprouvé successivement diverses transformations. Placé d'abord, par Honorius d'Autun, à l'extrémité orientale des continents connus, il était devenu ensuite la sainte montagne d'Aryn, dans laquelle on pourrait bien retrouver un souvenir du Meru des fables hindoues, puis la montagne gigantesque dont Cosmas Indicopleustès admettait l'existence au milieu du haut plateau asiatique. Telle a dû être l'origine de l'hypothèse d'un bourrelet fluide formant une montagne semblable sur la région opposée.

N'adoptant pas la théorie qui avait généralement cours à cette époque, plusieurs savants n'hésitèrent pas à affirmer que la surface recouverte par les eaux est notablement supérieure à celle des continents. D'autres philosophes, comme Albert le Grand, étaient disposés à placer sur l'hémisphère sud des régions partiellement habitables, mais séparées du reste des continents par d'immenses nappes d'eau. En un mot, l'ancien Océan d'Homère trouvait encore des partisans; on lui supposait une continuité parfaite, et, puisque la sphéricité était modifiée par la répartition des continents et des mers, il n'était plus nécessaire d'admettre l'invariabilité dans l'équilibre des eaux. C'est ainsi que l'on croyait avoir conclu, de mesures directes, un continuel accroissement du niveau de la Méditerranée par rapport à celui de l'Océan. Saint Ambroise et saint Basile enseignèrent cette théorie, dont la substance se trouve dans les écrits du cosmographe arabe Edrisi.

On peut résumer ainsi qu'il suit les faits qui se rapportent à cet ordre d'idées, que l'ensemble de l'eau et de la terre réunies forme simplement des anneaux sphériques concentriques l'un avec l'autre :

1° L'hypothèse fondamentale que l'élément de l'eau, comme déjà l'indiquent les gouttes qui tombent du feuillage des arbres, doit prendre la forme d'une sphère parfaite;

2° L'hypothèse, qui eut cours déjà chez les Grecs et fut plus tard développée par les Arabes, que les astres attirent à eux l'eau et déterminent une précipitation générale à torrents de cette dernière vers un centre;

3° L'erreur géographique que la terre ferme s'élève démesurément au-dessus de l'enveloppe fluide.

Les développements qui précèdent suffisent pour donner la

preuve que, vers le milieu du XIIIe siècle, l'ancienne opinion d'Aristote et des scolasticiens pesait sur l'esprit du temps.

On a découvert et publié récemment, d'après les manuscrits des bibliothèques de Paris, un Ouvrage intitulé *Li Livres du Tresor*, composé par le Florentin Brunetto Latini dans le cours de la seconde moitié du XIIIe siècle. L'auteur y traite la question de savoir « comment li mondes est reons et comment li element sont etabli ». Sa réponse est ainsi formulée : « En ce fu nature bien porveanz quant elle fist l'orbem tout reont; car nul chose ne puet estre si fermement serree en soi meisme comme cele qui est reonde. Raisons comment : regardez ces charpentiers qui font ces toniaus et ces cuves; car il ne les porroient en nule maniere fermer ne joindre, se par reondece non neis une volte, quant on la fait en une maison ou un pont, cōvient il que il soit fermez par sa reondece, non mie par lonc ne par lé, ne en nule autre forme. » Ainsi, Latini a admis que la nature prévoyante a donné à tous les éléments la forme ronde. Dans un autre passage, où il est question « des vainnes de la terre et des aigues », nous trouvons les réflexions suivantes : « Sor la Terre, de cui li contes a tenu lonc parlement, est assise l'aigue, ce est la mer greignor qui est appelée la mer Oceane, de cui toutes les autres mers et braz des mers et flueves et fontaines qui sont parmi la terre, issent et naissent premier et la meisme retornent il a la fin. »

Les figures qui accompagnent cette description donnent bien pour les éléments de l'air et du feu la forme sphérique, tandis que la Terre n'affecte pas cette forme et se trouve inégalement recouverte par les eaux sur la région équatoriale. L'hypothèse du renflement se trouve donc, sinon exprimée, du moins admise en principe.

Un autre Italien, Ristoro d'Arezzo, a publié en 1252 un Traité sur la composition du monde, réédité en 1859 par E. Narducci. Nous pouvons y remarquer un témoignage en faveur de la théorie admise au moyen âge, d'après laquelle l'inégale répartition des continents à la surface du globe correspondait à l'inégale distribution des étoiles du firmament. « Selon les savants », dit Ristoro, « la terre ferme occupe le quart de la surface du globe; les trois autres parties restent recouvertes par les mers. Les continents ont émergé sous l'action d'une grande force qui a en même temps assuré la

création des planètes et des animaux qui habitent sur la Terre. Les continents recouvrent principalement la partie du globe qui regarde le nord et qui correspond à la région du ciel la plus constellée; ils se trouvent entourés de toutes parts de nappes d'eau qui forment la mer Grande, ou, suivant d'autres, la mer Océanique. »

Ce passage exprime nettement l'opinion déjà énoncée par Albert le Grand, à savoir qu'une partie relativement restreinte du globe terrestre émerge seule du sein des eaux. Mais ce que le célèbre philosophe s'est borné à constater, Ristoro s'est appliqué à en chercher la cause probable.

Le passage suivant de son Traité offre encore un certain intérêt : « Nous constatons que la Terre est arrosée de ruisseaux, de fleuves et d'eau; celle-ci coule à travers le sein de la Terre, puis à la surface du globe. Elle parvient au sommet des montagnes, d'où elle descend ensuite pour former les ruisseaux, puis les fleuves, qui, à leur tour, s'échangent l'un avec l'autre, arrosent la terre et se jettent dans la mer. L'eau des rivières et des fleuves est douce, tandis que l'eau de mer est salée. Enfin, pour achever la comparaison, nous pouvons dire que les fleuves s'élèvent de la mer pour y retourner. » Ristoro affirme nettement la prépondérance d'énergie du ciel étoilé dans l'hémisphère boréal. Il conclut en disant que, s'il n'en était pas ainsi, toute l'eau s'étendrait sur le monde entier, mais qu'elle est actuellement retenue par une force.

La discussion des hypothèses de Dante est développée avec beaucoup de soin dans ce Mémoire. Il nous serait difficile de l'exposer sans l'accompagner, comme l'a fait M. Günther, de figures géométriques; nous nous voyons donc obligé d'indiquer simplement ici les conclusions de cet examen.

Dante considéra comme bien démontré qu'il existe entre les continents et le ciel étoilé un rapport intime qui offrirait quelque analogie avec la force magnétique. Nous ne pouvons entrer ici dans le détail des intéressantes relations établies, d'après Schmidt, entre ce dogme et les théories admises à cette époque, relativement à l'étendue des continents. Ainsi que l'on peut en juger par le premier Mémoire, toute la division du globe terrestre, telle que Dante l'a imaginée, aboutit à mettre en réquisition, comme séjour mythologique des âmes, tout un hémisphère, de manière qu'il ne reste du royaume terrestre qu'une partie habitable proportionnellement

plus faible. Tout cet ensemble forme avec les eaux réunies un seul corps qui diffère très-peu d'une sphère mathématique, et, pour expliquer comment la Terre se trouve cachée sous les eaux, Schmidt résume ainsi qu'il suit les théories de Dante :

« La cause de l'élévation locale des continents ne peut être la Terre même; un mouvement vers le haut est contraire à la pesanteur, et cette dernière est une propriété essentielle de la Terre. De même, on ne peut attribuer cette cause à l'action de l'eau, car, si elle recouvrait uniformément la Terre, elle exercerait, en raison de son homogénéité, une pression égale sur tous les points. Il faut également exclure de cette discussion les sphères emboîtées de l'air et du feu qui enveloppent les précédentes. » Il reste donc à chercher en dehors de la nature terrestre, et, à ce point de vue, l'auteur examine successivement les divers éléments célestes auxquels on pourrait attribuer l'élévation des continents au-dessus de l'Océan. La Lune et les planètes ne sauraient entrer en ligne de compte, parce que leurs attractions se contrarient et devraient, en tout cas, produire l'élévation de l'eau sur la terre ferme. La huitième sphère n'intervient pas davantage. « Reste donc, ainsi que Dante le dit lui-même, le ciel des fixes, car nous apercevons des différences de lumière et de grandeur des étoiles, soit considérées isolément, soit groupées en constellations; c'est donc bien là que doit résider la cause cherchée. » Et, justement, la seule zone qui passe pour activement coopérante est comprise entre l'équateur et le cercle polaire arctique, trace évidente de l'éternelle théorie de la zone inhabitable.

Il faut reconnaître que, si toutes ces explications élargissent le cercle des idées du poëte italien, elles n'atteignent pas complétement le but et laissent encore place à bien des doutes. Le sujet, on le voit, est difficile à éclaircir.

Un passage de Robert de Lincoln permet de bien comprendre l'influence qui dirigeait les esprits à cette époque. On fixe habituellement la mort de cet homme en 1253; mais, d'un autre côté, Cantor a récemment prouvé qu'en 1271 un maître anglais, nommé Robert, avait achevé un Livre sur la sphère. Il nous paraît donc admissible que ce dernier Robert soit la même personne que le premier : c'est d'ailleurs aussi l'opinion de Santarem, qui le regarde comme contemporain de savants qui vivaient du XIIIe au XIVe siècle,

Brunetto Latini, Pierre de Vienne, Cecco d'Ascoli et Dante. Mais il est inutile d'insister davantage sur ce renseignement biographique plus ou moins controversé. Robert prouve d'abord que le feu renferme le principe de l'air, puis il ajoute ceci : « De même, la superficie comprise entre *klm* et la circonférence *nkp* engendre par sa rotation un corps dont l'eau occupe le volume et la situation. En outre, le mouvement du demi-cercle *nhp* engendre une sphère située au milieu des deux corps précédents. La Terre occupe le volume et la situation de cette sphère. Mais, pour que les animaux terrestres fussent à même de trouver un séjour et un support, l'eau a dû se rassembler dans la concavité de la Terre et la surface des continents a émergé en une région déterminée. Enfin la Terre, avec les eaux qu'elle renferme, affecte la forme d'une sphère unique. » Les figures qui se rapportent à cette description manquaient au texte de M. Günther, mais elles ne sont pas nécessaires pour reconnaître que Robert admettait à l'intérieur du globe terrestre une assez grande proportion de la masse des eaux. Ce passage pourrait très-bien s'expliquer en admettant, dans la notation des figures, de légères modifications que motiverait l'hypothèse d'erreurs commises par le copiste.

Au surplus, Zoeckler a récemment expliqué, d'une manière très-remarquable, comment la théologique subtilité de l'idée assez confuse de Robert pouvait se concilier avec l'hypothèse scientifique de l'excentricité et même la fortifier. Parlant de l'archevèque espagnol Paulus de Burgos, mort en 1435, il dit ce qui suit : « Cet écrivain fit grande sensation lorsqu'il développa, avec une érudition mathématique et physique, l'explication de la manière tout extraordinaire dont Dieu a déclaré (*Gen.*, I, 9) avoir effectué la séparation de la terre et des eaux ou la création de l'Océan. Dieu a rassemblé en un globe particulier, doué d'un centre de gravité distinct, les eaux qui auparavant recouvraient la totalité de la sphère terrestre. Les deux sphères, celle de la Terre, celle de l'eau, sont restées depuis excentriques vis-à-vis l'une de l'autre, de sorte que leurs surfaces se recoupent mutuellement en plusieurs points. » Cette digression cosmologique a trouvé place dans un Ouvrage que sa tendance agressive dirigeait contre les hypothèses exégétiques du franciscain Nicolas de Lyra, savant littérateur qui, à plusieurs égards, passe pour précurseur de Luther, s'il en faut croire le

dicton latin : *Si Lyra non lyrasset, Lutherus non saltasset.* Un certain Matthias Thoring ou Doring (mieux sans doute Doornik ou Tornik), frère franciscain comme Lyra, commença en 1440 cette campagne contre l'archevêque espagnol, dans un pamphlet intitulé *Correctorium corruptoris Burgensis.* Dans cet écrit, il attaque en particulier la bizarre hypothèse du globe fluide, et il la combat par des arguments très-serrés, observant par exemple que, « si l'on admettait, avec l'archevêque espagnol, un pareil déplacement du centre de gravité de cette sphère aqueuse, les éléments de l'air et du feu auraient dû nécessairement aussi éprouver un déplacement de leur centre, et, par conséquent, l'univers entier serait tombé dans la confusion. Il en serait de même du déplacement supposé du centre de gravité de l'eau, dont la nature serait entièrement altérée ou plutôt complétement anéantie, puisqu'elle ne graviterait plus vers le centre de la Terre, et que, surtout, sa nature humide et froide aurait disparu. » Nous voilà donc encore en présence du vieux dogme.

Ceci nous amène à le constater encore chez un professeur de Padoue de la seconde moitié du xve siècle : il s'agit de François Capuanus de Manfredonie. On doit à ce savant un grand nombre d'éditions, enrichies de Commentaires, de l'OEuvre fondamentale et erronée de Sacro Bosco. Au Chapitre du docteur anglais, intitulé *Quelle est la forme du monde?* il ajoute : « Chacun des trois éléments environne la Terre de toutes parts; une certaine sécheresse de la terre résiste cependant à l'humidité de l'eau pour sauvegarder l'existence des animaux. »

Un passage du Commentaire renferme une critique de la doctrine de Sacro Bosco, qui attribuait à l'élément de l'eau une forme régulièrement sphérique. Le centre de la Terre occupe le milieu du rayon de la sphère du monde. Quant à la surface de l'eau, elle ne peut avoir la forme sphérique, parce que la Géométrie nous apprend que deux sphères concentriques ne peuvent se couper, tandis que l'on sait par l'observation que les éléments solides et fluides se recoupent mutuellement. Il en résulte, dit-il, que l'eau ne peut affecter la forme sphérique.

Nous verrons encore, dans la suite, que la polémique de Dante s'est exercée dans deux directions, contre l'hypothèse de l'excentricité et contre le fantôme d'un renflement constitué uniquement

par l'Océan. Les deux paragraphes qui suivent dans le Mémoire de M. Günther sont consacrés à l'examen de ces deux théories, dont la première paraît devoir occuper, au point de vue scientifique, une place importante. Les noms de deux hommes célèbres se rattachent à cet ordre d'idées : l'un d'eux a été un adversaire, l'autre un ardent défenseur d'une doctrine qui se rapprochait beaucoup de la première, sans être absolument identique avec elle.

Le premier de ces deux philosophes est le célèbre Nicolas Copernic, de Thorn. Il examine, dans son Ouvrage sur les révolutions des corps célestes, comment la Terre, conjointement avec les eaux, ne forme qu'un seul globe. Ici Copernic dirige une vive attaque contre les péripatéticiens, qui, par une abusive application d'un fait d'expérience, que l'eau est dix fois plus légère que la terre, veulent qu'il existe une beaucoup plus forte proportion de la première que de la seconde et que, par suite, le centre géométrique de l'ensemble occupe une position différente de celle du centre de gravité. Cependant une simple notion de Géométrie leur aurait fait reconnaître l'inanité de cette illusion, car, en l'admettant, ils oubliaient que les sphères varient comme le cube de leurs diamètres et que, en regardant comme exact ce rapport entre la matière plus lourde et la matière fluide, l'hémisphère ne pouvait avoir la grandeur réellement trouvée. En outre, il ne peut y avoir aucun rapport entre les deux centres, bien qu'il puisse se produire un perpétuel et impétueux courant marin et une irruption de l'Océan dans les continents. Mais des renseignements géographiques bien établis ne confirment pas cette explication : « Il est avéré qu'entre la mer Égyptienne et le golfe Arabique (mer Rouge), il est resté à peine quinze stades de largeur, presque au milieu de la Terre entière. » Cependant la surface continue de l'Océan est divisée de tous côtés par des îles, observation indiquée par les découvertes des Portugais, plus spécialement par l'existence de l'Amérique, pays que son étendue doit faire assimiler à un continent. Aussi la Terre n'est-elle ni un disque, ni un hémisphère, ni un cylindre, comme le croyaient les anciens philosophes grecs, mais bien une sphère réelle et complétement pleine, en considérant ensemble la terre et les eaux. « Et de tout cela, certes, je crois pouvoir conclure, à l'évidence, que la terre et l'eau ne possèdent qu'un centre de gravité, et que la grandeur de la terre est

seule à considérer. Bien qu'elle soit la plus lourde, elle se remplit d'eau si plusieurs de ses parties viennent à s'entr'ouvrir. C'est pourquoi l'eau est assez rare, en comparaison de la terre, bien que, par sa situation à la surface, elle semble plus abondante. »

Le philosophe Patritius a pris un point de départ essentiellement différent. Il considère, suivant Harms, quatre autres éléments : l'espace, qui embrasse tout; la lumière, qui remplit tout; le fluor, qui produit toutes les choses variables, et la chaleur, qui accompagne la lumière, façonne et anime tous les corps.

Il est étrange de le voir déclarer que les géographes, les astronomes et les philosophes enseignent que l'eau et la terre forment un seul et même globe. Patritius conteste d'abord que l'eau, abandonnée à elle-même, puisse prendre la forme sphérique. Il cherche à en donner des raisons spécieuses. Pour lui, la surface de l'eau est toujours plane, et il s'efforce de développer les arguments et les expériences qui doivent réfuter la théorie de la sphéricité de la terre et des mers.

Patritius s'est inspiré des théories du philosophe Zoroastre, et, lorsqu'il a discuté la situation de la Terre dans l'espace, il a admis que la terre se trouvait au centre de l'univers et que l'eau affectait une surface concave. Il a ainsi été amené à conclure à l'existence de trois centres au milieu de la Terre.

L'examen des assertions de Patritius forme dans cette monographie le sujet d'un long paragraphe, dans lequel M. Günther a fait ressortir les origines de ces théories singulières.

Nous avons acquis la conviction que la forme la plus scientifique de ce système erroné, contre lequel Dante avait dirigé ses attaques, conserva jusqu'au milieu du xvie siècle une certaine vitalité; mais l'hypothèse, incomparablement plus fantastique, d'un relèvement de la mer pour former un bourrelet au-dessus de l'ancien niveau, résista plus longtemps qu'on ne saurait le croire, et ce n'est pas moins que l'auteur de la découverte de l'Amérique qui devait encore appuyer de l'autorité de sa voix l'existence de cette hypothèse.

Pour démontrer que l'on atteindrait assez rapidement la limite orientale de l'Asie par l'occident, Christophe Colomb s'appuyait sans doute sur le jugement d'anciens cosmographes et sur l'admirable pressentiment de Toscanelli ; mais il croyait aussi aux vagues

témoignages prophétiques des Pères de l'Église et d'autres écrivains ecclésiastiques. Les fictions moitié religieuses, moitié physiques, d'une île d'Antiglia, d'une montagne centrale nommée *Aryn,* située à l'extrême orient, mais que l'on pouvait supposer aussi à l'occident, exerçaient une grande influence sur le cercle de ses idées. A propos de la représentation du dogme de l'Aryn ou coupole du monde, Santarem considère comme témoignages les plus affirmatifs l'Ouvrage astronomique d'Aboul Hassan de Marok, un passage d'Aboul Feda et une lettre de Christophe Colomb à la reine Isabelle. Au même ordre d'idées se rattache, comme nous l'avons déjà remarqué, un certain doute sur la simple sphéricité de la Terre, et, en effet, dans les OEuvres de Pierre Alphonse (dernières années du XII[e] siècle) on trouve un dialogue entre Moïse et Pierre l'Ancien, dans lequel, l'un d'eux demandant à l'autre de lui expliquer l'existence de la ville d'Aryn, celui-ci répond par l'objection suivante : « Lorsque tu me dis qu'Aryn est située au milieu de la Terre, tu sembles vouloir dire que la Terre a une forme plane; cependant la distinction établie au début entre l'orient et l'occident prouvait la sphéricité de la Terre. »

Si incroyable que cela doive paraître, il est certain que le navigateur avait encore à l'esprit une deuxième idée erronée. Il considérait comme autorité sérieuse le livre apocryphe d'Esra, moins par vénération pieuse que parce qu'il trouvait dans ce livre un témoignage en faveur de l'hypothèse qu'il défendait avec tant d'ardeur : le renflement de l'Océan dont il est question dans les histoires de la création. Voici, d'ailleurs, à quoi se réduisent les insignifiants commentaires géographiques des écrivains de la Bible, entre autres d'Esra, sur la doctrine d'un bourrelet local formé par les eaux. Alexandre de Humboldt nous donne le renseignement suivant, fourni par l'orientaliste Rosenmüller, qui se rapporte à la théorie adoptée par Colomb et qu'il fait suivre de ces réflexions : « Les Hébreux ne possédaient et leurs anciens livres ne renferment aucune donnée numérique sur l'étendue relative des continents et des mers; les commentaires chaldéens et les écrits talmudiques ne fournissent même aucune réponse à cette question; mais les Juifs ont adopté la division de la surface terrestre en sept climats, et un passage de la *Genèse* (I, 9) enseigne que les eaux ont été rassemblées dans un lieu unique, ce qui expliquerait pourquoi le Talmud

a supposé que ce lieu de rassemblement devait être une des sept zones. »

Une récapitulation des idées que se représentait l'amiral espagnol nous permet de reconnaître qu'il se considérait comme devant être naturellement conduit à deux découvertes : celle de nouvelles régions du globe terrestre, et celle d'un renflement formé en réalité par les eaux, s'élevant au milieu des mers. Mais celui qui poursuit avec ardeur un but déterminé donne étourdiment dans les conjectures et finit par leur attribuer une existence réelle, et, pour peu que le succès réponde à son attente, si la connaissance des conditions fondamentales est toute superficielle, l'imagination lui donne arbitrairement force de loi. Christophe Colomb ne fit pas autrement. Lorsqu'en effet, à son premier voyage (1492), il reconnut que la position du compas ne pouvait s'accorder avec celle du lieu où il croyait se trouver lui-même, il n'hésita point à admettre que ce n'était pas l'aiguille aimantée, mais bien l'étoile polaire qui avait dû s'écarter de sa route.

Cette interprétation, plus que téméraire, était sans doute plutôt adressée à l'équipage qu'à la propre conviction de Christophe Colomb; mais elle démontre que l'on ne craignait nullement de faire violence à la nature.

C'est dans ce sens que de Humboldt a dit ceci : « Sur la partie équatoriale de l'Atlantique se réunissent, dans la capricieuse imagination de Christophe Colomb, des vues plus chimériques sur le changement du climat, la configuration anomale de la sphère terrestre et les mouvements extraordinaires des corps célestes. » En résumé, cet homme fantastique avait le cœur et l'esprit suffisamment prédisposés à ériger en fait deux découvertes qu'il attendait, et elles lui arrivèrent inopinément.

Lorsque, pour la première fois en 1498, il atteignit l'Amérique du Sud, à son troisième voyage, il observa avec attention d'immenses courants qui, en pleine mer, s'opposaient à sa marche et accusaient une faible proportion de sel. Évidemment, cette apparence ne s'accordait pas beaucoup avec la sphéricité traditionnelle de la Terre, contre laquelle on avait élevé déjà des doutes nombreux. Sous l'impression de cette importante observation, il écrivit au souverain de son pays une lettre mémorable, dans laquelle on trouve entre autres passages le suivant : « La côte de

Paria est située plus près de la voûte du ciel que l'Espagne. La Terre est allongée comme une poire et n'a plus la forme sphérique dans le voisinage de sa tige. » C'est en ces termes que Christophe Colomb parle du delta de l'Orénoque. Pour lui, « il existe dans l'océan Indien, près de l'équateur et à la limite des contrées orientales, une région formant un bourrelet qui se rapproche le plus du ciel ».

On a exprimé l'opinion que la mappemonde d'Andreas Bianco n'est pas restée sans influence sur Christophe Colomb. Santarem, qui en a donné une description détaillée, dit en effet que les quatre fleuves du paradis sortent de l'extrême orient, où se trouve l'Éden. Si l'on admettait cette opinion, on devrait encore plutôt mentionner le planisphère de Jean de Beauveau, dans lequel l'idée, qui plaisait à Christophe Colomb, de comparer la Terre à un fruit apparaît peut-être pour la première fois. Mais nous pouvons douter avec raison qu'un homme, élevé comme lui, non au milieu de savants, mais au milieu de marins, ait trouvé le prétexte de ses voyages dans les riches manuscrits des bibliothèques.

Nous regarderons Christophe Colomb comme un esprit tout à fait original, une imagination fréquemment exaltée, qui ne se représentait pas les choses exactement, et qui, dans les nombreuses circonstances extraordinaires sous lesquelles elle fut contrainte à travailler et à combattre, a trouvé des excuses suffisantes à ses extravagances.

A côté de ces intéressants extraits du Mémoire de M. Günther, il sera utile de donner un résumé des réflexions d'Alexandre de Humboldt sur le même sujet (*voir* l'Atlas du *Cosmos*) : « D'Anville a dit avec esprit que la plus grande des erreurs dans la Géographie de Ptolémée (la supposition que l'Asie s'étendait vers l'est au delà de 180 degrés de longitude) a conduit les hommes à la plus grande découverte de terres nouvelles.

» Les grandes découvertes de l'hémisphère occidental ne furent point le résultat d'un heureux hasard. Il a été prouvé que c'est en Portugal, à peu près en 1470, trois ans avant d'avoir reçu les conseils de Paolo Toscanelli, de Florence, que Christophe Colomb conçut l'idée de sa première entreprise. Les espérances de ce grand homme se fondèrent alors sur ce qu'il appela des raisons de Cosmographie, sur le peu de distance qu'il y a des côtes occidentales

d'Europe et d'Afrique aux côtes du Cathaï (la Chine) et de Zipangou (le Japon), reconnues pour la première fois par le Vénitien Marco Polo, sur des opinions d'Aristote et de Sénèque, comme sur quelques indices de terres situées vers l'ouest, qu'on avait recueillis à Porto Santo, à Madère et aux îles Açores. Lorsque Christophe Colomb découvrit les Antilles, lui et ses compagnons crurent être arrivés à l'extrémité orientale du continent asiatique : c'est pourquoi elles furent désignées comme faisant partie des Indes occidentales. Leur nom d'*Antilles* est aussi une réminiscence de l'ancienne légende d'Antiglia ou Antilia.

» La découverte du nouveau continent et les travaux entrepris pour étendre la connaissance de sa géographie n'ont pas seulement levé le voile qui depuis des siècles a couvert une vaste partie de la surface du globe; cette découverte et ces travaux ont aussi exercé l'influence la plus marquante sur le perfectionnement des Cartes et des méthodes géographiques en général, comme sur les moyens extraordinaires propres à fixer la position des lieux. En étudiant les progrès de la civilisation, nous voyons partout la sagacité de l'homme s'accroître avec l'étendue du champ qui s'ouvre à ses recherches. »

Léonard de Vinci occupe dans cette question, comme dans toutes les questions analogues, une place isolée. Des études paléontologiques, qu'il paraît avoir suivies avec prédilection dans les Apennins, l'avaient naturellement porté à réfléchir à un pareil sujet. Rejetant avec énergie les absurdes fables qui attribuaient à quelque force mystérieuse l'origine des coquillages et des fossiles, il proclame les changements d'équilibre de la Terre sous l'influence des eaux. Les huîtres, les coquilles qui vivent dans le limon des mers nous donnent la preuve de la variation que la Terre a éprouvée pour le centre des éléments. Une partie de la Terre devient plus légère et s'élève toujours, tandis que la partie opposée se rapproche de plus en plus du point central, et ce qui était autrefois le fond des mers est devenu aujourd'hui la cime des montagnes. Ces explications s'accordent très-bien, au moins tant qu'elles restent dans le domaine de la Mécanique, avec les théories adoptées aujourd'hui en Géologie sur l'érosion, le transport et la sédimentation.

Le nom de Léonard doit surtout compter parmi les savants qui ont développé et vulgarisé des théories exactes sur les variations

du rapport des éléments solides et fluides de la Terre autour d'un centre de gravité commun.

Nous arrivons maintenant à une période de progrès. Le XVIIe siècle, auquel les Sciences exactes doivent la constitution rationnelle et fondamentale de leur domaine, s'est exercé en général sur les questions importantes, pour pouvoir s'occuper ensuite des questions secondaires. Deux hommes profondément versés dans la connaissance de la nature ont marqué à cette époque par les intéressantes conceptions relatives à la répartition des mers et des continents. Le premier est le théologien Hottinger, de Zurich, mort en 1667, qui, suivant Zoeckler, publia un Commentaire théologique et philosophique de la Genèse se rapprochant beaucoup de celui que donna l'Espagnol Paulus de Burgos.

Le second de ces philosophes ne fut autre que le grand Newton. Ainsi que nous croyons pouvoir le démontrer, Isaac Newton a dû avoir une notion de la théorie que Dante avait combattue. Au lieu de la discuter davantage, il la choisit, avec le talent de son génie, pour base solide d'un fait dont la confirmation expérimentale devait encore attendre près d'un siècle. Une proposition du troisième Livre des *Principes,* relatif au système du monde, établit que les mouvements des planètes peuvent continuer très-longtemps dans l'espace céleste. Comme preuve, il dit que dans l'atmosphère terrestre, passablement pesante en comparaison du fluide céleste, le mouvement d'une goutte d'eau n'éprouve qu'une résistance extrêmement faible. Mais la densité de la Terre, et par analogie aussi la densité des autres planètes, est notablement supérieure à celle de l'eau, de sorte que la résistance que rencontre le mouvement des planètes dans le fluide éthéré, dont la densité est excessivement faible, peut être considérée comme nulle. On voit que la grande différence entre les densités du globe terrestre et de l'eau indique le point de départ de cette démonstration. On en jugera par l'extrait suivant de l'Ouvrage de Newton :

« Voici comment je crois pouvoir établir que la densité de la Terre est supérieure à celle de l'eau. Si ce fluide constituait le globe entier, toutes les substances plus légères viendraient flotter à sa surface. Par conséquent, si l'eau recouvrait entièrement le globe terrestre, celui-ci, supposé plus léger que l'eau, émergerait en quelque lieu, et toute l'eau, refluant de cet endroit, se réunirait

sur la région opposée. Une comparaison semblable devrait donc s'appliquer à notre Terre, entourée de mers sur la plus grande partie. Si la Terre n'était pas plus pesante que l'eau, elle sortirait des mers et flotterait suivant la proportion de sa densité, tandis que toute l'eau des mers s'accumulerait sur la région opposée. C'est pour la même raison que les taches du Soleil sont plus légères que la matière lumineuse de cet astre, sur laquelle elles flottent. En outre, dans la formation d'une quelconque des planètes par les eaux, toutes les substances plus pesantes gagnaient la partie centrale, pendant que la masse était fluide. Aussi voyons-nous la terre commune peser, à la surface, à peu près deux fois plus que l'eau, et plus bas, dans les puits de mines, on la trouve trois, quatre et même cinq fois plus pesante; il est donc à présumer que la densité à l'intérieur du globe est cinq ou six fois plus grande que si le globe terrestre était entièrement constitué par de l'eau. »

Newton a sans doute pris pour base une figure semblable à celle que nous avons vue pour Capuanus de Manfredonie. Sa théorie peut se résumer ainsi : si la Terre était effectivement plus légère que l'eau, toute l'hypothèse du moyen âge relative à la situation excentrique des sphères de la Terre et de l'eau serait entièrement justifiée. Mais nous savons, au contraire, et de nombreux phénomènes physiques et géographiques nous donnent la preuve qu'il ne peut être question d'une semblable disposition, ce qui détruit l'exactitude de l'hypothèse précédente sur la relation entre les densités de la Terre et de l'eau. Mentionnons, en passant, la remarquable intuition de Newton sur la nature des taches du Soleil, dont l'exactitude, comme l'observe le commentateur Wolfers, a été ainsi confirmée depuis l'immense développement de la spectroscopie.

Certaines réminiscences des théories de Newton se retrouveront dans le siècle suivant.

C'est en 1751 que l'abbé de La Caille publia un premier aperçu des résultats scientifiques de son célèbre voyage au Cap. Le programme étendu de ce voyage comprenait, entre autres questions, la mesure d'un degré du méridien. L'opération fut faite à la latitude moyenne de 33° 18′ et donna pour longueur du degré 57037 toises. Nous savons aujourd'hui que le résultat de La Caille était erroné; une preuve suffisante en a été donnée

par d'autres mesures entreprises au sud de l'équateur, celles de Mac Lear dans le voisinage de cette première base française. Mais le nom de La Caille était une sorte de garantie de complète exactitude, et, au lieu de révoquer en doute un pareil résultat, on crut devoir en tenir compte et en chercher l'explication dans une anomalie de structure du globe terrestre. Klügel a traité ce sujet au point de vue mathématique, et a trouvé que la Terre ferme ne présente pas de courbure régulière et que la partie sud n'offre pas la même configuration. Il s'agit évidemment d'une dissemblance entre les deux hémisphères.

La question fut reprise par d'autres philosophes, et nous pouvons citer un Ouvrage qui renferme des indications très-précieuses, le *Traité des Sciences exactes* de L. Röhl, géomètre du siècle dernier. Un Chapitre de cet Ouvrage se termine par les conclusions suivantes : « On conjecturait depuis très-longtemps qu'il existait vers le pôle sud une grande étendue de terre ferme, et l'on cherchait la confirmation expérimentale et théorique d'une hypothèse à laquelle plusieurs savants ajoutaient foi et donnaient une grande importance. Un corps abandonné à lui-même ne peut rester en repos tant que la direction de la pesanteur ne rencontre pas la ligne qui divise le poids en deux parties égales ; et, lorsqu'on suppose réunis deux hémisphères hétérogènes de grandeurs égales, la sphère ainsi constituée ne peut rester en repos que si les axes de ces deux hémisphères se rencontrent juste sur la résultante des poids, et le centre de gravité se trouve dans le plus lourd, près du plan diamétral. Si maintenant on considère notre planète, on trouve sur l'hémisphère nord plus de contrées connues que sur l'hémisphère sud. La proportion s'élève au moins à trois fois et demie plus de terres du côté nord que du côté sud de la ligne équatoriale. Et comme la terre, les pierres et la plus grande partie des autres substances solides dont le globe terrestre est constitué sont beaucoup plus lourdes que l'eau, il semble que l'équilibre que nous observons d'après son mouvement uniforme autour de l'axe, d'après sa situation vis-à-vis du Soleil et son mouvement autour de cet astre, ne peut se maintenir, si nous ne supposons l'existence de grandes étendues de terres à l'opposé, au pôle sud. »

Toutefois, Röhl avoue plus loin que, si les voyages de Cook n'ont

donné aucune confirmation à cette hypothèse, on pourrait être tenté de ne pas lui attribuer d'importance, parce qu'il pourrait se faire que l'excentricité du centre de gravité du globe, attribuée à l'effet de l'inégale répartition des mers et des continents, s'expliquât aussi par une dislocation interne de la matière ou par toute autre cause naturelle.

On peut remarquer dans l'hypothèse de Röhl deux ordres d'idées distincts : d'abord, la considération d'une irrégularité dans la constitution de l'hémisphère austral; ensuite, la doctrine newtonienne de l'accumulation polaire des eaux, rendue possible par une légèreté spécifique des continents, hypothèse que pourtant ne confirment ni le raisonnement ni l'expérience.

Il est probable que l'erreur de La Caille n'a pas été sans influence sur les théories géologiques établies par Wrede, car celles-ci reconnaissent pour base principale la dissemblance observée entre les deux hémisphères. Suivant le Commentaire de Muncke, « on doit considérer comme ingénieuse l'hypothèse de Wrede, lorsque ce dernier soulève la question de savoir si l'on peut admettre une excentricité variable du centre de gravité de notre globe. S'il en était ainsi, on constaterait facilement que la masse des eaux pourrait alors occuper une hauteur de plus de 12 000 pieds sur une région du globe que sur un autre point, afin de rétablir l'équilibre par une excentricité proportionnelle, mais non exagérée, du centre de gravité. Mais, si l'on voulait admettre en outre une variation de cette excentricité par un déplacement du centre de gravité d'un point vers un autre opposé, on en déduirait aisément l'explication de ce fait que l'on trouve dans les parties les plus diverses du globe de très-hautes montagnes au milieu desquelles on reconnaît des dépressions occupées autrefois par la mer. »

Il est intéressant de terminer les développements relatifs à l'évolution historique de notre problème par l'examen des idées originales d'un homme célèbre, qui a fait époque dans une autre branche des Sciences et mérite à ce titre de fixer l'attention : nous voulons parler du naturaliste Lamarck.

L'*Hydrogéologie* de Lamarck renferme une suite de recherches dont le sujet est parfaitement indiqué dans le titre même de cet Ouvrage : *Hydrogéologie, ou Recherches sur l'influence qu'ont les eaux sur la surface du globe terrestre, sur les causes de l'exis-*

tence du bassin des mers, de son déplacement et de son transport successifs sur les différents points de la surface de ce globe, enfin sur les changements que les corps vivants exercent sur la nature et sur l'état de cette surface.

Le Chapitre II est consacré à un examen assez détaillé des hypothèses que nous avons rencontrées chez Dante, et il aboutit à cette conclusion : « Tant que les mers auront un bassin particulier, c'est-à-dire ne formeront pas autour du globe une enveloppe générale liquide, le centre de forme de ce globe ne sera jamais exactement le même que son centre de gravité. »

Qu'il en résulte une différence, cela se comprend, mais Lamarck paraît se tromper lorsqu'il la suppose plus considérable et plus importante qu'elle ne l'est en réalité. La base de son système laisse aussi beaucoup à désirer, ainsi que le démontre M. Günther. Lamarck admet, à l'intérieur de la Terre, une masse quartzeuse et même totalement vitreuse, et toutes les substances relativement plus légères occupent la surface du globe. Il en résulte, dit-il, que l'axe du monde ne coïncide pas exactement avec l'axe de symétrie, et, bien qu'il ne se produise pas de variation apparente de la durée de la rotation, cette cause doit néanmoins exercer une influence marquée, susceptible de mesure après une série de périodes géologiques. Observant que les mers couvrent près de la totalité d'un hémisphère comme masse continue, Lamarck adopte, pour répartition relative de la terre et des eaux, la figure schématique dont il a été fréquemment question : une sphère solide avec bourrelet sphéroïdal, couvrant plus d'un hémisphère et représentant l'élément fluide. Lamarck admet que les points de plus grande hauteur moyenne des continents et de plus grande profondeur moyenne des mers se correspondent aux extrémités d'un même diamètre. Mais l'ensemble des mers se trouve lentement entraîné vers l'ouest sous l'influence attractive de la Lune, de sorte que le centre de gravité du globe se transporte lentement vers l'ouest dans le cours des siècles. C'est ainsi que l'on doit entendre la conclusion à laquelle parvient Lamarck : « Et l'on conçoit que le centre déplaçable, qui est nécessairement opposé aux plus grandes profondeurs de l'Océan, aura fait une révolution complète autour du centre de la forme lorsque l'Océan aura achevé sa révolution autour du globe, révolution qu'il paraît avoir faite au moins une fois. »

Il ne semble pas nécessaire d'insister sur le degré de confiance à accorder à une pareille hypothèse. Il est clair que, si Lamarck avait été quelque peu mathématicien, il aurait trouvé, auprès d'illustres géomètres qui habitaient la même capitale, les éclaircissements nécessaires pour savoir si, en admettant leur exactitude, les relations qu'il supposait auraient pu provoquer de profondes révolutions. Deux ans avant la publication de l'*Hydrogéologie,* avaient paru les premiers volumes de l'immortel Ouvrage de Laplace, la *Mécanique céleste,* dont les Livres IIe et V^e^ renferment tous les renseignements désirables sur les diverses fluctuations auxquelles le centre de gravité de la Terre est et peut être effectivement soumis.

Enfin Bessel a démontré, dans la suite, le peu de probabilité qu'il se produise un changement appréciable dans la situation du globe terrestre.

Nous avons exposé, d'après les philosophes de l'Orient, l'hypothèse de l'accumulation des eaux que doit provoquer le Soleil au pôle terrestre tourné vers cet astre à l'époque du périhélie. Des savants modernes ont également pris cette théorie pour base essentielle de leurs explications de certains phénomènes géologiques. C'est pourquoi Peschel Ruge, après avoir décrit l'hypothèse du bourrelet imaginé par Demitschki, ajoute les réflexions suivantes : « C'est là le plus ancien germe de l'hypothèse connue d'Adhémar, que du reste de Bergh et son ami et compagnon Léopold de Buch avaient adoptée antérieurement à Adhémar. » On retrouvera une grande partie de ces doctrines discutées dans les Ouvrages de Pilar, et notamment dans celui qu'il a publié il y a trois ans, sous le titre de *Contribution à la question des causes des périodes glaciaires.*

La fondation d'une théorie scientifique des glaciers par Venetz, Rendu et Desor, la preuve de l'apparition d'immenses glaciers couvrant la plus grande partie de l'Europe durant les périodes géologiques, ont eu pour résultat de fixer de nouveau l'attention sur ces époques glaciaires. Tandis que de nombreux savants cherchaient à les expliquer par l'influence de courants et même de calmes atmosphériques, un mathématicien français, qui jusqu'alors s'était fait connaître surtout par des travaux de Géométrie descriptive, conçut le projet audacieux d'attribuer et de présenter sous diverses

formes, comme base d'un essai d'explication de l'origine cosmique de ces époques glaciaires, des réflexions sur l'inégale répartition des eaux. Tel est le but des théories d'Adhémar sur les révolutions de la mer et les déluges périodiques (1843). Attaquées et combattues à plusieurs reprises, elles ont trouvé aussi d'enthousiastes partisans, dont quelques-uns, entre autres Julien et Le Hon, n'hésitèrent pas à reprendre, dans des écrits spéciaux, les idées de leur devancier. L'Ouvrage de Julien est intitulé : *Courants et révolutions de l'atmosphère et de la mer, comprenant une théorie nouvelle sur les déluges périodiques* (1860). L'Ouvrage de Le Hon est relatif à la périodicité des déluges (1868).

Comme Pilar croit pouvoir l'affirmer, l'ordre d'idées d'Adhémar reposait principalement sur le célèbre Ouvrage récemment édité par Alexandre de Humboldt et relatif aux isothermes. La Caille avait introduit dans la Science la notion d'une différence entre les deux hémisphères, au point de vue de la quantité de chaleur; de Humboldt a confirmé cette théorie et conclu à une plus grande durée de l'hiver sur l'hémisphère sud. Adhémar a basé sa théorie sur cette différence de saisons. Il a trouvé par un calcul direct que, sur l'hémisphère austral, la nuit comprend, en moyenne, cent soixante-dix heures de plus que le jour, à l'inverse de ce qui se passe, naturellement, sur l'hémisphère boréal. A cette influence correspond une déperdition de chaleur de l'hémisphère austral, par l'effet du rayonnement continuel qui se produit vers l'espace céleste pendant la nuit. Il doit en résulter, à la longue, une diminution de la quantité de glace au pôle nord et une augmentation au pôle sud, de sorte que le centre de gravité de la Terre se trouve dévié vers le pôle sud. Ce déplacement doit entraîner aussi une variation de niveau de la mer, suivie d'une formation de glaciers. Le cours de cette variation est intimement lié à celui de la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre et passe conséquemment, à intervalles de temps égaux, par un maximum et par un minimum. Il y a environ dix mille ans, notre hémisphère occupait la place où nous voyons actuellement l'hémisphère sud; il y a treize siècles, ce dernier se trouvait dans sa plus grande phase glaciaire, et, après une période de neuf mille neuf cents ans, notre hémisphère y reviendra à son tour.

Les hypothèses de Lamarck et d'Adhémar présentent des analo-

gies manifestes. Adhémar peut avoir eu connaissance des spéculations de son prédécesseur, et il paraît avoir considéré, à un point de vue cosmique général, la prétendue tendance attribuée à l'eau. Chez le mathématicien comme chez le naturaliste, le centre de gravité décrit une orbite à peu près circulaire autour d'un centre géométrique, dont le déplacement exige naturellement des millions d'années. Mais, si l'on a recours à de telles prémisses en dehors de la Physique cosmique, et qu'on attribue aux constellations une influence mécanique sur l'état de la surface de la Terre, alors on doit parvenir à cette conclusion que l'exclusive considération d'une ligne d'apsides variable dénote chez Adhémar une certaine étroitesse d'idées, car il y aurait tout autant de raison à essayer une foule d'autres rapports d'une nature astronomique. James Croll a eu le mérite de concevoir et de soutenir dans ce sens une généralisation des principes d'Adhémar.

Le Verrier a exposé, en 1843, dans la *Connaissance des Temps,* les résultats numériques d'une recherche qui se lie à un travail antérieur, dû à John Herschel, sur la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre. Croll reproduit ces nombres et les commente en ces termes : « Suivant les calculs de Le Verrier, la limite supérieure de l'excentricité de l'orbite terrestre serait de 0,07775, et la limite inférieure 0,003314. L'excentricité est actuellement en décroissance, et elle continuera à décroître durant vingt-trois mille neuf cent quatre-vingts ans, à partir de 1800. » Cette variation séculaire produira sur les climats deux influences distinctes : elle diminuera la durée des saisons d'été, et fera décroître de plus en plus la différence entre les températures moyennes des saisons d'hiver et d'été. Lorsque l'orbite sera très-près d'être circulaire, le cours normal des saisons ne sera pas essentiellement troublé; mais les contrastes deviendront plus sensibles lorsqu'un hémisphère atteindra le périhélie en été et l'aphélie en hiver.

L'hypothèse de Croll n'a pas été seulement accueillie dans son propre pays; elle a eu aussi un grand retentissement, et plusieurs savants distingués lui donnèrent leur approbation. Lyell fut de ce nombre. D'ailleurs, de son côté, Croll ne négligea rien pour appuyer sa théorie de nouvelles confirmations.

Le sujet n'a pas manqué de fixer aussi l'attention des géomètres. Dans un des plus curieux Chapitres de la *Mécanique céleste,*

Laplace a démontré que l'écliptique n'est pas fixe dans l'espace, mais qu'elle oscille de part et d'autre d'un plan invariable. Voici l'interprétation que Croll a attribuée à ce phénomène. Prenant pour point de départ l'obliquité en l'année 1801, il cherche l'influence que sa variation séculaire doit exercer sur le climat des régions polaires et sur le niveau de l'Océan. D'après les calculs de Meech sur l'intensité relative de la lumière et de la chaleur du Soleil à différentes latitudes du globe terrestre, les deux pôles recevraient à peu près autant de chaleur qu'en reçoivent les parallèles de 76 degrés au moment où l'obliquité de l'écliptique atteint son maximum. Croll n'admet pas qu'il s'ensuivrait un changement dans la température moyenne des pôles, parce que le cours du Soleil éprouverait lui-même des variations, en même temps que l'écliptique; mais il suppose que la chaleur estivale augmenterait dans une très-grande proportion. « Ainsi, dit-il, nous pourrons conclure que, lorsque l'obliquité de l'écliptique sera maximum et que le pôle recevra un dix-huitième de plus de chaleur qu'à présent, la température des pôles pourra être de 14 à 15 degrés Fahrenheit (7 à 8 degrés centigrades) supérieure à celle d'aujourd'hui, en admettant, d'ailleurs, que ce supplément de calorique soit employé entièrement à élever la température. »

Croll a exposé ses théories dans plusieurs Mémoires, dont les plus essentiels portent les titres suivants :

Sur la cause physique du changement des climats durant les époques géologiques;

Sur l'excentricité de l'orbite terrestre et ses relations physiques avec la période glaciaire;

Sur la variation de l'obliquité de l'écliptique et son influence sur le climat des régions polaires et sur le niveau de la mer;

Sur la cause physique de la submersion et de l'émersion des continents durant la période glaciaire;

Sur les temps géologiques et la date probable des périodes glaciaire et antémiocène.

C'est du premier de ces Ouvrages que nous avons extrait le Commentaire de Croll à l'appui des calculs de Le Verrier.

Le deuxième Mémoire est basé sur un Tableau, dressé par Stone, indiquant les variations de l'excentricité et de la longitude du pé-

rihélie de la Terre à intervalles de dix mille ans (époque, 1800).

Le suivant est relatif à la discussion du même sujet de recherches que le travail de Meech dont il vient d'être question. Un passage de ce Mémoire de Croll a été cité précisément à l'appui de cette discussion.

Quant aux deux autres Mémoires de Croll, il en sera parlé dans un instant.

Pilar s'appuie sur ce fait que les continents se terminent en pointe sur l'hémisphère sud, phénomène que déjà Bacon de Verulam et Forster ne regardaient pas comme accidentel. Il en chercha la cause possible et étudia soigneusement le caractère géographique de cet hémisphère, ainsi que les réflexions d'Adhémar sur la répartition de la terre et des eaux. Cette hypothèse explique et confirme l'accumulation de puissants glaciers, principalement sur l'hémisphère sud. Si l'on compare celui-ci avec la zone glaciale arctique, ou le Groënland, les terres polaires antarctiques devraient toujours être couvertes d'un manteau de glace incomparablement plus épais. Tandis que Croll évalue à 10 000 pieds anglais (3 kilomètres) l'élévation verticale du prétendu glacier qui s'étend régulièrement au nord du Groënland, il croit que la couche uniforme du pôle sud doit atteindre 12 milles anglais (près de 20 kilomètres). Cependant ne doit-il pas arriver, et Pilar lui-même fait cette objection, que plusieurs influences secondaires, qui résultent nécessairement de la disposition des éléments solides et des éléments fluides, ou en particulier de la situation des continents, peuvent contrarier le cours de ces actions primicosmiques? Mais il croit pouvoir démontrer le contraire en ce qui concerne la région des calmes. Cette région sépare les deux domaines de la circulation atmosphérique, et ces derniers sont dissemblables, car la superficie de celui du sud dépasse d'un septième au moins celle du nord, et tout cela s'accorde avec l'idée que nous nous faisons de l'énergie des moussons et des alizés sur l'hémisphère sud, en raison de la plus grande différence de température. Cette différence, ainsi que la plus forte condensation qu'elle provoque dans les vapeurs venues du nord, pourrait bien aussi témoigner en faveur de l'hypothèse de masses de glace extraordinairement puissantes. Mais il est probable qu'une grande partie de cet excès de chaleur doit se perdre sous l'influence du rayonnement prépondérant.

Quant à la mesure approximative de l'épaisseur de la couche de glace, l'auteur évalue à 55 myriamètres cubes, quantité relativement faible, la contribution annuelle de neige ajoutée à la masse déjà existante, et il en déduit les dimensions de la calotte sphérique.

On entrevoit facilement les conséquences que doit entraîner cette hypothèse. Le concours de ces actions cosmiques les plus diverses a déterminé sur le pôle sud l'accumulation de glaciers dont nous venons d'indiquer l'étendue et la disposition. L'attraction directe de la Lune sur ce corps déplace le centre de gravité de la Terre et entraîne en même temps la masse des eaux. Pilar mentionne le changement d'aspect qui s'opère à la surface de la planète Mars et conclut ses intéressantes recherches en établissant, entre les théories d'Adhémar et de Croll, une concordance au moyen de laquelle il espère constituer une base solide pour la démonstration des périodes glaciaires historiques et préhistoriques.

H.-J. Klein a jugé le caractère mathématique de la base adoptée par Le Verrier, Stone et Stockwell dans l'exposé de leurs hypothèses. « Tous ces résultats », dit-il, « sont une pure illusion, parce qu'ils reposent uniquement sur le calcul et que les grandeurs évaluées par l'observation (masse des planètes, etc.) ne possèdent pas le degré d'exactitude suffisant, alors qu'il est tout à fait nécessaire dès que l'on doit faire intervenir des périodes d'une longueur si insolite. Mais il y a mieux encore. Dans les recherches dont il s'agit, l'espace universel est considéré comme absolument vide. Cette hypothèse restrictive n'est pas exacte; la seule chose possible est que l'espace céleste soit rempli par un fluide d'une extrême ténuité. Si alors il est permis de négliger les effets qui peuvent en résulter dans le cours de quelques milliers d'années, il est complétement inadmissible de le faire dès que l'on a à considérer des périodes où les années se chiffrent par plusieurs millions. »

Le paragraphe suivant est relatif à une discussion approfondie des résultats numériques de la théorie de Pilar. On suppose l'existence de deux paraboloïdes, ayant même axe que la Terre, et formant aux deux pôles les immenses glaciers dont les masses produisent une résultante dont le centre de gravité est nécessairement à une certaine distance du centre de la sphère terrestre. Mais il ne

semble pas que cette recherche doive conduire à des résultats concluants.

Lorsque Peschel assure que l'ancienne hypothèse de l'attraction des Arabes Kazouini et Demitschki renferme le principe de la doctrine d'Adhémar, il nous semble que la différence de la disposition d'ensemble doit être peu à considérer dans l'un et l'autre cas.

Le travail dont nous étudions ici la substance se termine par un exposé des idées émises, il y a quelques années, par Schmick. Le premier Mémoire de ce géomètre date de l'année 1869. Il est intitulé : *Le changement des mers et les époques glaciaires des hémisphères terrestres*. Schmick s'appuie sur l'excentricité de l'orbite terrestre, qui paraît également jouer le rôle le plus important dans les théories d'Adhémar et de Croll. L'auteur s'efforce de prouver que le pôle austral est actuellement le plus favorisé et que la période entre deux positions semblables, dans le cours de l'ondulation d'un point déterminé de chaque hémisphère, comprend un intervalle de dix mille ans.

On doit encore à Schmick d'autres Mémoires qui ont été publiés à partir de 1871, et qui portent pour titres :

Faits et observations relatifs à la confirmation de la nouvelle théorie d'un changement des mers, par suite de l'attraction du Soleil et d'une succession de périodes glaciaires égales pour les deux hémisphères terrestres ;

La nouvelle théorie des oscillations séculaires périodiques du niveau de la mer, etc. ;

Le phénomène des marées et sa connexion avec les oscillations séculaires du niveau de la mer ;

La dépression de la mer Caspienne et du lac d'Aral, et sa constatation comme preuve à l'appui d'oscillations séculaires du niveau de la mer ;

Et enfin diverses Notices en réponse aux travaux de MM. Pfaff et W. Veltmann, à la suite de la discussion engagée entre ces savants.

Fr. Pfaff doit être cité comme premier antagoniste de la doctrine de Schmick. Il se base, en particulier, sur ce que les soulèvements des continents, que tous les géologues modernes s'accordent à regarder comme distincts et que Schmick est disposé à

considérer comme chimériques, peuvent même servir de réfutation de la théorie des compensations. Cette réfutation repose essentiellement sur un fait que Pfaff présente sous la forme suivante : « Nous savons, et la nécessité physique de ce fait a été reconnue depuis longtemps, que les phases de marées se produisent simultanément aux extrémités d'un même diamètre. »

Moldenhauer a formulé aussi des objections que nous n'examinerons pas, parce qu'elles appartiennent essentiellement à l'histoire naturelle. Nous reviendrons alors à la controverse élevée en ces derniers temps entre Pilar et Schmick, dont les traits fondamentaux se trouvent déjà par anticipation dans un écrit de Schieling, intitulé : *Les courants perpétuels et constants de l'atmosphère et de l'Océan* (1875).

Pilar se propose, avant tout, de réfuter l'hypothèse de Schmick, suivant laquelle les masses d'eau accumulées au pôle sud, opposé au pôle nord, peuvent affecter le centre de gravité du globe d'une variation, non pas simplement momentanée et faible, mais chronique, durable et sérieuse. Pilar, aussi bien que Schmick dans sa réponse, semble ne pas regarder comme facteur digne d'intervenir le mouvement quotidien de l'axe de la Terre. Tandis que la seule forme d'équilibre stable d'une masse liquide en repos ne peut être qu'une sphère, il existe, pour un corps animé d'un mouvement de rotation, plusieurs autres formes d'équilibre, dont on trouverait l'énumération dans un travail dû à Matthiessen.

Se plaçant à un point de vue plus théorique, le géomètre Veltmann a contesté l'exactitude de la théorie de Schmick. Il reconnaît que Peschel a opéré ses calculs en mathématicien amateur, et il indique avec beaucoup de sens le point saillant de toute la controverse. Il s'agit en effet de savoir si, par suite du changement de place des eaux, la surface des mers est et peut être une surface de niveau dans l'acception ordinaire de la Mécanique analytique.

Quelques données relatives à la controverse entre Schmick, Veltmann, Brenner et Niessl terminent ce troisième Mémoire, qui aurait mérité, comme on le voit, un examen plus détaillé. Il résume assez complétement, du reste, l'état actuel de nos connaissances sur ce sujet de discussion. Laissant de côté les hypothèses imparfaites des anciens et les systèmes erronés du moyen âge, nous avons vu que la doctrine dominante était, à peu d'exceptions,

celle d'une situation excentrique de la terre et des eaux. Tour à tour rejetée par Copernic et par Dante, soutenue en partie par Franz, Patritius, elle devint chez Newton le germe d'une idée grandiose et nouvelle. Mais bientôt elle disparut pour faire place, dans la seconde moitié du dernier siècle, à une idée essentiellement différente, qui, n'invoquant plus un rapport statique, fit intervenir le cours ininterrompu des variations cosmiques et se montra sous la forme successivement perfectionnée des hypothèses de Wrede, de Lamarck, d'Adhémar, de Croll et de Schmick.

Il nous paraît impossible qu'une de ces théories suffise à tout éclaircir et renferme la clef de tous les phénomènes naturels. Suivant une judicieuse réflexion de Goethe, l'accord universel des savants est impossible à obtenir et n'est même pas souhaitable, car une multitude de sentiers conduisent au but dans la nature. Mais, à côté d'autres hypothèses, il en est une qui trouvera toujours une place marquée. C'est la doctrine dont nous venons d'esquisser l'évolution historique : le déplacement séculaire du centre de gravité de la Terre sous l'influence de l'inégale répartition de la masse des eaux. H. B.

GÜNTHER (S.). — Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie zum Gebrauche in höheren Mittelschulklassen und bei akademischen Vorträgen. — 1 vol. in-8° de 127 p. Munchen, 1878.

Le nouveau Volume de M. S. Günther, dont je viens de transcrire le titre, a été composé au point de vue exclusivement classique et destiné à être mis dans les mains des élèves les plus avancés des Écoles moyennes, si nombreuses en Allemagne. Sans doute des livres analogues existaient déjà; mais, dans ces dernières années, les méthodes d'enseignement ont été si profondément modifiées, que les meilleurs de ces Traités ne répondaient plus qu'imparfaitement aux programmes des Cours et des examens qui en sont la sanction; telles sont, dit le savant professeur du Gymnase d'Ansbach, les raisons qui l'ont décidé à exposer de nouveau les principes de la Géographie et de l'Astronomie mathématique.

L'étude de la forme et des mouvements de la Terre est, en effet,

le but principal de l'Ouvrage que nous analysons ici, et plus de la moitié du Volume lui est consacrée.

L'Ouvrage de M. Günther est divisé en douze Chapitres.

Le premier traite du mouvement diurne apparent des étoiles, tel qu'il se montre à un observateur situé sur la Terre, et de la vérification des lois de ce mouvement à l'aide du gnomon, de l'armille des astronomes alexandrins, de la dioptre de Héron, dont le principe est le même que celui de notre théodolite, du cercle mural, du sextant; une courte description fait connaître chacun de ces instruments et suffit à montrer l'usage que les astronomes en peuvent faire.

Le deuxième Chapitre a pour but la description du mouvement apparent du Soleil, de la Lune et des planètes, qui se distinguent des étoiles par leur mouvement propre rapide. M. Günther définit l'équinoxe, les solstices, et montre comment leur position peut être déterminée; il traite enfin brièvement de l'orbite de notre satellite, dont le mouvement dans le ciel est si rapide.

Ces divers mouvements apparents étant déterminés, le savant professeur d'Ansbach consacre le Chapitre III à la définition des trois principaux systèmes de coordonnées célestes; il indique les relations géométriques et trigonométriques qu'ils ont entre eux, et en déduit la solution mathématique des divers problèmes relatifs à la durée du jour et de la nuit. Pour traiter complétement ces questions, il suffit d'avoir recours aux formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude de la forme de la Terre. M. Günther déduit de l'élévation croissante de la polaire, lorsqu'on marche vers le nord, la preuve que la Terre est une surface convexe dans la direction du méridien; le fait qu'une même étoile se lève d'autant plus tôt que l'observateur est plus situé vers l'est lui sert à prouver que la même convexité existe dans une direction perpendiculaire au méridien, et, comme elle est la même que dans le sens nord-sud, il en conclut que la Terre est sphérique. La sphéricité et l'isolement de la Terre dans l'espace étant ainsi démontrés, la fin du Chapitre est consacrée à quelques notions sur les dimensions de notre sphéroïde et à l'analyse succincte des travaux des anciens astronomes sur ce sujet.

Le cinquième Chapitre a pour but l'exposition des méthodes qui

sont employées pour la détermination de la position géographique d'un point. Pour les latitudes, M. Günther donne la méthode des culminations de la polaire, la méthode de la culmination d'une étoile de déclinaison connue, la méthode de la hauteur dans le premier vertical, la méthode de Böhm, la méthode de Douwes, et enfin la méthode de Rümker. La question des latitudes est donc traitée d'une manière très-complète. La détermination des longitudes est exposée avec un soin au moins égal; après avoir fait connaître les principales méthodes propres à donner l'heure locale, l'auteur indique les procédés propres à donner la longitude en mer, soit par l'observation des éclipses des satellites de Jupiter, soit par l'observation des distances lunaires et les formules de Werner et Dunthorne.

Ce paragraphe se termine enfin par l'exposé des procédés de la mesure des altitudes par les méthodes trigonométriques, par le baromètre ou par la détermination de la température de l'ébullition de l'eau.

Le Chapitre V renferme donc l'exposé élémentaire de l'ensemble des connaissances astronomiques nécessaires au voyageur désireux de lever, avec quelque précision, la carte du pays qu'il explore.

Le Chapitre VI est tout entier relatif à la détermination des parallaxes diurnes ou annuelles des étoiles ou des planètes, et à la mesure de la distance de la Terre au Soleil par les méthodes d'Aristarque et de Halley.

Les deux Chapitres suivants, VII et VIII, traitent de l'Astronomie théorique, c'est-à-dire de l'explication géométrique des apparences du mouvement des étoiles, du Soleil, de la Lune et des planètes. L'ordre suivi est l'ordre historique. M. Günther débute par un exposé du système astronomique, imaginé par Eudoxe et adopté par Aristote, des sphères homocentriques; il montre ensuite comment les observations d'Hipparque sur le mouvement du Soleil en ont fait reconnaître l'insuffisance et comment ce dernier a été conduit à l'hypothèse des cercles excentriques parcourus d'un mouvement angulaire uniforme. Cette hypothèse, admissible pour le Soleil, fut bientôt reconnue ne pouvoir rendre un compte assez exact des inégalités du mouvement de la Lune, et Ptolémée dut adopter l'hypothèse des épicycles, qui a été admise jusqu'à Copernic. L'auteur entre ensuite dans d'intéressants détails sur le sys-

tème de Copernic et sur les travaux de Kepler et de Galilée, qui l'ont enfin fait admettre de tous les astronomes, en montrant que l'hypothèse du mouvement des planètes autour du Soleil fixe rend un compte facile des moindres particularités du mouvement de ces corps, et en particulier de leurs phases, que l'invention des lunettes venait de faire découvrir. En terminant, M. Günther énumère les preuves expérimentales, déviation dans la chute des corps, expériences de Foucault, parallaxe des étoiles, aberration de la lumière, etc., que nous pouvons aujourd'hui donner du double mouvement de la Terre sur elle-même et, par analogie, du mouvement des planètes autour du Soleil.

Le Chapitre IX est relatif à la cause du mouvement des corps célestes et à l'exposé des lois de l'attraction. La découverte de Newton y est exposée au point de vue historique et au point de vue de ses conséquences mathématiques pour l'explication de la forme vraie de la Terre et pour la démonstration des lois empiriques de Kepler.

Dans le Chapitre X, M. Günther traite brièvement de l'Astronomie physique et de la description des étoiles, des nébuleuses et des planètes.

Le Chapitre XI est consacré au calendrier.

Le Volume se termine enfin par quelques pages relatives à la représentation plane de la surface de la Terre.

L'ensemble des matières traitées dans le Volume de M. Günther ne diffère pas essentiellement de celles qui sont en général exposées dans les Traités de cet ordre; mais l'enchaînement des faits est plus rigoureux, les déductions mieux suivies, et l'auteur marche toujours d'un pas sûr vers le but qu'il s'est proposé. Grâce à sa profonde érudition, le savant professeur a d'ailleurs pu donner un historique complet des diverses questions relatives à la forme et au mouvement de la Terre. Le Volume de M. Günther sera donc lu avec intérêt par tous ceux qui s'intéressent à l'enseignement de l'Astronomie élémentaire et aussi par les géographes ou les voyageurs désireux de se rendre un compte exact des procédés de la Géographie ancienne ou moderne.

G. R.

MÉLANGES.

DE L'EMPLOI DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DANS LA THÉORIE DU QUADRILATÈRE PLAN;

Par M. G. DARBOUX.

La théorie des systèmes articulés, qui doit son origine à la belle découverte du colonel Peaucellier, et à laquelle les travaux récents des géomètres anglais ont donné une réelle importance, repose tout entière sur la considération de polygones dont les angles changent, mais dont les côtés conservent des dimensions invariables. On a donc été conduit à considérer les figures géométriques sous un point de vue nouveau et à étudier les relations auxquelles peut donner naissance la déformation d'une figure polygonale dont les différents côtés conservent toujours leur grandeur et peuvent être assimilés à des tiges solides articulées les unes aux autres. Je me propose de traiter, dans ce travail, le plus simple des polygones articulés, le quadrilatère, et de mettre en évidence les ressources que peut offrir la théorie des fonctions elliptiques dans la recherche des propriétés géométriques et des relations entre les angles, les côtés et les diagonales du quadrilatère.

Considérons un quadrilatère, dont nous désignerons les côtés par a, b, c, d, et supposons qu'un mobile ait parcouru les différents côtés du quadrilatère en marchant toujours dans le même sens. Appelons ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 les angles que font les différents côtés, pris dans le sens où ils ont été parcourus par le mobile, avec une droite quelconque du plan. On aura les deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} ae^{i\omega_1} + be^{i\omega_2} + ce^{i\omega_3} + de^{i\omega_4} = 0, \\ ae^{-i\omega_1} + be^{-i\omega_2} + ce^{-i\omega_3} + de^{-i\omega_4} = 0, \end{cases}$$

qui contiennent la théorie complète du quadrilatère et qui donnent naissance à toutes les relations existant entre les angles des différents côtés. Or, si l'on pose

$$e^{i\omega_1} = t_1,\quad e^{i\omega_2} = t_2,\quad e^{i\omega_3} = t_3,\quad e^{i\omega_4} = t_4,$$

les formules précédentes deviennent

$$(2)\quad \begin{cases} at_1 + bt_2 + ct_3 + dt_4 = 0, \\ \dfrac{a}{t_1} + \dfrac{b}{t_2} + \dfrac{c}{t_3} + \dfrac{d}{t_4} = 0. \end{cases}$$

Regardons t_1, t_2, t_3, t_4 comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace; les équations précédentes représentent alors l'intersection d'un plan et d'une surface cubique, c'est-à-dire une courbe plane du troisième ordre. On voit donc que la théorie du quadrilatère articulé se ramène à celle d'une cubique plane. Comme on sait que les coordonnées d'un point de toute cubique plane peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre λ et d'un radical du quatrième ou du troisième degré en λ, on voit que l'on pourra aussi exprimer de la même manière les lignes trigonométriques des angles que forment les différents côtés du quadrilatère. On pourra aussi, évidemment, exprimer ces lignes trigonométriques au moyen des fonctions elliptiques $\operatorname{sn}\lambda$, $\operatorname{cn}\lambda$, $\operatorname{dn}\lambda$ d'un certain argument λ. Le présent travail est consacré à la recherche de ces expressions et à l'exposition de quelques conséquences géométriques des formules trouvées.

Avant de commencer cette recherche, nous présenterons quelques remarques très-simples sur les quadrilatères articulés. Nous avons désigné par a, b, c, d les côtés successifs du quadrilatère; mais il est évident qu'avec ces mêmes côtés pris dans un autre ordre, et conservant leur direction et leur sens, on peut former d'autres quadrilatères, et l'on voit bien d'ailleurs que les formules (1) et (2) sont indépendantes de l'ordre de succession des côtés. On aura ainsi six quadrilatères dans lesquels l'ordre de succession des côtés sera indiqué par le tableau suivant :

$$\begin{matrix} a\ b\ c\ d, & a\ c\ d\ b, & a\ d\ b\ c, \\ a\ d\ c\ b, & a\ b\ d\ c, & a\ c\ b\ d. \end{matrix}$$

Les quadrilatères définis par les arrangements appartenant à une même ligne verticale seront toujours superposables; on n'obtiendra donc que trois formes réellement distinctes.

Ces trois quadrilatères ont chacun deux diagonales; il est facile de voir que ces six diagonales sont égales deux à deux. En effet,

posons

$$(3)\quad \begin{cases} at_1 + bt_2 = (a, b)e^{i\theta_3}, \\ at_1 + ct_3 = (a, c)e^{i\theta_2}, \\ at_2 + ct_3 = (b, c)e^{i\theta_1}, \end{cases}$$

(a, b), (a, c), (b, c) étant les modules et θ_1, θ_2, θ_3 les arguments des premiers membres. On aura le tableau suivant :

Quadrilatères.	Diagonales.
$a\ b\ c\ d$,	$(a, b)\ (b, c)$,
$a\ c\ d\ b$,	$(a, c)\ (a, b)$,
$a\ d\ b\ c$.	$(b, c)\ (a, c)$.

Puisque l'ordre de succession des côtés ne joue aucun rôle dans la recherche que nous allons entreprendre, nous pourrons supposer

$$a \geqq b \geqq c \geqq d,$$

et nous poserons, pour abréger les calculs,

$$(4)\quad \begin{cases} q_1 = -a + b + c + d, & p_0 = a + b + c + d, \\ q_2 = a - b + c + d, & p_{12} = -p_{34} = a + b - c - d, \\ q_3 = a + b - c + d, & p_{13} = -p_{24} = a + c - b - d, \\ q_4 = a + b + c - d, & p_{14} = -p_{23} = a + d - b - c. \end{cases}$$

Il est évident que les quantités q_i, p_0, p_{12}, p_{13} sont positives, par suite de l'ordre de grandeur admis pour les côtés. Quant à la quantité p_{14}, elle peut être positive, nulle ou négative, et son signe joue un rôle essentiel dans la théorie du quadrilatère. On a deux classes distinctes de quadrilatères correspondantes aux deux signes différents que peut prendre p_{14}. Ces deux classes sont en quelque sorte séparées par celle qui correspond au cas exceptionnel où l'on a $p_{14} = 0$. Alors les différents quadrilatères que l'on peut former avec les côtés a, b, c, d sont toujours, quel que soit l'ordre de succession de leurs côtés, circonscriptibles à un cercle. On pourra consulter sur ce sujet l'article que nous avons publié récemment (p. 64 de ce Volume).

C'est seulement dans le cas où p_{14} est nul que la cubique plane liée au quadrilatère a un point double. En effet, les équations qui expriment que cette cubique a un point double, c'est-à-dire que le plan représenté par la première des équations (2) est tangent à la

surface cubique représentée par la seconde de ces équations, sont

$$\frac{a}{at_1^2} = \frac{b}{bt_2^2} = \frac{c}{ct_3^2} = \frac{d}{dt_4^2},$$

et elles donnent

$$t_1 = \pm t_2 = \pm t_3 = \pm t_4$$

et par conséquent

(5) $$a \pm b \pm c \pm d = 0.$$

Quand les côtés sont inégaux, des huit quantités que l'on obtient en prenant toutes les combinaisons de signes, q_i, p_0, p_{12}, p_{13}, p_{14}, une seule peut être nulle : c'est p_{14}. On a donc

$$a + d - b - c = 0.$$

Cette relation caractérise le quadrilatère circonscriptible le plus général. On voit qu'on pourrait aussi l'appeler *unicursal,* puisque, la cubique qui lui est liée ayant un point double, on pourra exprimer les lignes trigonométriques de ses angles en fonction rationnelle d'un seul paramètre. Les coordonnées du point double sont alors

$$t_1 = t_4 = -t_3 = -t_2.$$

Mais il existe des cas plus particuliers encore où la relation (5) peut être satisfaite avec deux combinaisons de signes différentes. Supposons, par exemple, que l'on ait à la fois

$$a + d - b - c = 0, \quad a + c - b - d = 0,$$

ce qui donne

$$a = b, \quad c = d.$$

On obtiendra un quadrilatère pour lequel la cubique associée aura deux points doubles, c'est-à-dire se décomposera en une droite et une conique. Les deux relations (2) deviendront

$$a(t_1 + t_2) + c(t_3 + t_4) = 0, \quad a\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} + c\frac{t_3 + t_4}{t_3 t_4} = 0,$$

et elles se décomposeront dans les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 0, \\ t_3 + t_4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a(t_1 + t_2) + c(t_3 + t_4) = 0, \\ t_1 t_2 = t_3 t_4. \end{cases}$$

Et en effet, si l'on considère, par exemple, le quadrilatère comme formé avec les côtés dans l'ordre de succession suivant *acbd*, les côtés opposés seront égaux, et il sera soit un parallélogramme, soit un contre-parallélogramme. Ces deux cas distincts correspondent aux deux systèmes différents de formules.

Enfin, si les quatre côtés a, b, c, d du quadrilatère sont égaux, la cubique liée au quadrilatère se décompose en trois droites. Le quadrilatère est un losange.

Nous avons donc, en résumé :

1° Le losange (a, a, a, a), pour lequel la cubique se réduit à trois droites;

2° Le parallélogramme, le contre-parallélogramme (a, b, a, b), le quadrilatère qu'on peut appeler *bi-isoscèle* (a, a, b, b), pour lesquels la cubique se décompose en une droite et une conique;

3° Le quadrilatère *unicursal* dont les côtés sont inégaux, pour lequel la cubique a un point double;

4° Enfin, le quadrilatère général ou *elliptique,* pour lequel la cubique associée n'a pas de point double.

Nous avons vu qu'il y a deux espèces de quadrilatères généraux correspondants aux deux signes différents que peut prendre la quantité p_{14}. Il est facile de caractériser ces deux classes par une propriété géométrique. Si l'on fixe deux sommets consécutifs A, B d'un quadrilatère articulé ABCD, on obtient un mécanisme qui transforme une rotation de BC autour de B en une rotation de AD autour de A. Si l'on veut que les deux rotations qui se transforment l'une dans l'autre soient continues toutes les deux, on trouve sans peine que AB doit être le plus petit côté du quadrilatère et que l'on doit avoir

$$AB + CD < AC + BD, \quad AB + BC < AD + DC, \quad AB + AC < BD + DC,$$

ou, d'après nos notations,

$$p_{14} < 0.$$

La classe de quadrilatères pour laquelle $p_{14} < 0$ est donc la seule qui permette la transformation d'un mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu. En d'autres termes, les angles que font les différents côtés du quadrilatère avec le plus petit d'entre eux peuvent prendre toutes les valeurs possibles. Il

n'en est pas de même pour les quadrilatères dans lesquels on a $p_{14} > 0$.

D'autres propriétés géométriques distinguent encore les deux classes. Par exemple, avec quatre côtés a, b, c, d quelconques on peut toujours former un quadrilatère inscriptible convexe; mais on ne pourra former un quadrilatère inscriptible non convexe que si l'on a $p_{14} < 0$.

De même, supposons que l'on cherche à former avec les quatre côtés un quadrilatère dont les diagonales soient parallèles, le problème n'admettra de solution réelle que si l'on a $p_{14} < 0$.

I.

Le premier moyen d'exprimer les angles du quadrilatère repose sur l'emploi de l'identité suivante, donnée par Jacobi dans le Tome XV du *Journal de Crelle,* page 200 :

$$(6)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(w-x)\operatorname{sn}(y-z)+\operatorname{sn}(w-y)\operatorname{sn}(z-x)+\operatorname{sn}(w-z)\operatorname{sn}(x-y) \\ \quad +k^2\operatorname{sn}(w-x)\operatorname{sn}(w-y)\operatorname{sn}(w-z)\operatorname{sn}(y-z)\operatorname{sn}(z-x)\operatorname{sn}(x-y)=0. \end{cases}$$

Dans cette identité, changeons w en $w+i\mathrm{K}'$, elle deviendra

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sn}(y-z)}{\operatorname{sn}(w-x)}+\dfrac{\operatorname{sn}(z-x)}{\operatorname{sn}(w-y)}+\dfrac{\operatorname{sn}(x-y)}{\operatorname{sn}(w-z)} \\ \qquad +\dfrac{\operatorname{sn}(y-z)\operatorname{sn}(z-x)\operatorname{sn}(x-y)}{\operatorname{sn}(w-x)\operatorname{sn}(w-y)\operatorname{sn}(w-z)}=0. \end{cases}$$

Cela posé, considérons un quadrilatère quelconque, et désignons par ω_1, ω_2, ω_3 les angles que font les côtés a, b, c de ce quadrilatère avec le côté d. Si celui-ci a été pris dans un sens convenable, ces angles devront satisfaire aux deux équations

$$(8)\quad \begin{cases} ae^{i\omega_1}+be^{i\omega_2}+ce^{i\omega_3}+d=0, \\ ae^{-i\omega_1}+be^{-i\omega_2}+ce^{-i\omega_3}+d=0. \end{cases}$$

Or, si l'on peut déterminer $y-z$, $z-x$, k par les trois équations

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sn}(y-z)}{a}=\dfrac{\operatorname{sn}(z-x)}{b}=\dfrac{\operatorname{sn}(x-y)}{c} \\ \qquad =\dfrac{k\operatorname{sn}(x-y)\operatorname{sn}(y-z)\operatorname{sn}(z-x)}{d}, \end{cases}$$

les identités (6) et (7) prendront la forme

$$a\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(w-y)\,\mathrm{sn}(w-z)}+b\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-z)}$$
$$+c\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-y)}+d=0,$$
$$ak\,\mathrm{sn}(w-y)\,\mathrm{sn}(w-z)+bk\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-z)$$
$$+ck\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-y)+d=0,$$

et, en les comparant, ainsi écrites, aux équations (8), on voit que l'on pourra poser (¹)

$$(10)\qquad\begin{cases}e^{i\omega_1}=k\,\mathrm{sn}(w-y)\,\mathrm{sn}(w-z),\\ e^{i\omega_2}=k\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-z),\\ e^{i\omega_3}=k\,\mathrm{sn}(w-x)\,\mathrm{sn}(w-y),\end{cases}$$

et ces formules, contenant l'arbitraire w, résoudront entièrement la question proposée. Nous allons d'abord discuter le système des équations (9), qui doit nous donner le module et les différences des quantités x, y, z.

Posons, pour abréger,

$$(11)\qquad y-z=h_1,\quad z-x=h_2,\quad x-y=h_3;$$

on aura

$$(12)\qquad h_1+h_2+h_3=0,$$

$$(13)\qquad \mathrm{sn}\,h_1=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{ad}{bc}},\quad \mathrm{sn}\,h_2=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{bd}{ac}},\quad \mathrm{sn}\,h_3=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{cd}{ab}}.$$

La relation entre les sinus amplitudes α, β, γ de trois arguments dont la somme est nulle est, comme on sait,

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2+4\alpha^2\beta^2\gamma^2(1+k^2)$$
$$+k^4\alpha^4\beta^4\gamma^4-2k^2\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0.$$

Si l'on y remplace α, β, γ par les valeurs de $\mathrm{sn}\,h_1$, $\mathrm{sn}\,h_2$, $\mathrm{sn}\,h_3$ tirées des formules (13), on aura

$$(14)\qquad \frac{4(1+k^2)}{k}abcd=\mathrm{L},$$

(¹) Le système que l'on obtiendrait en prenant pour $e^{i\omega_1}$, $e^{i\omega_2}$, $e^{i\omega_3}$ les valeurs inverses correspond à un quadrilatère symétrique du premier, et d'ailleurs on l'obtiendra en changeant w en $w+i\mathrm{K}'$.

L désignant, pour abréger, l'expression symétrique

$$(15)\qquad \begin{cases} L = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2c^2d^2 \\ \qquad + 2b^2d^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 - d^4, \end{cases}$$

à laquelle on peut donner différentes formes, telles que la suivante,

$$(15\ bis)\qquad L = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

d'où l'on déduit

$$(16)\qquad \begin{cases} L + 8abcd = \quad q_1 q_2 q_3 q_4 = A, \\ L - 8abcd = -p_0 p_{12} p_{13} p_{14} = B. \end{cases}$$

On voit que B ne sera positif que si l'on a $p_{14} < 0$.

Après avoir défini les quantités A, B, nous déduisons de la formule (14)

$$(17)\qquad \begin{cases} 4abcd\dfrac{(1-k)^2}{k} = B, \\ 4abcd\dfrac{(1+k)^2}{k} = A, \\ k = \dfrac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \dfrac{16abcd}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2}, \quad k'^2 = \dfrac{4\sqrt{AB}}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2}. \end{cases}$$

On voit que le module ne sera réel que si l'on a $p_{14} < 0$. C'est le cas auquel nous nous attacherons dans ce qui va suivre.

Si dans la formule (15 *bis*) on remplace L par sa valeur tirée de l'équation (14), on a

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 4\,\frac{(1+k^2)}{k}\,abcd \\ &= 4a^2b^2\operatorname{cn}^2 h_3 \operatorname{dn}^2 h_3.\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\pm 2ab \operatorname{cn} h_3 \operatorname{dn} h_3 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$

et, en permutant a, b, c, on trouvera deux équations analogues. En déterminant les signes par les conditions

$$\operatorname{sn}(h_1 + h_3) = -\operatorname{sn} h_2, \quad \operatorname{sn}(h_1 + h_2) = -\operatorname{sn} h_3,$$

nous sommes conduit au système suivant :

$$(18)\quad \begin{cases} \operatorname{cn} h_1 \operatorname{dn} h_1 = \dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2bc}, \\ \operatorname{cn} h_2 \operatorname{dn} h_2 = \dfrac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2ac}, \\ \operatorname{cn} h_3 \operatorname{dn} h_3 = \dfrac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2ab}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit aisément le groupe de relations

$$bc(\operatorname{cn} h_1 + \operatorname{dn} h_1) = \sqrt{p_{12}p_{13}q_2q_3}, \qquad 2\sqrt{\frac{abcd}{k}}(\operatorname{dn} h_1 + k\operatorname{cn} h_1) = \sqrt{p_{12}p_{13}q_1q_4},$$

$$bc(\operatorname{dn} h_1 - \operatorname{cn} h_1) = \sqrt{-p_0p_{14}q_1q_4}, \qquad 2\sqrt{\frac{abcd}{k}}(\operatorname{dn} h_1 - k\operatorname{cn} h_1) = \sqrt{-p_0p_{14}q_2q_3},$$

$$ac(\operatorname{cn} h_2 + \operatorname{dn} h_2) = \sqrt{-p_{12}p_{14}q_1q_3}, \qquad 2\sqrt{\frac{abcd}{k}}(\operatorname{dn} h_2 + k\operatorname{cn} h_2) = \sqrt{-p_{12}p_{14}q_2q_4},$$

$$ac(\operatorname{dn} h_2 - \operatorname{cn} h_2) = \sqrt{p_0p_{13}q_2q_4}, \qquad 2\sqrt{\frac{abcd}{k}}(\operatorname{dn} h_2 - k\operatorname{cn} h_2) = \sqrt{p_0p_{13}q_1q_3},$$

$$ab(\operatorname{cn} h_3 + \operatorname{dn} h_3) = \sqrt{-p_{13}p_{14}q_1q_2}, \qquad 2\sqrt{\frac{abcd}{k}}(\operatorname{dn} h_3 + k\operatorname{cn} h_3) = \sqrt{-p_{13}p_{14}q_3q_4},$$

$$ab(\operatorname{dn} h_3 - \operatorname{cn} h_3) = \sqrt{p_0p_{12}q_3q_4}, \qquad 2\sqrt{\frac{abcd}{k}}(\operatorname{dn} h_3 - k\operatorname{cn} h_3) = \sqrt{p_0p_{12}q_1q_2}.$$

En prenant positivement tous les radicaux qui entrent dans ces formules, on voit que $\operatorname{dn} h_1$, $\operatorname{dn} h_2$, $\operatorname{dn} h_3$ sont positifs, et, par conséquent, h_1, h_2, h_3 sont des quantités réelles. Voyons entre quelles limites elles sont situées.

Si nous nous reportons aux formules (18), nous voyons que le signe de $\operatorname{cn} h_1$ est le même que celui de $a^2+d^2-b^2-c^2$. Or cette quantité peut être positive, nulle ou négative. Cela établit entre les quadrilatères que nous considérons des différences analogues à celles qui existent entre les triangles acutangles et les triangles obtusangles. Nous voyons donc que pour h_1 nous pourrons prendre une valeur qui dans tous les cas sera comprise entre zéro et $2K$. Au contraire, il résulte des formules (18) que $\operatorname{cn} h_2$, $\operatorname{cn} h_3$ seront toujours négatifs. Les valeurs correspondantes de h_2, h_3 pourront donc être prises entre K et $2K$.

Si l'on remarque d'ailleurs que les formules (18), (19) per-

mettent de vérifier les relations

$$\operatorname{dn}(h_1 + h_2) = \operatorname{dn} h_3, \quad \operatorname{cn}(h_1 + h_2) = \operatorname{cn} h_3,$$

nous pourrons conclure que la somme des valeurs de h_1, h_2, h_3 telles que nous venons de les déterminer est égale à $4K$, au lieu d'être égale à zéro ; mais cela n'a aucun inconvénient.

Quand le quadrilatère se réduit à un triangle, on a $d = 0$ et par conséquent $k = 0$. Alors, si A, B, C désignent les angles du triangle opposés aux côtés a, b, c, les valeurs de h_1, h_2, h_3 telles que nous les avons déterminées sont $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, et les formules précédentes se réduisent aux relations bien connues qui contiennent les côtés et les angles d'un triangle. On peut ajouter les suivantes, qui sont la généralisation des formules faisant connaître les lignes trigonométriques des arcs $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$:

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
\sqrt{\frac{q_1 q_4}{bc}} &= \frac{2(1+k)\operatorname{sn}\frac{h_1}{2}}{1 + k\operatorname{sn}^2\frac{h_1}{2}}, & \sqrt{\frac{p_{12} p_{13}}{bc}} &= \frac{2\operatorname{cn}\frac{h_1}{2}\operatorname{dn}\frac{h_1}{2}}{1 + k\operatorname{sn}^2\frac{h_1}{2}}, \\
\sqrt{\frac{q_2 q_3}{bc}} &= \frac{2\operatorname{cn}\frac{h_1}{2}\operatorname{dn}\frac{h_1}{2}}{1 - k\operatorname{sn}^2\frac{h_1}{2}}, & \sqrt{\frac{-p_0 p_{14}}{bc}} &= \frac{2(1-k)\operatorname{sn}\frac{h_1}{2}}{1 - k\operatorname{sn}^2\frac{h_1}{2}}, \\
\sqrt{\frac{q_2 q_4}{ac}} &= \frac{2(1+k)\operatorname{sn}\frac{h_2}{2}}{1 + k\operatorname{sn}^2\frac{h_2}{2}}, & \sqrt{\frac{-p_{12} p_{14}}{ac}} &= \frac{2\operatorname{cn}\frac{h_2}{2}\operatorname{dn}\frac{h_2}{2}}{1 + k\operatorname{sn}^2\frac{h_2}{2}}, \\
\sqrt{\frac{q_1 q_3}{ac}} &= \frac{2\operatorname{cn}\frac{h_2}{2}\operatorname{dn}\frac{h_2}{2}}{1 - k\operatorname{sn}^2\frac{h_2}{2}}, & \sqrt{\frac{p_0 p_{13}}{ac}} &= \frac{2(1-k)\operatorname{sn}\frac{h_2}{2}}{1 - k\operatorname{sn}^2\frac{h_2}{2}}, \\
\sqrt{\frac{q_3 q_4}{ab}} &= \frac{2(1+k)\operatorname{sn}\frac{h_3}{2}}{1 + k\operatorname{sn}^2\frac{h_3}{2}}, & \sqrt{\frac{-p_{13} p_{14}}{ab}} &= \frac{2\operatorname{cn}\frac{h_3}{2}\operatorname{dn}\frac{h_3}{2}}{1 + k\operatorname{sn}^2\frac{h_3}{2}}, \\
\sqrt{\frac{q_1 q_2}{ab}} &= \frac{2\operatorname{cn}\frac{h_3}{2}\operatorname{dn}\frac{h_3}{2}}{1 - k\operatorname{sn}^2\frac{h_3}{2}}, & \sqrt{\frac{p_0 p_{12}}{ab}} &= \frac{2(1-k)\operatorname{sn}\frac{h_3}{2}}{1 - k\operatorname{sn}^2\frac{h_3}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on considère le cas limite où le module devient égal à 1 et où l'on a $p_{14} = 0$, h_2, h_3, étant plus grands que K, deviendront infinis; mais, en remplaçant h_2, h_3 par

$$\alpha_2 = 2\mathrm{K} - h_2, \quad \alpha_3 = 2\mathrm{K} - h_3,$$

on reconnaîtra que α_2, α_3 demeurent finis, et en faisant $k = 1$ toutes les formules obtenues subsisteront ou seront satisfaites d'elles-mêmes.

Après avoir étudié les expressions des côtés et de leurs fonctions au moyen des arguments h_1, h_2, h_3, nous avons à discuter les formules (10), qui font connaître les angles ω_1, ω_2, ω_3. Remplaçons-y w par $t - \dfrac{\mathrm{K} + i\mathrm{K}'}{2}$; il résulte des propriétés du sinus amplitude qu'elles subsisteront quand on y changera i en $-i$; on devra donc y supposer la variable t réelle. On aura ainsi

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{i\omega_1} &= k \operatorname{sn}\left(t - y - \frac{\mathrm{K} + i\mathrm{K}'}{2}\right) \operatorname{sn}\left(t - z - \frac{\mathrm{K} + i\mathrm{K}'}{2}\right), \\ e^{i\omega_2} &= k \operatorname{sn}\left(t - x - \frac{\mathrm{K} + i\mathrm{K}'}{2}\right) \operatorname{sn}\left(t - z - \frac{\mathrm{K} + i\mathrm{K}'}{2}\right), \\ e^{i\omega_3} &= k \operatorname{sn}\left(t - x - \frac{\mathrm{K} + i\mathrm{K}'}{2}\right) \operatorname{sn}\left(t - y - \frac{\mathrm{K} + i\mathrm{K}'}{2}\right), \end{aligned} \right.$$

et, par suite,

$$e^{i(\omega_3 - \omega_2)} = -k \operatorname{sn}\left(t - y - \frac{\mathrm{K} + i\mathrm{K}'}{2}\right) \operatorname{sn}\left(t - z - \frac{\mathrm{K} - i\mathrm{K}'}{2}\right)$$

$$e^{i(\omega_3 + \omega_2 - \omega_1)} = k \operatorname{sn}^2\left(t - x - \frac{\mathrm{K} + i\mathrm{K}'}{2}\right).$$

Employons la formule

$$\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta = \frac{\operatorname{cn}(\alpha - \beta) - \operatorname{cn}(\alpha + \beta)}{\operatorname{dn}(\alpha - \beta) + \operatorname{dn}(\alpha + \beta)},$$

et posons, pour abréger,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} 2t - y - z &= u, \\ 2t - x - z &= v, \\ 2t - x - y &= w; \end{aligned} \right.$$

on aura

$$(23) \quad v - w = h_1, \quad w - u = h_2, \quad u - v = h_3,$$

et les formules (21) nous conduiront au système suivant :

$$
(24)\left\{\begin{array}{ll}
\cos\omega_1 = \dfrac{k\,\mathrm{cn}\,h_1 - \mathrm{dn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,h_1 - k\,\mathrm{cn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u}, & \cos(\omega_3 - \omega_2) = \dfrac{\mathrm{cn}\,h_1 - k\,\mathrm{dn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,h_1 - k\,\mathrm{cn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u}, \\
\sin\omega_1 = \dfrac{k'\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,h_1 - k\,\mathrm{cn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u}, & \sin(\omega_3 - \omega_2) = \dfrac{-k'\,\mathrm{sn}\,h_1\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,h_1 - k\,\mathrm{cn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u}, \\
\cos\omega_2 = \dfrac{k\,\mathrm{cn}\,h_2 - \mathrm{dn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,h_2 - k\,\mathrm{cn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v}, & \cos(\omega_1 - \omega_3) = \dfrac{\mathrm{cn}\,h_2 - k\,\mathrm{dn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,h_2 - k\,\mathrm{cn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v}, \\
\sin\omega_2 = \dfrac{k'\,\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{dn}\,h_2 - k\,\mathrm{cn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v}, & \sin(\omega_1 - \omega_3) = \dfrac{-k'\,\mathrm{sn}\,h_2\,\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{dn}\,h_2 - k\,\mathrm{cn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v}, \\
\cos\omega_3 = \dfrac{k\,\mathrm{cn}\,h_3 - \mathrm{dn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w}{\mathrm{dn}\,h_3 - k\,\mathrm{cn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w}, & \cos(\omega_2 - \omega_1) = \dfrac{\mathrm{cn}\,h_3 - k\,\mathrm{dn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w}{\mathrm{dn}\,h_3 - k\,\mathrm{cn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w}, \\
\sin\omega_3 = \dfrac{k'\,\mathrm{cn}\,w}{\mathrm{dn}\,h_3 - k\,\mathrm{cn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w}, & \sin(\omega_2 - \omega_1) = \dfrac{-k'\,\mathrm{sn}\,h_3\,\mathrm{dn}\,w}{\mathrm{dn}\,h_3 - k\,\mathrm{cn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w}, \\
\cos(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1) = \dfrac{k - \mathrm{sn}(w - h_3)}{1 - k\,\mathrm{sn}(w - h_3)}, & \sin(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1) = \dfrac{k'\,\mathrm{cn}(w}{1 - k\,\mathrm{sn}(} \\
\cos(\omega_3 + \omega_1 - \omega_2) = \dfrac{k - \mathrm{sn}(u - h_2)}{1 - k\,\mathrm{sn}(u - h_2)}, & \sin(\omega_3 + \omega_1 - \omega_2) = \dfrac{k'\,\mathrm{cn}(u}{1 - k\,\mathrm{sn}(} \\
\cos(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) = \dfrac{k - \mathrm{sn}(v - h_1)}{1 - k\,\mathrm{sn}(v - h_1)}, & \sin(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) = \dfrac{k'\,\mathrm{cn}(v}{1 - k\,\mathrm{sn}}
\end{array}\right.
$$

Ajoutons à ces formules celles qui donnent la valeur des diago-nales,

$$
(25)\left\{\begin{array}{l}
(b,\,c)^2 = a^2(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 h_2\,\mathrm{sn}^2 h_3)\,\dfrac{\mathrm{dn}(h_2 - h_3) - k\,\mathrm{cn}(h_2 - h_3)\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,h_1 - k\,\mathrm{cn}\,h_1\,\mathrm{sn}\,u}, \\
(c,\,a)^2 = b^2(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 h_1\,\mathrm{sn}^2 h_3)\,\dfrac{\mathrm{dn}(h_3 - h_1) - k\,\mathrm{cn}(h_3 - h_1)\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,h_2 - k\,\mathrm{cn}\,h_2\,\mathrm{sn}\,v}, \\
(a,\,b)^2 = c^2(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 h_1\,\mathrm{sn}^2 h_2)\,\dfrac{\mathrm{dn}(h_1 - h_2) - k\,\mathrm{cn}(h_1 - h_2)\,\mathrm{sn}\,w}{\mathrm{dn}\,h_3 - k\,\mathrm{cn}\,h_3\,\mathrm{sn}\,w},
\end{array}\right.
$$

et nous aurons une première solution complète de la questio proposée.

II.

Les formules que nous venons de donner relativement aux dia-gonales conduisent à une conséquence géométrique intéressant que nous allons développer. Considérons un quelconque des troi quadrilatères que l'on peut former avec les côtés, par exemple l

quadrilatère $(dcab)$, dont les deux diagonales sont (a, b), (a, c); supposons que, prenant l'un des deux triangles qui forment le quadrilatère, par exemple le triangle formé des côtés a, b, on le fasse tourner de 180° autour de la diagonale (a, b) : on aura une nouvelle position du quadrilatère dans laquelle la diagonale (a, b) aura conservé sa grandeur, mais l'autre diagonale (a, c) aura changé. Opérons maintenant de même autour de (a, c), c'est-à-dire faisons tourner de 180° autour de (a, c) l'un des deux triangles dans lesquels cette diagonale partage le quadrilatère. En répétant indéfiniment ces opérations, on formera une suite illimitée de quadrilatères telle que deux quadrilatères consécutifs aient toujours une diagonale commune. Cela posé, je dis que, si pour une certaine valeur des angles du quadrilatère primitif cette suite illimitée est périodique, c'est-à-dire comprend seulement un nombre limité de formes distinctes, il en sera de même quand on répétera les mêmes opérations sur le quadrilatère initial déformé d'une manière quelconque.

En effet, désignons par $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ les quadrilatères obtenus successivement; appelons v_n, w_n les valeurs de v, w correspondantes au quadrilatère Q_n. On aura

$$(26) \qquad v_n - w_n = h_1.$$

Pour les quadrilatères Q_1, Q_2, et en général pour les quadrilatères Q_{2p+1}, Q_{2p+2}, la diagonale (a, b) a la même valeur. On a donc

$$\operatorname{sn} w_{2p+1} = \operatorname{sn} w_{2p+2},$$

et par conséquent, à un multiple près de $4K$, on a

$$(27) \qquad w_{2p+2} = 2K - w_{2p+1}.$$

Au contraire, pour les quadrilatères Q_2, Q_3, et en général Q_{2p}, Q_{2p+1}, la diagonale (a, c) a la même valeur. On a donc

$$(28) \qquad \operatorname{sn} v_{2p} = \operatorname{sn} v_{2p+1},$$

ce qui donne

$$v_{2p} + v_{2p+1} = 2K.$$

Les égalités (26), (27), (28) déterminent les valeurs successives

de v, w données par le Tableau suivant :

	Quadrilatères					
	Q_1.	Q_2.	Q_3.	....	Q_{2n+1}.	....
v.......	v_1	$2K - w_1 + h_1$	$v_1 - 2h_1$	...	$v_1 - 2nh$	...
w.......	w_1	$2K - w_1$	$w_1 - 2h_1$	...	$w_1 - 2nh$	...

On voit donc que, si h_1 est incommensurable avec K, deux quelconques des quadrilatères de rang impair Q_1, Q_3, .. ne seront jamais égaux, et l'on aura un nombre illimité de formes distinctes.

Au contraire, si l'on a

$$2ph_1 = 4p'K,$$

p et p' étant des entiers, la suite précédente comprendra seulement $2p$ quadrilatères distincts.

Supposons, par exemple, que l'on ait $h_1 = K$, ce qui entraîne l'égalité

$$\operatorname{cn} h_1 = 0,$$

et par conséquent, d'après les formules (18),

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 0;$$

on aura le quadrilatère à diagonales rectangulaires, et il est aisé de reconnaître que de ce quadrilatère, pris dans une de ses positions ABCD, on ne peut déduire par le procédé indiqué que trois nouveaux quadrilatères ABC_1D, ADC_1B_1, AB_1CD.

Toutefois, ce cas particulier pourrait contribuer à donner une fausse notion sur le cas général. Ici, au bout de quatre opérations, on retrouve le quadrilatère primitif, non-seulement en forme, mais en position. Il n'en est pas ainsi généralement. En effet, lorsqu'on passe d'un quadrilatère Q_1 au quadrilatère suivant Q_2, on peut faire tourner soit le triangle ab, soit le triangle cd autour de la diagonale (a, b). Faire tourner le triangle cd revient à faire tourner d'abord le triangle ab, ce qui donne le quadrilatère Q_2, puis à prendre le symétrique Q'_2 de ce quadrilatère par rapport à (a, b). On voit donc que, si en effectuant les opérations d'une manière quelconque on a obtenu une suite de quadrilatères Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_{2p}, on pourrait, en les dirigeant autrement, obtenir une suite formée des quadrilatères symétriques des premiers par rapport

à la position initiale de (a, b). Ce raisonnement pouvant se répéter pour chacune des diagonales successives des quadrilatères $Q_1, \ldots, Q_{2p}$, on voit que, lorsqu'on aura un certain nombre de positions des quadrilatères, on pourra toujours y joindre celles que l'on obtiendra en prenant les symétriques de tous ces quadrilatères par rapport à une diagonale quelconque de l'un d'eux. Or, étant donnée une figure, si l'on prend ses symétriques par rapport à un certain nombre de droites Δ, on n'obtient un nombre limité de positions nouvelles que si ces droites font entre elles des angles commensurables avec π. On voit donc que dans le cas actuel, où l'on a un nombre limité de formes pour les quadrilatères, on n'aura un nombre limité de positions que si les diagonales de ces quadrilatères font des angles commensurables. Or, une grandeur continue ne peut être commensurable que si elle est constante, et le seul quadrilatère dont les diagonales fassent un angle constant est le quadrilatère à diagonales rectangulaires [1]. On voit donc que ce quadrilatère offre un cas tout à fait exceptionnel dans l'application de la théorie précédente.

Les remarques qui précèdent ont peut-être quelque intérêt en ce qu'elles montrent comment la théorie du quadrilatère, si important, dont les diagonales sont rectangulaires, se rattache aux développements que nous avons présentés.

III.

Dans l'article I nous avons obtenu, en partant de l'identité de Jacobi, un système de formules donnant les angles et les diagonales du quadrilatère. Nous allons maintenant développer, par une méthode toute différente, d'autres formules plus simples que les premières.

Reprenons l'équation

$$ae^{i\omega_1} + be^{i\omega_2} + ce^{i\omega_3} + d = 0, \tag{29}$$

et, à la place des variables ω_1, ω_2, ω_3, introduisons les suivantes.

---

[1] Le contre-parallélogramme a ses diagonales faisant un angle nul, et par conséquent constant; mais dans la forme associée, le parallélogramme, l'angle des diagonales cesse d'être constant.

φ_1, φ_2, φ_3, définies par les équations

$$(30)\quad \begin{cases} \omega_1 = \pi - \varphi_2 - \varphi_3, & \omega_2 - \omega_3 = \varphi_2 - \varphi_3, \\ \omega_2 = \pi - \varphi_1 - \varphi_3, & \omega_3 - \omega_1 = \varphi_3 - \varphi_1, \\ \omega_3 = \pi - \varphi_1 - \varphi_2, & \omega_1 - \omega_2 = \varphi_1 - \varphi_2. \end{cases}$$

L'équation (29) se décomposera dans les deux suivantes :

$$\begin{aligned} a\cos(\varphi_2+\varphi_3) + b\cos(\varphi_1+\varphi_3) + c\cos(\varphi_1+\varphi_2) - d &= 0, \\ a\sin(\varphi_2+\varphi_3) + b\sin(\varphi_1+\varphi_3) + c\sin(\varphi_1+\varphi_2) &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en éliminant successivement φ_1, φ_2, φ_3,

$$(31)\quad \begin{cases} a^2+d^2-b^2-c^2 = 2(ad+bc)\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + 2(bc-ad)\sin\varphi_2\sin\varphi_3, \\ b^2+d^2-a^2-c^2 = 2(bd+ac)\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + 2(ac-bd)\sin\varphi_1\sin\varphi_3, \\ c^2+d^2-a^2-b^2 = 2(cd+ab)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + 2(ab-cd)\sin\varphi_1\sin\varphi_2. \end{cases}$$

Posons

$$(32)\quad \begin{cases} \operatorname{cn} 2\mu_1 = \dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}, & \operatorname{dn} 2\mu_1 = \dfrac{bc-ad}{bc+ad}, & \operatorname{sn} 2\mu_1 = \dfrac{2\sqrt{abcd}}{bc+ad}, \\ \operatorname{cn} 2\mu_2 = \dfrac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2(ac+bd)}, & \operatorname{dn} 2\mu_2 = \dfrac{ac-bd}{ac-bd}, & \operatorname{sn} 2\mu_2 = \dfrac{2\sqrt{abcd}}{ac+bd}, \\ \operatorname{cn} 2\mu_3 = \dfrac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(cd+ab)}, & \operatorname{dn} 2\mu_3 = \dfrac{ab-cd}{ab+cd}, & \operatorname{sn} 2\mu_3 = \dfrac{2\sqrt{abcd}}{ab+cd}. \end{cases}$$

Le module sera défini par les équations

$$(33)\qquad \frac{16abcd}{k^2} = \mathrm{A}, \quad \frac{16abcdk'^2}{k^2} = \mathrm{B}.$$

Il n'en est donc pas de même que dans le premier système de formules. On déduit des formules (32) les suivantes :

$$(34)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\mu_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{q_1 q_4}{bc}}, & \operatorname{sn}\mu_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{q_2 q_4}{ac}}, & \operatorname{sn}\mu_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{q_3 q_4}{ab}}, \\ \operatorname{cn}\mu_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{p_{12} p_{13}}{bc}}, & \operatorname{cn}\mu_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-p_{12} p_{14}}{ac}}, & \operatorname{cn}\mu_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-p_{13} p_{14}}{ab}}, \\ \operatorname{dn}\mu_1 = \sqrt{\dfrac{p_{12} p_{13}}{q_2 q_3}}, & \operatorname{dn}\mu_2 = \sqrt{\dfrac{-p_{12} p_{14}}{q_1 q_3}}, & \operatorname{dn}\mu_3 = \sqrt{\dfrac{-p_{13} p_{14}}{q_1 q_2}}, \end{cases}$$

qui entraînent les relations

$$\operatorname{sn}(\mu_1+\mu_2) = +\operatorname{sn}\mu_3, \quad \operatorname{cn}(\mu_1+\mu_2) = -\operatorname{cn}\mu_3, \quad \operatorname{dn}(\mu_1+\mu_2) = \operatorname{dn}\mu_3,$$

et, par conséquent, on a

$$2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 = 0,$$

à un multiple près des périodes. En prenant pour μ_1, μ_2, μ_3 les valeurs comprises entre zéro et K, on aura

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2K.$$

On peut joindre encore aux formules (34) les suivantes :

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{b-a}{c-d} = \dfrac{\operatorname{sn}(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{sn}\mu_3}, & \dfrac{c-a}{b-d} = \dfrac{\operatorname{sn}(\mu_1-\mu_3)}{\operatorname{sn}\mu_2}, \quad \dfrac{b-c}{a-d} = \dfrac{\operatorname{sn}(\mu_3-\mu_2)}{\operatorname{sn}\mu_1}, \\ \dfrac{a+b}{c-d} = \dfrac{\operatorname{cn}(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{cn}\mu_3}, & \dfrac{a+c}{b-d} = \dfrac{\operatorname{cn}(\mu_1-\mu_3)}{\operatorname{cn}\mu_2}, \quad \dfrac{b+c}{a-d} = \dfrac{\operatorname{cn}(\mu_3-\mu_2)}{\operatorname{cn}\mu_1}, \\ \dfrac{c+d}{c-d} = \dfrac{\operatorname{dn}(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{dn}\mu_3}, & \dfrac{b+d}{b-d} = \dfrac{\operatorname{dn}(\mu_1-\mu_3)}{\operatorname{dn}\mu_2}, \quad \dfrac{a+d}{a-d} = \dfrac{\operatorname{dn}(\mu_3-\mu_2)}{\operatorname{dn}\mu_1}. \end{cases}$$

Dans ce qui va suivre, nous supposerons que les signes des radicaux dans les formules (34) aient été choisis de telle manière que l'on ait exactement

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Les valeurs de μ_1, μ_2, μ_3 étant ainsi définies, les équations (31) prennent la forme

$$\operatorname{cn} 2\mu_1 = \cos\varphi_3 \cos\varphi_2 + \operatorname{dn} 2\mu_1 \sin\varphi_3 \sin\varphi_2,$$
$$\operatorname{cn} 2\mu_2 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 + \operatorname{dn} 2\mu_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_3,$$
$$\operatorname{cn} 2\mu_3 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \operatorname{dn} 2\mu_3 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2,$$

et leur solution générale s'obtient en posant

$$(36)\quad \begin{cases} \varphi_1 = \operatorname{am} u_1, & \varphi_2 = \operatorname{am} u_2, \quad \varphi_3 = \operatorname{am} u_3, \\ u_3 - u_2 = 2\mu_1, & u_1 - u_3 = 2\mu_2, \quad u_2 - u_1 = 2\mu_3. \end{cases}$$

On aura donc, pour les angles du quadrilatère, les valeurs

$$\pi - \omega_1 = \operatorname{am} u_2 + \operatorname{am} u_3,$$
$$\pi - \omega_2 = \operatorname{am} u_1 + \operatorname{am} u_3,$$
$$\pi - \omega_3 = \operatorname{am} u_1 + \operatorname{am} u_2,$$

et, si l'on pose

$$u_1 + u_2 = 2\theta_3, \quad u_3 + u_2 = 2\theta_1, \quad u_1 + u_3 = 2\theta_2,$$

ce qui donne

$$(37)\quad \theta_2 - \theta_3 = \mu_1, \quad \theta_1 - \theta_2 = \mu_3, \quad \theta_3 - \theta_1 = \mu_2,$$

on aura, d'après les formules connues,

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned}
\cos\omega_1 &= \frac{\operatorname{sn}^2\theta_1\operatorname{dn}^2\mu_1-\operatorname{cn}^2\theta_1}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_1\operatorname{sn}^2\mu_1}, &\quad \cos(\omega_2-\omega_3) &= \frac{\operatorname{cn}^2\mu_1-\operatorname{dn}^2\theta_1\operatorname{sn}^2\mu_1}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_1\operatorname{sn}^2\mu_1},\\
\sin\omega_1 &= \frac{2\operatorname{sn}\theta_1\operatorname{cn}\theta_1\operatorname{dn}\mu_1}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_1\operatorname{sn}^2\mu_1}, &\quad \sin(\omega_2-\omega_3) &= \frac{2\operatorname{sn}\mu_1\operatorname{cn}\mu_1\operatorname{dn}\theta_1}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_1\operatorname{sn}^2\mu_1},\\
\cos\omega_2 &= \frac{\operatorname{sn}^2\theta_2\operatorname{dn}^2\mu_2-\operatorname{cn}^2\theta_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_2\operatorname{sn}^2\mu_2}, &\quad \cos(\omega_3-\omega_1) &= \frac{\operatorname{cn}^2\mu_2-\operatorname{dn}^2\theta_2\operatorname{sn}^2\mu_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_2\operatorname{sn}^2\omega_2},\\
\sin\omega_2 &= \frac{2\operatorname{sn}\theta_2\operatorname{cn}\theta_2\operatorname{dn}\mu_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_2\operatorname{sn}^2\mu_2}, &\quad \sin(\omega_3-\omega_1) &= \frac{2\operatorname{sn}\mu_2\operatorname{cn}\mu_2\operatorname{dn}\theta_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_2\operatorname{sn}^2\mu_2},\\
\cos\omega_3 &= \frac{\operatorname{sn}^2\theta_3\operatorname{dn}^2\mu_3-\operatorname{cn}^2\theta_3}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_3\operatorname{sn}^2\mu_3}, &\quad \cos(\omega_1-\omega_2) &= \frac{\operatorname{cn}^2\mu_3-\operatorname{dn}^2\theta_3\operatorname{sn}^2\mu_3}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_3\operatorname{sn}^2\mu_3},\\
\sin\omega_3 &= \frac{2\operatorname{sn}\theta_3\operatorname{cn}\theta_3\operatorname{dn}\mu_3}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_3\operatorname{sn}^2\mu_3}, &\quad \sin(\omega_1-\omega_2) &= \frac{2\operatorname{sn}\mu_3\operatorname{cn}\mu_3\operatorname{dn}\theta_3}{1-k^2\operatorname{sn}^2\theta_3\operatorname{sn}^2\mu_3},
\end{aligned}\right.$$

ou, en prenant les tangentes des demi-angles,

$$(39)\quad\left\{\begin{aligned}
\cot\frac{\omega_1}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\theta_1\operatorname{dn}\mu_1}{\operatorname{cn}\theta_1}, &\quad \operatorname{tang}\frac{\omega_2-\omega_3}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\mu_1\operatorname{dn}\theta_1}{\operatorname{cn}\mu_1},\\
\cot\frac{\omega_2}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\theta_2\operatorname{dn}\mu_2}{\operatorname{cn}\theta_2}, &\quad \operatorname{tang}\frac{\omega_3-\omega_1}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\mu_2\operatorname{dn}\theta_2}{\operatorname{cn}\mu_2},\\
\cot\frac{\omega_3}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\theta_3\operatorname{dn}\mu_3}{\operatorname{cn}\theta_3}, &\quad \operatorname{tang}\frac{\omega_1-\omega_2}{2} &= \frac{\operatorname{sn}\mu_3\operatorname{dn}\theta_3}{\operatorname{cn}\mu_3}.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules paraissent plus simples que celles de l'article I. On passe de l'un des systèmes à l'autre par une transformation de Landen.

Les diagonales seront données par les expressions

$$\begin{aligned}
(b, c)^2 &= (a-d)^2\,\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2(\mu_2-\mu_3)\operatorname{sn}^2\theta_1}{1-k^2\operatorname{sn}^2\mu_1\operatorname{sn}^2\theta_1},\\
(a, c)^2 &= (b-d)^2\,\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2(\mu_1-\mu_3)\operatorname{sn}^2\theta_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2\mu_2\operatorname{sn}^2\theta_2},\\
(a, b)^2 &= (c-d)^2\,\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2(\mu_1-\mu_2)\operatorname{sn}^2\theta_3}{1-k^2\operatorname{sn}^2\mu_3\operatorname{sn}^2\theta_3}.
\end{aligned}$$

Avec les formules de ce second système on passera très-facilement du cas traité, où $p_{14} < 0$, à celui où l'on a $p_{14} > 0$: il suffira d'employer la transformation qui change le module k en $\frac{1}{k}$.

IV.

Enfin, on peut traiter cette théorie à un autre point de vue et chercher les expressions des angles en fonction d'un paramètre λ et d'un radical du troisième ou du quatrième degré en λ, c'est-à-dire résoudre la question suivante :

Étant donnée la courbe du troisième degré définie par les équations

$$(40)\qquad \begin{cases} at + bt' + ct'' + dt''' = 0, \\ \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t'} + \dfrac{c}{t''} + \dfrac{d}{t'''} = 0, \end{cases}$$

exprimer en fonction d'un paramètre λ les rapports mutuels de t, t', t'', t'''.

Nous suivrons pour cela la méthode de Clebsch, c'est-à-dire que nous couperons la cubique par une conique variable, assujettie à contenir quatre points fixes de la cubique.

Nous considérerons le faisceau de coniques satisfaisant à cette condition et représenté par l'équation

$$(41)\qquad t''t''' = \lambda tt'.$$

Elles coupent la cubique aux quatre points fixes

$$(t = 0,\ t'' = 0),\ (t' = 0,\ t''' = 0),$$
$$(t' = 0,\ t'' = 0),\ (t = 0,\ t''' = 0),$$

et en deux points variables qui seront déterminés par les équations

$$at + bt' + ct'' + dt''' = 0,$$
$$\lambda(bt + at') + ct''' + dt'' = 0,$$
$$t''t''' = \lambda tt'.$$

En résolvant ces équations, ce qui ne présente aucune difficulté, on est conduit à l'un des quatre systèmes suivants :

$$Q = 4abcd(\lambda + \lambda^3) - L\lambda^2,$$

$$(41)\qquad \begin{cases} \rho t = 2(bd - \lambda ac)(bc - \lambda ad), \\ \rho t' = -2(1 + \lambda^2)abcd + \lambda(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ \qquad - \lambda(c^2 - d^2)^2 - (c^2 - d^2)\sqrt{Q}, \\ \rho t'' = \lambda(bc - \lambda ad)(c^2 + a^2 - b^2 - d^2) + (bc - \lambda ad)\sqrt{Q}, \\ \rho t''' = \lambda(bd - \lambda ac)(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) - (bd - \lambda ac)\sqrt{Q}, \end{cases}$$

$$(42)\quad\left\{\begin{aligned}\rho t &= -2(1+\lambda^2)abcd + \lambda(a^2+b^2)(c^2+d^2)\\ &\qquad -\lambda(c^2-d^2)^2 + (c^2-d^2)\sqrt{Q},\\ \rho t' &= 2(ad-\lambda bc)(ac-\lambda bd),\\ \rho t'' &= \lambda(ac-\lambda bd)(c^2+b^2-a^2-d^2) - (ac-\lambda bd)\sqrt{Q},\\ \rho t''' &= \lambda(ad-\lambda bc)(b^2+d^2-a^2-c^2) + (ad-\lambda bc)\sqrt{Q},\end{aligned}\right.$$

$$(43)\quad\left\{\begin{aligned}\rho t &= \lambda(bc-\lambda ad)(c^2+a^2-b^2-d^2) - (bc-\lambda ad)\sqrt{Q},\\ \rho t' &= \lambda(ac-\lambda bd)(c^2+b^2-a^2-d^2) + (ac-\lambda bd)\sqrt{Q},\\ \rho t'' &= -2\lambda(ac-\lambda bd)(cb-\lambda ad),\\ \rho t''' &= (2\lambda+2\lambda^3)abcd - (a^2+b^2)(c^2+d^2)\lambda^2\\ &\qquad + (a^2-b^2)^2\lambda^2 + \lambda(b^2-a^2)\sqrt{Q},\end{aligned}\right.$$

$$(44)\quad\left\{\begin{aligned}\rho t &= \lambda(bd-\lambda ac)(d^2+a^2-b^2-c^2) + (bd-\lambda ac)\sqrt{Q},\\ \rho t' &= \lambda(ad-\lambda bc)(b^2+d^2-a^2-c^2) - (ad-\lambda bc)\sqrt{Q},\\ \rho t'' &= (2\lambda+2\lambda^3)abcd - (a^2+b^2)(c^2+d^2)\lambda^2\\ &\qquad + \lambda^2(a^2-b^2)^2 - \lambda(b^2-a^2)\sqrt{Q},\\ \rho t''' &= -2\lambda(ad-\lambda bc)(bd-\lambda ac),\end{aligned}\right.$$

formules où ρ désigne le facteur de proportionnalité qui indique que les rapports seuls de t, t', t'', t''' sont déterminés.

Pour que les formules s'appliquent à des angles réels, il suffira de remarquer que, le module de λ étant l'unité, on doit poser

$$\lambda = e^{2i\varphi}.$$

On aura alors

$$\sqrt{Q} = e^{2i\varphi}\sqrt{A\sin^2\varphi - B\cos^2\varphi},$$

A et B étant les quantités définies par les formules (16).

On voit que, si la théorie du quadrilatère se ramène à celle d'une courbe du troisième degré, le mouvement réel que peut prendre le quadrilatère articulé correspond au déplacement d'un point sur une branche imaginaire de la courbe.

J'ajouterai, en terminant, que, toute courbe du troisième degré pouvant être représentée et d'une infinité de manières par deux équations de la forme (40), tous nos systèmes de formules sont applicables par cela même à la courbe générale du troisième degré.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LEMONNIER (H.). — Mémoire sur l'élimination. In-4°, 92 p. — Paris, 1879.

Le travail de M. Lemonnier est divisé en trois Parties, consacrées, la première à l'étude des procédés d'élimination dus à Euler, Sylvester, Bézout, Cauchy, Cayley, et de la liaison de ces procédés, la seconde à l'étude des polynômes qu'il convient de former de proche en proche pour obtenir les conditions nécessaires à l'existence de p racines communes aux deux équations données et l'équation aux racines communes, la troisième enfin à la résolution de deux équations entières à deux inconnues; l'auteur se borne d'ailleurs aux racines communes ayant des modules finis et aux solutions communes pour lesquelles les inconnues ont des valeurs finies, déterminées.

Relativement à la méthode d'Euler-Sylvester, il en énonce le résultat sous la forme suivante :

Étant données deux équations entières en x, $F(x)=0$, $f(x)=0$, de degrés m et n $(m \geqq n)$, soient considérées les $m+n-2p+2$ équations

$$\begin{array}{ll} f(x)=0, & F(x)=0, \\ xf(x)=0, & xF(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-p}f(x)=0, & x^{n-p}F(x)=0; \end{array}$$

si l'on égale à zéro les déterminants formés des coefficients de $x^p, \ldots, x^{m+n-p}$ dans ces équations, en y associant tour à tour ceux de x^{p-1}, x^{p-2}, $\ldots$, x et x^0, les p relations posées par là, entre les coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$, sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations proposées aient p racines communes, finies, déterminées, sans en avoir davantage, pourvu que le déterminant formé des coefficients de $x^p, x^{p+1}, \ldots, x^{m+n-p-1}$, dans les équations

$$\begin{array}{ll} f(x)=0, & F(x)=0, \\ xf(x)=0, & xF(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-p-1}f(x)=0, & x^{n-p-1}F(x)=0, \end{array}$$

soit différent de zéro.

De plus, l'équation aux racines communes s'obtiendra par l'élimination de x^{p+1}, x^{p+2},..., $x^{m+n-p-1}$ entre ces $m+n-2p$ dernières équations. Pour faire l'élimination, on pourra prendre le déterminant des coefficients de x^p, x^{p+1},..., $x^{m+n-p-1}$ dans les $m+n-2p$ équations et le développer par rapport aux coefficients de x^p. Si l'on multiplie les équations respectivement par les multiplicateurs de ces coefficients, et que l'on ajoute les résultats, l'équation qui s'ensuivra sera l'équation aux racines communes. Les coefficients de x^p, x^{p-1},..., x, x^0 y seront le déterminant considéré et ceux qui en résultent quand on y remplace tour à tour la colonne des coefficients de x^p par celles des coefficients de x^{p-1}, x^{p-2},..., x et x^0.

M. Lemonnier applique cette règle à la formation des plus grands communs diviseurs R_1, R_2, R_3, ... de $F(x)$ et $f(x)$, qui répondent successivement aux hypothèses de $p=n-1$, $p=n-2$, $p=n-3$, ..., et remarque tout d'abord que les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir p racines communes sont que les coefficients de R_{n-p+1} soient nuls sans que le premier coefficient de R_{n-p} le soit; dans ces conditions, le polynôme R_{n-p} fournit les p racines communes aux deux équations et divise tous les polynômes R d'indices inférieurs, tandis que les polynômes d'indices supérieurs sont identiquement nuls.

L'auteur compare ensuite les polynômes R à ceux que l'on obtient, comme restes successifs, en procédant par la méthode des divisions à la recherche du plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $f(x)$, et établit entre trois polynômes R consécutifs la relation générale

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha^2 R_{p+2},$$

où α_p désigne le premier coefficient de R_p; quant aux premiers polynômes R, ils sont liés aux polynômes $F(x)$ et $f(x)$ par les relations

$$a^{m-n+1} F(x) = f(x) Q + R_1 (-1)^{\frac{m-n+1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - a^{m-n+1} R_2 (-1)^{\frac{m-n+1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}},$$

a désignant le premier coefficient de $f(x)$ et l'exposant de -1 dans les deux équations étant entier.

On peut remarquer en outre que si l'on applique aux polynômes

R_p, R_{p+1} le même calcul qu'aux polynômes $F(x)$ et $f(x)$, on obtient des polynômes R^1_{p+2}, R^1_{p+3}, ..., qui ne diffèrent des polynômes R_{p+2}, R_{p+3}, ... que par les facteurs a_p^2, a_p^4, ...

Le procédé de Bézout-Cauchy conduit à un autre mode de calcul, souvent plus pratique, des polynômes R, ou plutôt de polynômes qui n'en diffèrent, tout au plus, que par le signe.

Les relations établies entre les polynômes $F(x)$, $f(x)$, R_1, R_2, ... dans le cas où $m - n = 1$ montrent que ces polynômes forment une suite de Sturm; en prenant $f(x) = F'(x)$, on pourra les utiliser pour la détermination des racines comprises entre deux limites, en sorte que, si

$$V = A x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$
$$V_1 = a x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1},$$

V_1 étant la dérivée de V à un facteur positif près, si en outre

$$b x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_m = 0,$$
$$c x^{m-1} + c_1 x^{m-2} + \ldots + c_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sont les équations déduites de V et de V_1 par le procédé de Bézout, les fonctions V_2, V_3, ... de la suite ordinaire de Sturm reviendront aux polynômes

$$R_1 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} x^{m-1} + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ b & b_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \ldots + \begin{vmatrix} a & a_{m-1} \\ b & b_{m-1} \end{vmatrix},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ b & b_1 & b_3 \\ c & c_1 & c_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_{m-1} \\ b & b_1 & b_{m-1} \\ c & c_1 & c_{m-1} \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou, sous une autre forme, aux polynômes

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 \\ a_1 & a & a_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_2 \\ a & a_1 & a_3 \\ A & A_1 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a_1 & a_2 \\ 0 & a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a_1 & a_3 \\ 0 & a & a_1 & a_2 & a_4 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_5 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_4 \end{vmatrix} x^{m-4} + \ldots.$$

M. Lemonnier constate ensuite que les premiers coefficients de ces polynômes R_1, R_2, ..., lorsque $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$, sont précisément, au cas de $A = 1$, les nombres p_μ de M. Borchardt, savoir

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

où s_i désigne la somme des puisances de degré i des racines de $F(x)$.

Enfin, dans la dernière Partie du Mémoire, on montre quel parti on peut tirer, pour la résolution de deux équations à deux inconnues x, y de la formation des polynômes R obtenus en éliminant x, polynômes dont les coefficients sont maintenant des fonctions en y; M. Lemonnier, en suivant une méthode dont le principe est dû à M. Bouquet, évalue le degré maximum de y dans chacun des coefficients de ces polynômes.

La comparaison du procédé de résolution de deux équations donné dans ce travail avec celui qui est dû à M. Labatie, ainsi que plusieurs applications numériques par lesquelles l'auteur termine, en met nettement les avantages en évidence.

SCHERING (E.). — ANALYTISCHE THEORIE DER DETERMINANTEN. Göttingen, 1877. In-4°, 41 pages (¹).

L'auteur reprend la théorie des déterminants à son début. Il représente un quelconque des n^2 éléments d'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre par la notation suivante :

$$E h_i k_j,$$

où les i et les j désignent les rangs respectifs de la ligne horizontale et de la colonne verticale auxquelles appartient l'élément considéré; si maintenant on considère deux éléments différents, les deux lignes

(¹) *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften*, t. XXII.

et les deux colonnes correspondantes, la disposition des deux lignes sera semblable à celle des colonnes, si la première colonne suit ou précède la deuxième colonne en même temps que la première ligne suit ou précède la deuxième ligne, et dissemblable dans le cas contraire. Un terme du déterminant est le produit de n éléments quelconques, multiplié par autant de facteurs égaux à -1 qu'on trouve de dispositions dissemblables dans les lignes et les colonnes, en prenant deux éléments quelconques de ce terme, et multiplié par zéro si deux éléments appartiennent à la même ligne ou à la même colonne ; le déterminant

$$E(h_1, h_2, \ldots, h_n \mid k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

est la somme de tous les termes ainsi obtenus.

Considérons maintenant un terme quelconque du déterminant et désignons respectivement par

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

et par

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$$

les premiers et les seconds indices correspondants des éléments qui entrent comme facteurs dans le terme considéré, indices relatifs, les premiers aux lignes horizontales, les seconds aux lignes verticales, et pris les uns parmi les nombres

$$h_1, h_2, \ldots, h_n,$$

et les autres parmi les nombres

$$k_1, k_2, \ldots, k_n,$$

ne différant même de ces nombres que par l'ordre, si le terme considéré est un terme *propre* (non affecté du coefficient zéro) ; puis introduisons une fonction $\mathfrak{Z}$ définie par les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Z}(x) = 1, \quad \text{pour } x > 0,\\
&\mathfrak{Z}(x) = -1, \quad \text{pour } x < 0.\\
&\mathfrak{Z}(0) = 0,\\
&\mathfrak{Z}(xy) = \mathfrak{Z}(x)\,\mathfrak{Z}(y).
\end{aligned}$$

On reconnaîtra sans difficulté que le terme considéré pourra s'é-

crire

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=n} \mathrm{E}_{\eta_\nu, x_\nu} \times \mathfrak{Z} \prod_{m=2}^{m=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=m-1} (\eta_m - \eta_\mu)(x_m - x_\mu)$$

$$\times \prod_{b=2}^{b=n} \prod_{\beta=1}^{\beta=b-1} (h_b - h_\beta)(k_b - k_\beta).$$

En faisant la somme de tous les termes analogues, on obtient le déterminant. Cette sommation peut d'ailleurs s'effectuer de diverses manières : on peut, par exemple, regarder le déterminant comme une somme n^{uple} dont les termes s'obtiendront en attribuant séparément, dans la formule précédente, aux indices η toutes les valeurs $h_1, h_2, \ldots, h_n$, ou aux indices x toutes valeurs $k_1, k_2, \ldots, k_n$; ou encore comme le résultat de deux sommations n^{uples} dont les termes s'obtiendront en attribuant séparément, dans la même formule, les valeurs $h_1, h_2, \ldots, h_n$ et les valeurs $k_1, k_2, \ldots, k_n$ aux indices η et x. Dans ce dernier cas, le résultat doit être divisé par $1.2.3\ldots n$, car chaque terme *propre* du déterminant se trouve évidemment répété ce nombre de fois. Il est à peine utile d'ajouter que les propriétés élémentaires des déterminants résultent immédiatement de ces formules; de même, l'introduction de la fonction $\mathfrak{Z}$ et des produits de différences d'indices permet à M. Schering de donner les formules au moyen desquelles on passe d'un déterminant

$$\mathrm{E}(h_1, h_2, \ldots, h_n \mid k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

à un autre déterminant

$$\mathrm{E}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où les indices

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n; \quad x_1, x_2, \ldots, x_n$$

ne diffèrent respectivement que par la façon dont ils sont rangés des indices

$$h_1, h_2, \ldots, h_n; \quad k_1, k_2, \ldots, k_n;$$

la convention

$$\mathfrak{Z}(0) = 0$$

permettra même d'étendre ces formules au cas où les premiers in-

dices, étant seulement assujettis à être pris parmi les seconds, ne sont pas tous nécessairement différents.

A la somme n^{uple}, qui constitue le déterminant, peut être substituée une somme de produits de sommes ν^{uples} par des sommes $n-\nu^{\text{uples}}$: l'auteur est ainsi conduit à des formules générales qui donnent, sous diverses formes, la décomposition d'un déterminant d'ordre n en produits de mineurs d'ordre $n-\nu$ par des mineurs d'ordre ν; ces formules se généralisent et conduisent à la décomposition d'un déterminant en sommes de produits de trois déterminants mineurs, etc.

Le cas où les premiers indices $h_1, h_2, \ldots, h_n$ ont les mêmes valeurs que les seconds $k_1, k_2, \ldots, k_n$, en sorte que l'on ait

$$h_\lambda = k_\lambda, \quad \text{pour} \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n,$$

conduit à des conclusions intéressantes.

L'auteur nomme *cycle* de couples d'indices une suite de couples d'indices h et k tels que le premier indice de chaque couple soit égal au second indice du couple précédent, le dernier indice du dernier couple étant égal au premier indice du premier couple; le nombre de couples qui entrent dans un cycle simple est l'ordre de ce cycle. Il est aisé de voir qu'un système de couples de valeurs

$$(\eta_1, \varkappa_1), \; (\eta_2, \varkappa_2), \; \ldots, \; (\eta_n, \varkappa_n),$$

où les η sont différents entre eux, ainsi que les $\varkappa$, mais où les premiers nombres, à l'ordre près, ont les mêmes valeurs que les seconds, peut, en rangeant les couples convenablement, être décomposé en cycles simples dont les ordres ont une somme égale à n; chaque couple entre dans un seul de ces cycles; enfin la décomposition ne peut s'effectuer que d'une seule manière. Le signe d'un terme du déterminant est $+$ ou $-$, selon que le nombre de cycles simples qui composent la série de couples d'indices qui le caractérisent est, ou non, de même parité que l'ordre du déterminant, ou encore selon que le nombre de cycles d'ordre pair est pair ou impair.

Ces considérations sont, dans le Mémoire de M. Schering, appliquées avec succès aux déterminants symétriques gauches.

Si, en général, on considère un cycle du second ordre, chacun des couples qui le constitue est dit *inverse* de l'autre. Il est clair que,

si dans un terme quelconque d'un déterminant on remplace chaque couple d'indices par son inverse, on obtiendra un terme différent ou non, selon que, parmi tous les cycles dans lesquels on peut décomposer la série de couples d'indices qui caractérise ce terme, il y aura, ou non, un cycle au moins d'ordre supérieur au second.

Si maintenant on suppose que le déterminant considéré soit symétrique gauche, d'ordre pair, on voit aisément, au moyen de ce qui précède, que les seuls termes qui ne se détruisent pas dans le développement du déterminant sont ceux où les cycles dans lesquels se décompose la série de couples d'indices sont tous d'ordre pair.

Une dernière considération, celle du partage d'un cycle d'ordre pair en deux *moitiés,* formées, l'une au moyen des couples qui, dans le cycle, occupent un rang impair, l'autre au moyen des couples de rang pair, moitiés qui sont ainsi composées chacune d'éléments tous différents entre eux, identiques, à l'ordre près, aux éléments de l'autre moitié, conduit l'auteur à une formule dans laquelle n'entrent explicitement que les termes où la série de couples d'indices se décompose en cycles d'ordre pair, et lui permet enfin de mettre le déterminant symétrique gauche sous la forme d'un carré parfait. J. T.

MÉLANGES.

QUELQUES THÉORÈMES NOUVEAUX SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. S. KANTOR,
à Vienne.

Dans un Mémoire publié dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie impériale des Sciences de Vienne (numéro de juin 1878, IIe Section), j'ai essayé de déduire, par une méthode qui n'avait pas encore été employée, les propriétés les plus essentielles et déjà connues de cette courbe, étudiée avec détail d'abord par Steiner et ensuite par Cremona. A l'aide de cette méthode, qui repose sur des

théorèmes susceptibles d'une grande extension, concernant les groupes de points de la circonférence du cercle, j'ai établi, dans la présente Note, un certain nombre de nouveaux théorèmes qui pourront, je crois, offrir assez d'intérêt pour obtenir une place dans le *Bulletin*.

Soient H_4^3 l'hypocycloïde en question, r le rayon et m le centre du cercle qui lui est triplement tangent.

Le segment intercepté par la courbe elle-même sur une tangente est $2r$.

1. *Si d'un point* I *du plan on mène les trois tangentes, et que* t_1, t_2, t_3 *soient les segments compris entre* I *et les points de contact, on aura*

$$t_1 \sin \widehat{t_2 t_3} = t_2 \sin \widehat{t_3 t_1} = t_3 \sin \widehat{t_1 t_2}.$$

2. *Un triangle quelconque étant circonscrit à* H_4^3, *le centre de son cercle circonscrit sera à la même distance de* m *que le point de concours de ses trois hauteurs.*

3. *Deux triangles circonscrits à* H_4^3, *et tels que les côtés de l'un soient respectivement perpendiculaires aux côtés de l'autre, auront le même point de concours des trois hauteurs.*

4. *Si l'on désigne par* r_1, r_2 *les rayons des cercles circonscrits à ces deux triangles, on aura toujours*

$$r_1^2 + r_2^2 = 4r^2.$$

5. *Les troisièmes tangentes* τ', τ'', τ''', *menées à* H_4^3 *des sommets d'un triangle circonscrit* $t' t'' t'''$, *sont également inclinées sur les côtés opposés du triangle* t, *et font avec eux l'angle* arc sin $\frac{r_1}{2r}$. *Elles forment un triangle semblable à* $t' t'' t'''$, *dont le cercle circonscrit a pour rayon* $\frac{r_1 r'_1}{r}$ *et pour centre le point de concours des hauteurs du triangle* t.

6. *On obtient le même triangle* τ, *en partant d'un triangle* t,

dont les côtés sont des tangentes perpendiculaires aux côtés du précédent.

7. *Par les points d'intersection* $\tau' t'$, $\tau'' t''$, $\tau''' t'''$, *si nous menons encore des tangentes* τ'_1, τ''_1, τ'''_1 *à la courbe, ces tangentes formeront un triangle dont les angles sont les doubles ou les suppléments des doubles de ceux du triangle* t, *et dont le rayon du cercle circonscrit est le même que celui du triangle* t.

8. *Soit un quadrilatère* $t_1 t_2 t_3 t_4$ *circonscrit à la courbe. La droite* R *qui joint les milieux des diagonales de ce quadrilatère est parallèle à sa tangente opposée* ([1]), *et située à égale distance de cette tangente et de l'axe de la parabole inscrite au quadrilatère.*

Dans un quadrilatère quelconque, les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles se trouvent eux-mêmes sur un cercle. Soit S_μ le centre de l'hyperbole équilatère passant par ces quatre points. De plus, les quatre cercles en question se coupent en un point, dit le *point de Miquel* du quadrilatère.

Dans un pentagramme, on sait que les cinq points de Miquel de ses quadrilatères sont situés sur un même cercle, le *cercle de Miquel* du pentagramme.

9. *Le cercle de Miquel de tout pentagramme circonscrit à* H_4^3 *dégénère en une droite* (g_ν).

10. *Soient* t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 *cinq tangentes de notre courbe; les points* S_μ *des cinq quadrilatères* t *sont situés sur un cercle et y déterminent un pentagone dont les angles sont égaux à ceux du pentagramme* t. *Sur ce cercle est situé aussi le centre de la section conique tangente aux cinq* t.

11. *Le produit des axes de cette dernière conique est égal à*

$$\frac{\sqrt{r_{123} r_{124} r_{125} r_{134} r_{135} r_{145} r_{234} r_{235} r_{245} r_{345}}}{4 r^3},$$

([1]) *Voir* Cremona, *Introduzione*, 67, V, où est défini le *point opposé* du quadrilatère se réduisant à une droite.

r_{123}, r_{124}, ... *désignant les rayons des cercles circonscrits aux triangles* $t_1 t_2 t_3$, $t_1 t_2 t_4$, ...

Si l'on désigne par M le centre du cercle mentionné ci-dessus, qui appartient à un quadrilatère, les cinq points M d'un pentagramme seront situés sur un cercle, que nous nommerons M_v.

12. *La droite* g_v, *mentionnée plus haut, appartenant à* $t_1 \ldots t_5$, *passe par le centre de* M_v. *Ce centre et celui du cercle des* S_μ *sont situés sur une droite passant par* m, *de telle sorte que la distance de* m *au premier est double de la distance de* m *au second.*

13. *Les tangentes* $t_1, \ldots, t_5$ *forment par leur combinaison dix triangles. Les intersections des hauteurs de ceux-ci sont les sommets d'un pentagramme complet, qui jouit de propriétés remarquables. Ses divers quadrilatères ont des droites* R (*voir* le n° 8), *qui sont perpendiculaires aux cinquièmes côtés respectifs du pentagramme. Les centres des cercles circonscrits à tous ses dix triangles sont situés sur le cercle triplement tangent à la courbe* H_4^3 *donnée et qui a pour centre* m. *Le produit des axes de la conique tangente aux cinq côtés de ce pentagramme est égal à*

$$8r^2\sqrt{\cos t_1 t_2 \cos t_1 t_3 \cos t_1 t_4 \ldots \cos t_3 t_4 \cos t_3 t_5 \cos t_4 t_5}.$$

La conique qui touche les tangentes $t_1, \ldots, t_5$ de H_4^3 a encore une autre tangente commune avec H_4^3, puisque H_4^3 est de la troisième classe. J'appellerai cette sixième tangente *tangente adjointe* des cinq premières.

14. *La droite* g_v *du pentagramme* t *touche également la conique inscrite, et est parallèle à la tangente adjointe du pentagramme.*

15. *Si, avec six tangentes de* H_4^3 *on forme un hexagramme de Brianchon, deux* TRIANGLES COMPLÉMENTAIRES *quelconques de cet hexagramme, c'est-à-dire deux triangles contenant à eux deux les six côtés de la figure, auront deux cercles circonscrits d'égal rayon.*

16. *Soit* $t_1 \ldots t_6$ *un hexagramme quelconque circonscrit à* H_4^3 ;

les droites qui joignent deux à deux les centres des divers couples de triangles complémentaires de cet hexagramme concourent en un même point, qui est leur milieu commun.

17. *Soient* $t_1, \ldots, t_6$ *six tangentes quelconques de* H_4^2; *les centres des six coniques tangentes aux droites* t, *prises cinq à cinq, sont situés sur un cercle et forment sur ce cercle un hexagone, dont les angles sont égaux à ceux que forment entre elles les droites* t. *Le centre de ce cercle est le point d'intersection des six cercles* S_μ (*voir* plus haut), *et son rayon est*

$$r \sin(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6),$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_6$ *désignant les angles que font les* t *avec une même tangente de rebroussement de* H_4^2.

18. *A cinq quelconques des six tangentes* t *correspond une tangente adjointe, et chacune de ces tangentes adjointes fait le même angle avec la sixième tangente* t *correspondante.*

19. *Si l'on considère dix tangentes de notre courbe, les tangentes adjointes de deux pentagrammes complémentaires quelconques se coupent sur une nouvelle tangente de* H_4^3, *qui est la* TANGENTE ADJOINTE *du décagramme* (¹).

Etc., etc.

20. *Tous les triangles circonscrits à* H_4^3 *et semblables à un triangle donné ont les centres de leurs cercles circonscrits situés sur un cercle de centre* m *et de rayon* $r\sqrt{1 - 8\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *étant les angles du triangle. Sur le même cercle sont situées aussi les intersections de hauteurs de tous ces triangles, et leurs droites d'Euler enveloppent une seconde courbe* H_4^3, *située symétriquement, par rapport à* m, *avec la courbe donnée.*

Quelques autres théorèmes sont relatifs aux coniques triplement tangentes à la courbe.

(¹) Le théorème général correspondant se trouve dans le Mémoire cité.

21. *Toutes les coniques triplement tangentes* (¹) *sont des ellipses* V, *et leurs triangles de tangentes communs avec* H_4^3 *ont tous le rayon* $2r$ (*et par suite le plus grand rayon que puisse avoir un triangle circonscrit à* H_4^3).

22. *D'un point du plan on mène trois normales à la courbe. Leurs pieds sont les points de contact avec* H_4^3 *d'une ellipse* V, *dont le centre est le milieu de la droite* P_m.

23. *Autour d'un point quelconque* I *du plan comme centre on peut décrire une ellipse* V *et une seule. Les demi-axes de cette ellipse sont* $r + h$ *et* $r - h$, *h désignant la distance du point* I *au point m.*

24. *Par deux points du plan on peut faire passer neuf ellipses* (*réelles ou imaginaires*) *triplement tangentes à* H_4^3.

25. *Toutes les ellipses triplement tangentes* V, *dont les centres remplissent une droite g, ont un point commun. Chacune d'elles coupe la courbe* H_4^3 *en deux points, et les deux tangentes à* H_4^3 *menées en ces points ont un point d'intersection; tous ces points d'intersection sont eux-mêmes situés sur une ellipse* V. *Le centre de celle-ci est le pôle de g par rapport au cercle* m^2.

De plus :

26. *Parmi les coniques qui touchent trois tangentes de* H_4^3, *il y en a trois qui sont osculatrices à la courbe en un autre point. Les trois tangentes aux points d'osculation forment un triangle équilatéral ayant le même rayon du cercle circonscrit que le triangle formé par les tangentes données.*

Pour terminer cette Note, j'indiquerai encore quelques lieux dont la recherche me paraît être le premier exemple de l'application des méthodes géométriques à des problèmes généraux, relatifs à des courbes d'ordres supérieurs (²).

(¹) *Voir* WEYR, *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse*, p. 10, Note C, art. III.

(²) L'application de l'Analyse à ces problèmes, il est vrai, a été déjà indiquée, entre autres par Lacroix, et dans le *Journal de Schlömilch*, t. XIX, par M. Enneper.

27. *En chaque point de* H_4^3 *il existe une seule conique* (¹) *ayant avec la courbe un contact du quatrième ordre. Je trouve, pour le produit des axes de cette conique, la formule*

$$\frac{\rho^5}{4^6 r^3},$$

ρ désignant le rayon de courbure en ce point.

28. *Les centres de toutes ces coniques ayant un contact du quatrième ordre avec* H_4^3 *ont pour lieu une hypocycloïde à six points de rebroussement, dont trois coïncident avec les points de rebroussement de* H_4^3.

29. *Les centres de toutes les coniques qui touchent une tangente donnée t de la courbe, et qui ont en outre avec celle-ci, en un point variable, un contact du troisième ordre, sont situés sur une hypocycloïde à cinq points de rebroussement, qui sont situés sur un cercle de rayon* $\frac{5}{2}r$. *Le centre de ce cercle ou le point de concours des cinq tangentes de rebroussement est le point milieu de la droite ms, s étant le* MILIEU (²) *de la tangente donnée.*

30. *En un point* P *de la courbe, celle-ci est touchée par une infinité de coniques ayant un contact du premier ordre; les centres de toutes celles qui ont avec* H_4^3 *un contact du second ordre ont pour lieu une hypocycloïde à quatre rebroussements, dont le cercle a pour rayon* $2r$ *et pour centre le* MILIEU *de la tangente fixe* (*en* P).

31. *Il y a, de plus, une infinité de coniques ayant, en un point* P *de* H_4^3, *un contact du second ordre avec cette courbe; le lieu des centres de celles qui touchent encore la courbe en un autre point est encore une hypocycloïde à trois rebroussements* (H_4^3), *dont le point de symétrie divise extérieurement la droite ms* (*s étant*

(¹) Pour notre courbe, cette conique est toujours une ellipse.

(²) C'est ainsi que Steiner appelle celui des points d'intersection de t_1 avec le cercle m^2 par lequel ne passe pas la tangente perpendiculaire à t_1.

le MILIEU *de la tangente fixe en* P) *dans le rapport de* 3 : 1, *et dont les sommets sont situés sur un cercle de rayon r.*

32. *Les centres de toutes les coniques qui touchent deux tangentes données de* H_4^3 *et qui, de plus, ont avec cette courbe un contact du second ordre ont pour lieu une hypocycloïde à quatre rebroussements, dont le centre est le point milieu de la distance des* MILIEUX *des deux tangentes fixes, et dont les sommets sont situés sur un cercle de rayon* $\frac{3r}{2}$.

33. *Les centres de toutes les coniques qui touchent trois tangentes données d'une courbe* H_4^3 *et qui touchent encore celle-ci en un autre point ont pour lieu une nouvelle courbe* H_4^3, *dont les sommets sont situés sur un cercle de rayon* $\frac{3r}{2}$ *et dont le centre est au milieu de la droite qui joint m au centre du cercle circonscrit au triangle des trois tangentes données.*

Si par un point de la courbe on mène une parallèle à l'axe de la parabole qui a en ce point un contact du troisième ordre avec la courbe, on peut, avec Cayley, appeler cette droite l'*axe de déviation* (¹) pour ce point de la courbe. On a alors ce théorème :

34. *Les axes de déviation pour tous les points de notre courbe* H_4^3 *enveloppent une épicycloïde à six rebroussements, ayant pour centre m, et dont les sommets se trouvent sur un cercle de rayon* $\frac{3r}{2}$.

On trouve aussi *a priori* que cette courbe coïncide avec celle du théorème 28.

35. *Le paramètre de la parabole* $y^2 = 2px$ *ayant en* P *un contact du troisième ordre est*

$$2p = 4r(\sin 3\mu)^4,$$

(¹) *Voir* aussi TRANSON. *Journal de Liouville*, t. VI, 1841.

μ étant l'angle de la tangente en P *avec une des tangentes de rebroussement.*

36. *Les foyers des paraboles ayant un contact du troisième ordre ont pour lieu une épicycloïde à trois points de rebroussement, lesquels coïncident avec ceux de* H_4^3.

SUR UN NOUVEL APPAREIL A LIGNE DROITE DE M. HART;

Par M. G. DARBOUX.

Dans les *Proceedings of the London Mathematical Society* (vol. VIII, p. 288), M. Hart, qui avait déjà trouvé un premier système articulé réalisant avec cinq tiges seulement la description mécanique de la ligne droite, a fait connaître une nouvelle solution du même problème dans laquelle il emploie le même nombre de tiges. Le nouvel appareil de M. Hart, tout à fait différent du

Fig. 1.

premier, nous paraît offrir le plus grand intérêt. Récemment M. Kempe l'a retrouvé, en étudiant une question plus générale sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir (1). Pour le moment, nous nous proposons d'exposer la méthode de M. Hart, en la géné-

(1) A.-B. Kempe, *On conjugate Four-piece Linkages* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. IX, p. 133, n° 132).

ralisant quelque peu et en mettant en évidence quelques conséquences très-simples des résultats obtenus par l'auteur

Soit ABCDP un pentagone articulé fixé par les deux sommets A et B. Le mouvement de cette figure dépend de deux paramètres; par exemple, on peut prendre arbitrairement les angles en A et en B; nous achèverons de déterminer ce mouvement par la condition que les angles en C et en D soient égaux. Nous allons voir que cette condition, qu'il serait difficile de réaliser mécaniquement, peut être remplacée par celle-ci, que deux points H, E convenablement choisis sur AD et sur BC soient maintenus à une distance constante et par conséquent reliés par une tige de longueur convenable.

En effet, déterminons un point H sur AD, par la condition

$$\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{PD}} = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{CB}}.$$

Les deux triangles PHD, PCB, ayant les angles C et D égaux par hypothèse, seront semblables; on aura donc

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PB}},$$

$$(2) \qquad \text{angle HPD} = \text{angle PBC}.$$

De même, déterminons un point E sur BC par la condition

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AD}}.$$

Les deux triangles PDA, PCE seront semblables, et l'on aura

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{PD}} = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{AP}},$$

$$(4) \qquad \text{angle APD} = \text{angle PEC}.$$

Je vais démontrer que les points H et E sont à une distance invariable. Mais auparavant je désignerai, pour plus de netteté, par des lettres les différents segments de la figure. Posons

$$\mathrm{AB} = a, \quad \mathrm{AH} = b, \quad \mathrm{HD} = b', \quad \mathrm{DP} = \beta,$$
$$\mathrm{BE} = c, \quad \mathrm{EC} = c', \quad \mathrm{CP} = \gamma.$$

Les égalités (1), (3) nous donnent, entre ces lignes, les relations

$$\beta\gamma = b'(c + c') = c'(b + b'),$$

d'où l'on déduit

$$bc' - cb' = 0.$$

Posons

(5) $$b' = bk, \quad c' = ck,$$

on aura

(6) $$\beta\gamma = bck(1 + k),$$

et des égalités (1) et (3) on déduira aussi

(7) $$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PB}} = \frac{\beta}{c(1 + k)}, \quad \frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{PA}} = \frac{\gamma}{b(1 + k)}.$$

Cela posé, en vertu des équations (2), (4), les angles APH, BPE sont égaux comme différences d'angles égaux, et, par conséquent, les angles en P des deux triangles HPE, APB sont aussi égaux. On aura donc, en désignant par P leur valeur commune,

$$\overline{\mathrm{HE}}^2 = \overline{\mathrm{PH}}^2 + \overline{\mathrm{PE}}^2 - 2\,\overline{\mathrm{PH}}.\overline{\mathrm{PE}}\cos\mathrm{P}.$$

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2 - 2\,\overline{\mathrm{PA}}.\overline{\mathrm{PB}}\cos\mathrm{P}.$$

En éliminant le cosinus inconnu et remplaçant PH, PE par leurs valeurs tirées des équations (7), on trouve

$$\overline{\mathrm{HE}}^2 = \frac{c\gamma - b\beta}{b^2c^2(1 + k)}\left(c\gamma\,\overline{\mathrm{PA}}^2 - b\beta\,\overline{\mathrm{PB}}^2\right) + \frac{a^2k}{1 + k},$$

On a d'ailleurs, dans les deux triangles APD, BCP,

$$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \beta^2 + b^2(1 + k)^2 - 2b(1 + k)\beta\cos\theta,$$

$$\overline{\mathrm{BP}}^2 = \gamma^2 + c^2(1 + k)^2 - 2c(1 + k)\gamma\cos\theta,$$

θ désignant la valeur commune des angles C et D. Éliminant θ, on trouve

(8) $$c\gamma\,\overline{\mathrm{PA}}^2 - b\beta\,\overline{\mathrm{PB}}^2 = (b\gamma - c\beta)bc(1 + k)$$

et, par conséquent, on a

$$\overline{\mathrm{HE}}^2 = \frac{(c\gamma - b\beta)(b\gamma - c\beta)}{bc(1 + k)} + \frac{a^2k}{1 + k}:$$

HE est donc constant, comme il fallait le démontrer, et, en désignant par d sa valeur, on a

$$(9)\qquad k(a^2-d^2)=d^2+\frac{(c\gamma-b\beta)(c\beta-b\gamma)}{bc}.$$

Ainsi, l'on pourra produire ce mouvement particulier du pentagone articulé, dans lequel les angles C et D variables sont constamment égaux, en réunissant les deux points H et E par une tige de la longueur d définie par l'équation précédente.

Mais alors l'équation (8), donnant une relation entre les distances du point P aux deux points fixes A et B, est l'équation du lieu du point P; ce lieu est, en général, un cercle ayant son centre sur la droite AB.

Si dans l'équation (8) on remplace PA, PB en fonction de PH, PE, on est conduit à l'équation

$$b\beta\,\overline{\mathrm{PE}}^2-c\gamma\,\overline{\mathrm{PH}}^2=bck(b\gamma-c\beta),$$

et l'on voit que, si au lieu de fixer A et B on fixait H et E, le lieu de P serait encore un cercle ayant son centre sur HE. En étudiant plus complétement cette figure, on retrouverait les systèmes de deux quadrilatères semblables considérés par M. Kempe dans le Mémoire que nous avons déjà cité.

Si l'on a

$$(10)\qquad c\gamma=b\beta,$$

l'équation (8) deviendra

$$\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2=\frac{b}{\gamma}(1+k)(b\gamma-c\beta),$$

et le lieu du point P deviendra une droite perpendiculaire à AB. C'est le résultat signalé d'abord par M. Hart. On a alors

$$(11)\qquad \begin{cases} k=\dfrac{d^2}{a^2-d^2},\\[2mm] \beta=\dfrac{acd}{a^2-d^2},\quad b'=\dfrac{bd^2}{a^2-d^2},\quad b+b'=\dfrac{ba^2}{a^2-d^2},\\[2mm] \gamma=\dfrac{abd}{a^2-d^2},\quad c'=\dfrac{cd^2}{a^2-d^2},\quad c+c'=\dfrac{ca^2}{a^2-d^2}.\end{cases}$$

Cette remarquable solution laisse donc entièrement arbitraires les quatre côtés du quadrilatère articulé ABEH. Le lieu du point P est alors défini par l'équation

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{a^2 - d^2}.$$

On voit que, si la théorie est un peu longue, le résultat est extrêmement simple.

Dans cet appareil, le mouvement de PD est celui d'une droite dont un point D décrit un cercle pendant qu'un autre point P décrit une droite. Cherchons si l'on peut disposer des dimensions des différentes tiges de telle manière que tous les points de cette droite décrivent des ellipses. Il faudra pour cela : 1° que la droite décrite par le point P passe en A ; 2° que PD = AD.

En exprimant ces deux conditions, on trouve

$$c^2 - b^2 = a^2 - d^2, \quad ba = cd,$$

et, par conséquent,

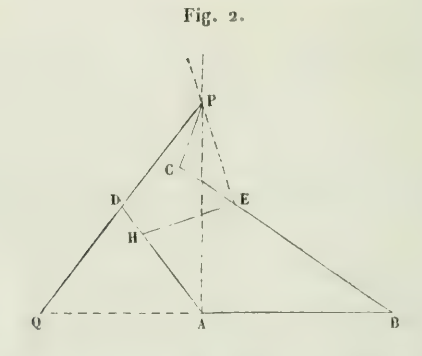
$$b = d, \quad c = a.$$

Alors l'appareil offre la disposition indiquée sur la figure. On a

$$AH = HE, \quad AB = BE, \quad AD = DP, \quad PC = CE.$$

Si l'on prolonge DP d'une longueur DQ = DP, le point Q décrit la

Fig. 2.



droite AB. Le mouvement de la barre PQ est donc celui d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux

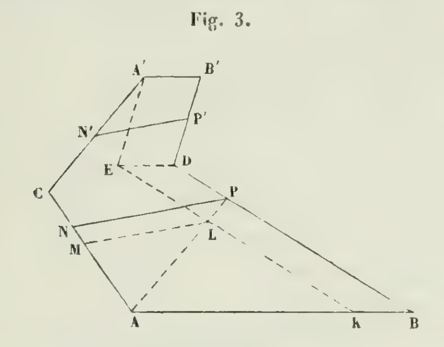
droites rectangulaires. Tous les points invariablement liés à PQ et d'où l'on voit PQ sous un angle droit décriront des droites passant par A. Les points de PQ décrivent des ellipses.

Les collections de la Faculté des Sciences contiennent un très-beau modèle de cet appareil, exécuté par M. Bréguet. Ce modèle est disposé de telle manière, qu'au lieu de fixer les points A, B on peut fixer les points P et D. Alors tous les points de la droite AB, devenue mobile, décrivent des limaçons de Pascal.

L'ellipse et le limaçon de Pascal sont donc des courbes que l'on peut décrire, comme la ligne droite, par l'emploi de cinq tiges seulement.

Voilà donc une première conséquence des recherches de M. Hart.

Fig. 3.



En voici une seconde que nous nous contenterons d'indiquer en quelques mots.

Considérons l'hexagone articulé ABDB'A'CA, dont les points A, B sont fixes. Le mouvement de cette figure dépend de trois paramètres. Achevons de le déterminer par la condition que les angles C, D soient égaux et que A'B' soit parallèle à AB. Je dis que ces deux conditions peuvent être remplacées par celle-ci, que deux points N et P convenablement choisis sur AC, BD soient à une distance invariable ainsi que deux points N'P' pris sur A'C, B'D.

En effet, menons, par A', A'E égale et parallèle à B'D, puis EK égale et parallèle à DB. La figure A'EKAC sera un pentagone identique à celui dont nous avons étudié le mouvement, les angles en C et en E étant égaux. Il y aura donc deux points M et L sur EK et AC qui seront à une distance invariable. Si l'on prolonge AL

jusqu'en P, et qu'on mène NP parallèle à AL, le quadrilatère NPBA sera homothétique au quadrilatère AKLM. On aura donc

$$\frac{NP}{LM} = \frac{AK}{AB} = \frac{AB - A'B'}{AB};$$

NP sera donc constant comme LM.

Par raison de symétrie, ou en répétant le même raisonnement, on reconnaît qu'il y a de même deux points N', P' sur A'C, B'D qui demeurent à une distance invariable, en sorte que le mouvement de l'hexagone sera déterminé si l'on réunit par des tiges de longueurs convenables ces couples de points (N, P), (N', P').

Du reste, si les proportions des côtés de l'hexagone et par conséquent celles des côtés du pentagone A'CAKE sont convenablement choisies, c'est-à-dire si l'on a

$$\overline{A'C}.\overline{CA} = \overline{B'D}.\overline{DB},$$

le point A' décrira une droite perpendiculaire à AB; il en sera de même de tous les points de A'B'. On aura donc réalisé le mouvement d'une droite demeurant toujours horizontale pendant que tous ses points décrivent des verticales (¹).

Il est clair que, si l'on réunit dans l'espace deux appareils égaux de ce genre, situés dans deux plans verticaux faisant un angle quelconque et reliés par leurs points A' de telle manière que les deux

---

(¹) Voici quelles sont les dimensions des différentes tiges. Posons.

$$CA = \beta, \quad DB = \gamma, \quad AB = a,$$
$$CA' = \beta', \quad DB' = \gamma', \quad A'B' = a'.$$

On devra avoir

$$\beta\beta' = \gamma\gamma',$$

et l'on trouvera

$$AN = \frac{a}{a - a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\gamma}, \qquad BP = \frac{a}{a - a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\beta}, \qquad NP = a\,\frac{\beta'}{\gamma},$$
$$A'N' = \frac{a'}{a - a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\gamma'}, \qquad B'P' = \frac{a'}{a - a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\beta'}, \qquad N'P' = a'\,\frac{\beta}{\gamma'}.$$

Au reste, les deux quadrilatères ABPN, A'B'P'N' sont semblables, les côtés homologues étant AB et N'P', A'B' et NP, A'N' et BP, AN et B'P'. Les lignes NP, N'P sont parallèles, comme AB et A'B'. La théorie de cette figure peut également se rattacher aux belles recherches de M. Kempe.

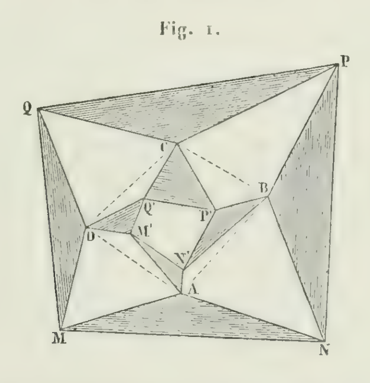
points A′ décrivent la même droite, les deux droites A′B′ détermineront un plan horizontal dont tous les points décriront des verticales. On pourra poser une table sur ces droites, et l'on aura ainsi la disposition, la plus simple connue, permettant de réaliser un mouvement parallèle dont les applications sont évidemment très-variées.

RECHERCHES SUR UN SYSTÈME ARTICULÉ;

Par M. G. DARBOUX.

Dans le n° 133 des *Proceedings of the London Mathematical Society* (t. IX, p. 133), M. Kempe a publié des recherches très-intéressantes sur un système articulé dont voici la définition. Considérons deux quadrilatères articulés MNPQ, $M_1 N_1 P_1 Q_1$ reliés aux points A, B, C, D par des tiges de longueur invariable, comme l'indique la *fig.* 1. On voit que la figure présentera huit triangles

Fig. 1.



invariables, savoir les quatre triangles MAN, NBP, PCQ, QDM construits sur les côtés du quadrilatère MNPQ et les quatre triangles M_1AN_1, N_1BP_1, P_1CQ_1, Q_1DM_1 reliés de même aux côtés du quadrilatère $M_1N_1P_1Q_1$. Il est clair qu'une telle figure formera en général un solide invariable et qu'il sera impossible de la déformer. En effet, supposons qu'on parte d'une position quelconque du quadrilatère articulé MNPQ. On pourra construire les points

A, B, C, D, qui sont à des distances connues de deux des points M, N, P, Q, puis les points M_1, N_1, P_1, Q_1, qui sont aussi à des distances données de deux des points A, B, C, D précédemment déterminés. Les points M_1, N_1, P_1, Q_1 une fois connus, il restera à exprimer que les longueurs M_1N_1, N_1P_1, P_1Q_1, Q_1M_1 ont des valeurs données, ce qui conduit à quatre équations. Or, quand le quadrilatère MNPQ se déforme, on ne dispose que d'une arbitraire, l'un de ses angles. Si les quatre équations auxquelles on est ainsi conduit sont satisfaites par des valeurs convenables de cette inconnue, on pourra construire une ou plusieurs positions de la figure; mais, si l'on veut que cette figure puisse se déformer, il faudra que ces équations se réduisent toutes à des identités.

M. Kempe s'est occupé du seul cas intéressant, de celui où les équations sont des identités et où par conséquent la déformation de la figure est possible. En employant une méthode très-ingénieuse, il a deviné un grand nombre de solutions d'un problème qui, *à priori,* pourrait paraître n'en avoir aucune. Néanmoins, il m'a semblé qu'il serait intéressant de résoudre d'une manière complète la question proposée par M. Kempe. D'abord la solution en offre un grand intérêt, et elle permet de rattacher à une théorie générale les deux seuls appareils connus, dus tous les deux à M. Hart, au moyen desquels on peut décrire une ligne droite en employant cinq tiges seulement. En second lieu, le problème est si compliqué et les équations qui expriment les liaisons des différents points sont si nombreuses, qu'on peut espérer de trouver, en le résolvant, une méthode propre à donner la solution des autres problèmes généraux qui se présentent en si grand nombre dans la théorie des systèmes articulés.

La marche que j'ai adoptée repose d'une part sur l'emploi des *grandeurs géométriques* dans le plan et sur leur expression bien connue au moyen d'une variable complexe, et d'autre part sur les recherches que j'ai publiées récemment et d'après lesquelles la théorie du quadrilatère articulé est identique à celle d'une cubique plane, que j'appellerai *cubique associée au quadrilatère.*

Mais, avant de commencer ces recherches et pour les rendre plus faciles, je remarquerai avec M. Kempe une espèce de symétrie très-importante que présente le système articulé. On peut le décomposer de trois manières différentes en deux parties ayant la même

relation. Il y a d'abord la décomposition primitive qui dérive de la considération des deux quadrilatères articulés MNPQ, $M_1N_1P_1Q_1$. Les deux séries de quatre triangles sont alors rattachées aux points A, B, C, D. Mais on peut substituer aux deux quadrilatères primitifs les deux suivants, QCQ_1D et NBN_1A, et l'on aura la même définition de la figure qu'avec les deux premiers quadrilatères. Les triangles QPC, CP_1Q_1, Q_1M_1D, DMQ, construits sur les côtés du premier, devront se rattacher par leurs sommets libres P, P_1, M_1, M aux triangles NPB, BP_1N_1, N_1M_1A, AMN, construits sur les côtés homologues du second quadrilatère. On obtient de même une troisième définition de la figure au moyen des quadrilatères PCP_1B et MDM_1A. Les triangles PQC, CQ_1P_1, P_1N_1B, BNP, construits sur les côtés du premier, devront être rattachés par les sommets Q, Q_1, N_1, N aux triangles MQD, DQ_1M_1, M_1N_1A, ANM, construits sur les côtés du second. Il y a donc six quadrilatères articulés, conjugués deux à deux, qui sont indiqués dans le Tableau suivant, leurs sommets homologues étant rangés dans le même ordre :

M	N	P	Q,	M_1	N_1	P_1	Q_1,	A	B	C	D,
M	D	M_1	A,	P	C	P_1	B,	Q	Q_1	N_1	N,
Q	C	Q_1	D,	N	B	N_1	A,	P	P_1	M_1	M.

La dernière ligne verticale contient les quadrilatères des points d'attache des triangles.

Nous emploierons, dans tout ce qui va suivre, la notion des grandeurs géométriques, c'est-à-dire que, étant donnés deux points A et B, nous désignerons par AB la grandeur complexe $\rho e^{i\omega}$, où ρ est la distance des deux points que nous désignerons aussi par $\overline{AB}$ ou gr. AB, et ω l'angle que fait AB, prise dans le sens AB, avec un *axe* fixe du plan. D'après cela, si un triangle invariable ABC se meut dans son plan, les trois côtés seront représentés par les expressions

$$AB = ae^{i\omega},\quad BC = a'e^{i\omega},\quad CA = a''e^{i\omega},$$

où ω seul est variable et où a, a', a'' sont des constantes complexes liées par l'équation

$$a + a' + a'' = 0;$$

si l'on prend pour a la longueur de AB, ω sera l'angle de AB et de

l'axe fixe, et l'on pourra adopter les expressions

$$(2)\qquad AB = ae^{i\omega},\quad AC = aa'e^{i\omega},\quad CB = a(1-a')e^{i\omega}.$$

On aura alors

$$(3)\qquad \frac{AC}{AB} = a' = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}e^{i\widehat{CAB}}.$$

L'aire du triangle ABC sera donnée par la formule

$$(4)\qquad \text{aire ABC} = \frac{i}{2}a^2(\alpha' - a'),$$

α' désignant la quantité conjuguée de a'. Quand a' sera réel, les trois points seront en ligne droite. Pour abréger l'écriture, nous désignerons les exponentielles telles que $e^{i\omega}$ par des lettres t, u, θ et nous dirons que $e^{i\omega}$ *est l'exponentielle de* ω. Je n'insiste pas sur toutes ces remarques très-connues; on sait que la considération de ces grandeurs géométriques constitue la méthode des équipollences de M. Bellavitis.

Ces remarques préliminaires étant faites, désignons par a, b, c, d les côtés du quadrilatère articulé MNPQ, par t, t', t'', t''' les exponentielles des angles qu'ils forment avec l'axe choisi. Nous aurons les équations

$$(5)\qquad \begin{cases} at + bt' + ct'' + dt''' = 0, \\ \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t'} + \dfrac{c}{t''} + \dfrac{d}{t'''} = 0. \end{cases}$$

Désignons de même par a_1, b_1, c_1, d_1 les côtés homologues du quadrilatère $M_1N_1P_1Q_1$ et par u, u', u'', u''' les exponentielles des angles qu'ils forment avec l'axe. Nous aurons

$$(6)\qquad \begin{cases} a_1u + b_1u' + c_1u'' + d_1u''' = 0, \\ \dfrac{a_1}{u} + \dfrac{b_1}{u'} + \dfrac{c_1}{u''} + \dfrac{d_1}{u'''} = 0. \end{cases}$$

Le côté MN étant représenté par at, on aura de même, en désignant par a' une constante complexe,

$$MA = aa't,\quad AN = a(1-a')t.$$

En étendant ces notations, nous poserons

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll} MA = aa't, & NB = bb't', \\ AN = a(1-a')t, & BP = b(1-b')t', \\ M_1A = a_1a'_1u, & N_1B = b_1b'_1u', \\ AN_1 = a_1(1-a'_1)u, & BP_1 = b_1(1-b'_1)u', \\ PC = cc't'', & DQ = dd't''', \\ CQ = c(1-c')t'', & DM = d(1-d')t''', \\ P_1C = c_1c'_1u'', & Q_1D = d_1d'_1u''', \\ CQ_1 = c_1(1-c'_1)u'', & DM_1 = d_1(1-d'_1)u'''. \end{array}\right.$$

Il nous reste à exprimer toutes les liaisons de la figure. Pour cela, il suffira évidemment d'écrire que le quadrilatère ABCD formé par les sommets libres des triangles liés à MNPQ est identique au quadrilatère analogue formé avec les sommets libres des triangles liés à $M_1N_1P_1Q_1$, ce qui donne les quatre équations

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} a(1-a')t + bb't' = a_1(1-a'_1)u + b_1b'_1u' = AB, \\ b(1-b')t' + cc't'' = b_1(1-b'_1)u' + c_1c'_1u'' = BC, \\ c(1-c')t'' + dd't''' = c_1(1-c'_1)u'' + d_1d'_1u''' = CD, \\ d(1-d')t''' + aa't = d_1(1-d'_1)u''' + a_1a'_1u = DA, \end{array}\right.$$

auxquelles il faudra joindre celles qu'on obtient en remplaçant les imaginaires par leurs conjuguées. $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{u}$ sont les conjuguées de t, u; si nous désignons par α', β', ... les conjuguées de a', b', ..., nous devrons avoir

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a(1-\alpha')}{t} + \dfrac{b\beta'}{t'} = \dfrac{a_1(1-\alpha'_1)}{u} + \dfrac{b_1\beta'_1}{u'}, \\ \dfrac{b(1-\beta')}{t'} + \dfrac{c\gamma'}{t''} = \dfrac{b_1(1-\beta'_1)}{u'} + \dfrac{c_1\gamma'_1}{u''}, \\ \dfrac{c(1-\gamma')}{t''} + \dfrac{d\delta'}{t'''} = \dfrac{c_1(1-\gamma'_1)}{u''} + \dfrac{d_1\delta'_1}{u'''}, \\ \dfrac{d(1-\delta')}{t'''} + \dfrac{a\alpha'}{t} = \dfrac{d_1(1-\delta'_1)}{u'''} + \dfrac{a_1\alpha'_1}{u}. \end{array}\right.$$

En tenant compte des relations (5) et (6), les équations (8) et (9) (dont la somme est nulle) se réduisent à six relations distinctes. On a donc en tout à satisfaire à dix équations et l'on dispose seule-

ment de sept inconnues $\frac{t'}{t}, \ldots, \frac{u}{t}, \ldots$, dont l'une même devra rester arbitraire. Il faudra donc que quatre des équations soient la conséquence des six autres. Telle est la question d'Analyse à laquelle le problème se trouve ramené.

Les équations (5) et (6) expriment que les sommes des projections sur une droite quelconque des côtés des quadrilatères MNPQ, $M_1N_1P_1Q_1$ sont nulles; en d'autres termes, elles sont la traduction analytique des équations

$$\text{MN} + \text{NP} + \text{PQ} + \text{QM} = 0,$$
$$\text{M}_1\text{N}_1 + \text{N}_1\text{P}_1 + \text{P}_1\text{Q}_1 + \text{Q}_1\text{M}_1 = 0.$$

Il est aisé de reconnaître que les autres équations (8), (9) se rattachent de la même manière aux quatre autres quadrilatères du système articulé. Ainsi, la première des équations (8) jointe à sa conjuguée exprime l'identité

$$\text{AN} + \text{NB} + \text{BN}_1 + \text{N}_1\text{A} = 0,$$

qui est évidente sur la *fig.* 1.

Pour abréger, nous désignerons par les lettres T et U respectivement les quadrilatères MNPQ, $M_1N_1P_1Q_1$, et nous appellerons aussi cubique T et cubique U les deux cubiques associées à ces quadrilatères, et qui sont représentées par les équations (5) et (6), où l'on regarde les variables t, t', t'', t''' et u, u', u'', u''' comme les coordonnées d'un point de l'espace. Je vais d'abord énoncer quelques lemmes simples sur la cubique liée à un quadrilatère.

I.

Dans le travail auquel j'ai déjà fait allusion [1], j'ai montré que la théorie du quadrilatère articulé, étant tout entière contenue dans les deux équations

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} & at + bt' + ct'' + dt''' = 0, \\ & \frac{a}{t} + \frac{b}{t'} + \frac{c}{t''} + \frac{d}{t'''} = 0, \end{aligned} \right.$$

[1] Voir *Bulletin*, p. 109 de ce tome.

est équivalente à celle de la cubique plane représentée par ces équations. Cette cubique est indécomposable, sauf dans le cas particulier où deux des côtés a, b, c, d sont égaux aux deux autres. Si l'on élimine t''' entre les équations précédentes, on aura

$$(11)\quad ab\left(\frac{t}{t'}+\frac{t'}{t}\right)+ac\left(\frac{t}{t''}+\frac{t''}{t}\right)+bc\left(\frac{t'}{t''}+\frac{t''}{t'}\right)+a^2+b^2+c^2-d^2=0,$$

et il résulte de là cette première conséquence :

Tant que deux côtés du quadrilatère ne seront pas égaux aux deux autres, il ne pourra exister aucune relation d'un degré inférieur au troisième entre trois des quantités t, t', t'', t''', *et, si l'on a trouvé une telle relation, par exemple entre* t, t', t'', *elle devra être identique à l'équation* (11).

Cette proposition ne subsiste plus quand la cubique est décomposable. Supposons, par exemple, que l'on ait $a=b$, $c=d$. L'équation (11) peut s'écrire

$$a(t+t')^2t''+c(t+t')tt'+ct''^2(t+t')=0,$$

et elle se décompose, le facteur $t+t'$ étant mis en évidence. Ce facteur ne sera nul que si le quadrilatère prend ce mouvement particulier dans lequel les deux côtés égaux a et b sont parallèles et de sens contraires. Si donc ces côtés sont opposés, le quadrilatère sera un parallélogramme. S'ils sont adjacents ils coïncideront, ainsi que les côtés c et d, et l'on n'aura plus un véritable quadrilatère. En laissant de côté le facteur $t+t'$, on obtient l'équation

$$(12)\qquad a(t+t')t''+ctt'+ct''^2=0,$$

équivalente à la suivante

$$(13)\qquad tt'=t''t''',$$

qui correspond au mouvement dans lequel le quadrilatère affecte la forme, soit d'un contre-parallélogramme si a et b sont deux côtés opposés, soit d'un quadrilatère bi-isoscèle si a et b sont adjacents. Il y a alors une infinité de relations du troisième degré entre t, t', t''. Pour les obtenir, il suffira évidemment de multiplier le premier membre de l'équation (12) par un polynôme quelconque du

premier degré. Il est aisé de reconnaître que, parmi toutes ces relations du troisième degré, il y en a une seule de la forme

$$A\left(\frac{t}{t'}+\frac{t'}{t}\right)+B\left(\frac{t}{t''}+\frac{t''}{t}\right)+C\left(\frac{t'}{t''}+\frac{t''}{t'}\right)+D=0:$$

c'est la relation (12). Il y en a aussi une seule de la forme

$$A\left(\frac{t}{t'}-\frac{t'}{t}\right)+B\left(\frac{t}{t''}-\frac{t''}{t}\right)+C\left(\frac{t'}{t''}-\frac{t''}{t'}\right)+D=0:$$

c'est celle qu'on obtient en multipliant par $t-t'$ le premier membre de l'équation (12) et qui est

$$a\left(\frac{t}{t'}-\frac{t'}{t}\right)+c\left(\frac{t''}{t'}-\frac{t'}{t''}\right)+c\left(\frac{t}{t''}-\frac{t''}{t}\right)=0.$$

Il suffit évidemment d'énoncer ces propositions, dont la vérification est immédiate.

On peut ajouter les remarques suivantes : si, entre des imaginaires exponentielles variables de module 1 ou, si l'on veut, des exponentielles $e^{i\omega}$ d'angles, que nous désignons par t, u, u', u'', on a une relation linéaire de la forme

$$u=lt+l't'+l''t''+\ldots,$$

cette relation doit se réduire à l'une des formes

$$u=lt,\quad u=l't',\quad \ldots.$$

En effet, en remplaçant les imaginaires par leurs conjuguées, on déduit de la relation précédente

$$\frac{1}{u}=\frac{\lambda}{t}+\frac{\lambda'}{t'}+\frac{\lambda''}{t''}+\ldots,$$

et, en multipliant membre à membre,

$$1=l\lambda+l'\lambda'+\ldots+l\lambda'\frac{t}{t'}+l'\lambda\frac{t'}{t}+\ldots,$$

équation qui ne peut être identique, t, t', t'' étant quelconques, que si l'on a

$$l\lambda'=0,\quad l'\lambda=0,\quad \ldots,$$

ce qui exige que toutes les quantités l moins une soient nulles.

Plus généralement, si t, t', t'', t''' désignent les exponentielles des angles d'un quadrilatère articulé, c'est-à-dire sont liées par les relations (5), *toute relation de la forme*

$$u = lt + l't' + l''t'' + l'''t''',$$

où u est une imaginaire de module 1, *se ramène à l'une des formes*

$$u = lt, \quad u = l't', \quad u = l''t'', \quad u = l'''t'''.$$

Commençons par démontrer cette proposition pour le quadrilatère à cubique indécomposable. Il suffira de considérer la relation

$$u = lt + l't' + l''t'', \tag{14}$$

puisqu'on peut toujours éliminer t''' au moyen de la première équation (5).

En prenant l'équation conjuguée de l'équation (14), on aura

$$\frac{1}{u} = \frac{\lambda}{t} + \frac{\lambda'}{t'} + \frac{\lambda''}{t''},$$

et, en multipliant membre à membre pour éliminer u, on obtient la relation

$$(15) \quad \begin{cases} 1 = l\lambda + l'\lambda' + l''\lambda'' + l\lambda'\dfrac{t}{t'} + l'\lambda\dfrac{t'}{t} + l\lambda''\dfrac{t}{t''} \\ \qquad + l''\lambda\dfrac{t''}{t} + l'\lambda''\dfrac{t'}{t''} + l''\lambda'\dfrac{t''}{t'}. \end{cases}$$

Si cette relation est identique, il faut que deux des quantités l, l', l'' soient nulles, et l'on a une des trois formes

$$u = lt, \quad u = l't', \quad u = l''t'';$$

si elle n'a pas lieu identiquement, elle doit être identique à l'équation (11), ce qui donne les relations

$$\frac{l\lambda'}{ab} = \frac{l'\lambda}{ab} = \frac{l\lambda''}{ac} = \frac{l''\lambda}{ac} = \frac{l'\lambda''}{bc} = \frac{l''\lambda'}{bc},$$

et, par conséquent,

$$\frac{l}{a} = \frac{l''}{c} = \frac{l'}{b} = h$$

et

$$u = h(at + bt' + ct'') = -hdt'''.$$

La proposition est donc démontrée pour le quadrilatère général.

Si le quadrilatère est un parallélogramme, elle est encore vraie, car alors on a, par exemple,

$$t'' = -t,$$

et par suite

$$u = (l - l'')t + l't';$$

t et t' étant indépendantes, il faut que cette relation se ramène à l'une des formes

$$u = lt, \quad u = l't'.$$

Enfin, si le quadrilatère est tel que l'on ait $a = b, c = d$, et que t, t', t'' vérifient l'équation de la conique (12), il faudra que l'équation (15) soit identique à celle de la conique (12) multipliée par un facteur quelconque du premier degré en t, t', t'' :

$$mt + nt' + pt''.$$

On verra facilement que p est nul, et il restera les équations

$$l\lambda' = an, \quad l\lambda'' = cn, \quad l'\lambda'' = cm,$$
$$l'\lambda = am, \quad l''\lambda = cm, \quad l''\lambda' = cn,$$

qui donnent

$$\frac{l}{a} = \frac{l''}{c} = \frac{l'}{a} = h,$$

et par suite

$$u = h(at + at' + ct'') = -hct'''.$$

Donc la proposition est établie dans tous les cas.

Je terminerai ces remarques par la proposition suivante :

Étant donné un quadrilatère articulé dont les côtés ont pour exponentielles t, t', t'', t''', si l'on a trouvé par un moyen quelconque une relation linéaire non identique de la forme

$$at + bt' + ct'' = 0,$$

le quadrilatère est un parallélogramme.

En effet, c'est seulement dans le cas du parallélogramme qu'il

existe, en dehors de la première des équations (5), une relation linéaire entre les variables t, t', t'', t'''.

II.

Nous commencerons l'étude du problème proposé en traitant complétement le cas où l'un des six quadrilatères conjugués est un parallélogramme. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$a = c, \quad b = d,$$
$$t + t'' = 0, \quad t' + t''' = 0.$$

On aura alors à satisfaire aux équations

$$\begin{aligned}
a(1 - a')t + bb't' &= a_1(1 - a'_1)u + b_1 b'_1 u',\\
b(1 - b')t' - ac't &= b_1(1 - b'_1)u' + c_1 c'_1 u'',\\
-a(1 - c')t - bd't' &= c_1(1 - c'_1)u'' + d_1 d'_1 u''',\\
-b(1 - d')t' + aa't &= d_1(1 - d'_1)u''' + a_1 a'_1 u.
\end{aligned}$$

Je vais d'abord démontrer que le quadrilatère U est toujours, comme le quadrilatère T, un parallélogramme.

En effet, si des deux premières équations on peut tirer t, t', ces quantités seront de la forme

$$t \text{ ou } t' = lu + l'u' + l''u'',$$

et, par conséquent, leurs expressions devront contenir un seul terme.

Supposons, par exemple, que l'on ait $t = lu$, $t' = lu'''$. Ces valeurs devant satisfaire à la première équation, on aura, en les substituant, une relation entre u, u', u''' qui ne sera pas identique, puisque le coefficient de u''' ne sera pas nul. Donc, d'après un des lemmes établis précédemment, le quadrilatère sera un parallélogramme. Le raisonnement peut se faire de même pour tous les systèmes possibles de valeurs de t et de t'. Donc, dans ce cas, la proposition est établie.

Si des deux premières équations on ne peut pas tirer t et t', leur déterminant étant nul, on pourra les éliminer et il restera une

relation entre u, u', u''. Donc encore le quadrilatère U est un parallélogramme.

Faisant

$$a_1 = c_1, \quad b_1 = d_1, \quad u'' = -u, \quad u''' = -u',$$

nous aurons à satisfaire aux équations

$$(16) \quad \begin{cases} a(1-a')t + bb't' = \quad a_1(1-a'_1)u + b_1 b'_1 u', \\ b(1-b')t' - ac't = \quad b_1(1-b'_1)u' - a_1 c'_1 u, \\ -a(1-c')t - bd't' = -a_1(1-c'_1)u - b_1 d'_1 u', \\ -b(1-d')t' + aa't = -b_1(1-d'_1)u' + a_1 a'_1 u, \end{cases}$$

t, t', u, u' étant d'ailleurs des exponentielles absolument indépendantes.

Les équations précédentes peuvent être satisfaites de deux manières différentes. Supposons d'abord que de deux quelconques d'entre elles, on ne puisse pas tirer t, t'. Alors elles devront se réduire à une seule, et, en exprimant que les coefficients des variables sont proportionnels, on obtiendra sans peine les relations

$$(a) \quad \begin{cases} a'_1 = a', \quad b'_1 = b', \quad c'_1 = c', \quad d'_1 = d', \\ b' = \dfrac{1-a'}{1-a'-c'}, \quad d' = \dfrac{1-c'}{1-a'-c'}, \end{cases}$$

qui donnent une première solution; u, u' seront définis en fonction de t, t' par la première des relations (16) jointe à sa conjuguée. En posant

$$m = \frac{1}{1-a'-c'}, \quad \mu = \frac{1}{1-\alpha'-\gamma'},$$

ces relations prennent la forme

$$(a') \quad \begin{cases} at + mbt' = a_1 u + b_1 m u'. \\ \dfrac{a}{t} + \dfrac{\mu b}{t'} = \dfrac{a_1}{u} + \dfrac{b_1 \mu}{u'}. \end{cases}$$

On voit qu'à un système de valeurs t, t' correspondent deux systèmes de valeurs pour u, u'.

L'un des parallélogrammes et ses quatre triangles sont dessinés dans la *fig.* 2.

La construction géométrique n'offre aucune difficulté. En effet, on a ici

$$NB = bb't', \qquad AN = a(1 - a')t,$$
$$BP = b(1 - b')t', \quad PC = ac't,$$

et par conséquent

$$\frac{NB}{AN} = \frac{BP}{PC}.$$

Cette équation exprime que les triangles BPC, BNA sont directement semblables. On voit donc que l'on peut construire très-aisé-

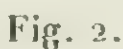
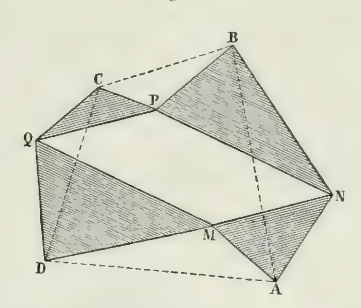


Fig. 2.



ment la figure en commençant par le quadrilatère ABCD. Les divers triangles CPB, ANB, AMD, DQC sont directement semblables, les sommets homologues étant rangés dans le même ordre dans notre manière de les désigner. Cette première solution est celle du cas V de M. Kempe (page 146 des *Proceedings*).

Revenons aux équations (16) et supposons maintenant que, de deux d'entre elles, on puisse tirer les valeurs de t, t'; ces valeurs seront nécessairement de la forme suivante,

$$Au + Bu,$$

et elles devront, comme nous l'avons vu (Lemme I), ne contenir qu'un terme. Il faudra donc que l'on ait

$$u = ht, \qquad u' = h't',$$

ou

$$u' = h't, \qquad u = ht'.$$

La première hypothèse conduirait à la solution identique

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad u = t, \quad u' = t'.$$

Examinons la seconde. Nous aurons, en exprimant que les quatre équations (16) sont vérifiées,

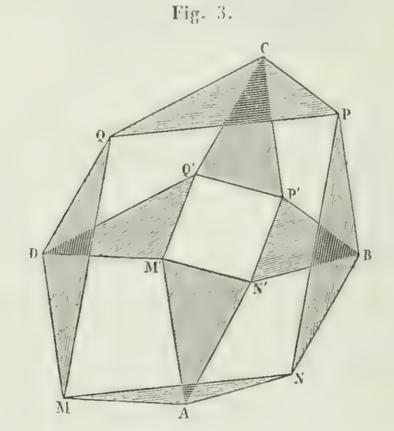
$$\begin{aligned}
a(1-a') &= b_1 b'_1 h', & b(1-b') &= -a_1 c'_1 h,\\
bb' &= a_1(1-a'_1)h, & -ac' &= b_1(1-b'_1)h',\\
a(1-c') &= b_1 d'_1 h', & b(1-d') &= -a_1 a'_1 h,\\
bd' &= a_1(1-c'_1)h, & aa' &= -b_1(1-d'_1)h',
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$b)\qquad \left\{\begin{aligned}
a'_1 &= \frac{1-d'}{1-b'-d'}, & b'_1 &= \frac{1-a'}{1-a'-c'},\\
c'_1 &= \frac{1-b'}{1-b'-d'}, & d'_1 &= \frac{1-c'}{1-a'-c'},\\
b_1 &= \frac{a}{h'}(1-a'-c'), & a_1 &= \frac{b}{h}(b'+d'-1).
\end{aligned}\right.$$

Ainsi, dans cette deuxième solution, on pourra prendre a', b', c', d

Fig. 3.



arbitrairement, c'est-à-dire construire des triangles de forme quelconque sur les côtés du parallélogramme MNPQ; h et h' seront alors définis par la condition que les valeurs de b_1, a_1 soient réelles et positives. Si l'on a, par exemple,

$$1-a'-c' = \rho e^{i\alpha},$$

h', qui est de module égal à 1, sera $e^{i\alpha}$, et l'on aura $b_1 = a\rho$. Remarquons que les six quadrilatères sont ici des parallélogrammes.

Les équations précédentes donnent, par exemple, $AN_1 + BN = 0$, ce qui exprime que le quadrilatère AN_1BN est un parallélogramme.

Le système entier est dessiné dans la *fig.* 3. Cette solution coïncide avec le cas VI de M. Kempe.

Dans la suite, nous pourrons donc nous dispenser d'étudier tous les cas où un seul des quadrilatères conjugués serait un parallélogramme.

III.

Nous avons maintenant à examiner le cas général, et nous allons chercher les conditions qui sont nécessaires pour que les équations (5), (6), (8), (9) soient satisfaites par une infinité de systèmes des valeurs des t et des u.

Remarquons d'abord que ces équations peuvent être considérées, toutes les fois que le mouvement de la figure est possible, comme établissant une correspondance entre le point (t, t', t'', t''') de la cubique T liée au quadrilatère T et le point (u, u', u'', u''') de la cubique U liée au quadrilatère U. Je vais d'abord examiner tous les cas où cette correspondance est uniforme, c'est-à-dire où à un point de chacune des courbes correspond un seul point de l'autre. Je montrerai ensuite que tous les autres cas peuvent être ramenés à celui-là.

Considérons la cubique T représentée par les équations (5) et coupons-la par les coniques variables C définies par les équations

$$tt' = \lambda t'' t''', \quad at + bt' + ct'' + dt''' = 0;$$

ces coniques rencontrent la cubique en quatre points fixes

$$(t = 0, \quad t'' = 0), \quad (t = 0, \quad t''' = 0),$$
$$(t' = 0, \quad t'' = 0), \quad (t' = 0, \quad t''' = 0),$$

et en deux points variables.

De même, si l'on coupe la cubique U par les coniques D représentées par les équations

$$uu' = \mu u'' u''', \quad a_1 u + b_1 u' + c_1 u'' + d_1 u''' = 0,$$

les coniques D couperont la cubique U seulement en deux points

variables. D'après cela, si à la conique C coupant la cubique T en un point m on fait correspondre la conique D coupant U au point n correspondant à m, on voit qu'à chaque conique C correspondront au plus deux coniques D, et réciproquement. On aura donc entre λ et μ une relation de la forme

$$(17)\quad (A\lambda^2 + B\lambda + C)\mu^2 + (B'\lambda^2 + D\lambda + E)\mu + C'\lambda^2 + E'\lambda + F = 0.$$

Cela posé, je remarque que, en vertu des relations (9), au point ($t = 0$, $t' = 0$) de la cubique T correspond le point de U pour lequel on a

$$u'u'' = 0, \quad uu''' = 0,$$

si l'on prend $u = 0$ ou $u' = 0$, la première des équations (8) donne $u' = 0$ ou $u = 0$. On ne peut donc avoir que les deux points

$$u = 0, \quad u' = 0, \quad \text{ou} \quad u'' = 0, \quad u''' = 0.$$

On verra de même que les deux points précédents sont les seuls qui puissent correspondre au point ($t'' = 0$, $t''' = 0$) de la cubique T. Comme les quatre points considérés ($t = 0$, $t' = 0$), ($u = 0$, $u' = 0$), ... ne sont jamais des points doubles des cubiques sur lesquelles ils sont situés, à chacun d'eux correspond un seul point. On ne peut donc avoir que les deux modes de correspondance

$$(18)\quad \begin{cases} (t = 0,\ t' = 0), & (u = 0,\ u' = 0), \\ (t'' = 0,\ t''' = 0), & (u'' = 0,\ u''' = 0), \end{cases}$$

ou

$$(19)\quad \begin{cases} (t = 0,\ t' = 0), & (u'' = 0,\ u''' = 0), \\ (t'' = 0,\ t''' = 0), & (u = 0,\ u' = 0). \end{cases}$$

Dans le premier cas, on voit que toutes les fois que λ deviendra nul, ce qui aura lieu seulement pour ($t = 0$, $t' = 0$), il en sera de même de μ, et réciproquement. De même, λ et μ deviendront infinis en même temps.

La relation (17) doit donc donner : 1° deux valeurs nulles de μ pour $\lambda = 0$, ce qui exige que l'on ait

$$E = 0, \quad F = 0;$$

2° deux valeurs nulles de λ pour $\mu = 0$, ce qui donne

$$E' = 0;$$

3° deux valeurs infinies de μ pour la valeur ∞ de λ, ce qui donne

$$A = 0, \quad B' = 0;$$

4° deux valeurs infinies de λ pour la valeur ∞ de μ, ce qui donne enfin

$$B = 0.$$

Elle prend donc la forme

$$C\mu^2 + D\lambda\mu + C'\lambda^2 = 0$$

ou plus simplement

$$\mu = h\lambda.$$

Le même raisonnement, appliqué au cas où la correspondance est établie par les formules (19), nous donnera

$$\mu = \frac{h}{\lambda}.$$

On aura donc la formule unique

$$\mu = h\lambda^{\varepsilon},$$

ε désignant ± 1, ou

$$(20) \qquad \frac{tt'}{t''t'''} = h_1 \left(\frac{uu'}{u''u'''}\right)^{\varepsilon_1}.$$

On établirait aisément que h_1 doit être égal à $+1$; mais cela résultera aussi de la suite du raisonnement.

Par une méthode identique à la précédente on établira de même les équations

$$(21) \qquad \frac{tt''}{t't'''} = h_2 \left(\frac{uu''}{u'u'''}\right)^{\varepsilon_2}, \quad \frac{tt'''}{t't''} = h_3 \left(\frac{uu'''}{u'u''}\right)^{\varepsilon_3}.$$

Nous allons d'abord montrer que ces équations, établies en supposant les cubiques T et U indécomposables, subsistent dans tous les cas.

Supposons, par exemple, que l'on ait $a = b$, $c = d$. La cubique T se décomposera en une droite et en la conique T', dont les équations sont

$$tt' = t''t''', \quad at + at' + ct'' + ct''' = 0.$$

Nous pouvons rejeter la droite, puisqu'à ses différents points cor-

respond le mouvement dans lequel le quadrilatère demeure un parallélogramme, et ce cas a été déjà examiné ; t, t', t'', t''' vérifieront donc les équations précédentes. Je dis que la cubique U se décompose aussi. En effet, si elle ne se décomposait pas, u, u', u'', u''' pourraient prendre toutes les valeurs qui correspondent aux points de cette cubique, et, en particulier, au point $(u = 0, u' = 0)$ devrait correspondre un point de la conique précédente T'. Or cela n'a pas lieu, car nous avons vu qu'au point $(u = 0, u' = 0)$ ne peut correspondre que l'un des deux points $(t = 0, t' = 0)$, $(t'' = 0, t''' = 0)$, et aucun de ces points ne se trouve sur la conique T'. Ce raisonnement, *qui s'applique du reste au cas où la correspondance cesserait d'être uniforme,* montre donc que la cubique U se décompose aussi en une droite et en une conique. La droite peut être rejetée, puisque le quadrilatère U ne peut être un parallélogramme. Il reste donc à prendre la conique, qui doit être représentée par une des trois équations

$$uu' = u''u''', \quad uu'' = u'u''', \quad uu''' = u'u''.$$

Les deux dernières doivent être rejetées, car les coniques correspondantes passeraient par le point $(u = 0, u' = 0)$, ce que nous venons de démontrer être impossible. Il reste donc la conique

$$uu' = u''u'''.$$

On voit que l'on aura encore l'équation (20)

$$\frac{tt'}{t''t'''} = h_1 \left(\frac{uu'}{u''u'''}\right)^{\varepsilon_1},$$

et il est aisé de reconnaître, en appliquant à ce cas particulier la méthode générale, que les équations (21) subsistent encore ici.

En résumé, *les équations* (20), (21) *ont lieu dans tous les cas de correspondance uniforme.*

Résolvons-les, en faisant successivement toutes les hypothèses sur ε_1, ε_2, ε_3. Nous aurons les solutions suivantes :

$$\text{I} \quad \left\{\begin{aligned} t &= \rho_1\theta u^{\varepsilon}, \\ t' &= \rho'_1\theta u'^{\varepsilon}, \\ t'' &= \rho''_1\theta u''^{\varepsilon}, \\ t''' &= \rho'''_1\theta u'''^{\varepsilon}; \end{aligned}\right. \qquad \text{II} \quad \left\{\begin{aligned} t &= \theta\rho_1 u'''^{\varepsilon}, \\ t' &= \theta\rho'_1 u''^{\varepsilon}, \\ t'' &= \theta\rho''_1 u'^{\varepsilon}, \\ t''' &= \theta\rho'''_1 u^{\varepsilon}. \end{aligned}\right.$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} t = \theta\rho\, u''^{\varepsilon}, \\ t' = \theta\rho' u'''^{\varepsilon}, \\ t'' = \theta\rho'' u^{\varepsilon}, \\ t''' = \theta\rho''' u'^{\varepsilon}, \end{cases} \qquad \text{(IV)} \quad \begin{cases} t = \theta\rho\, u'^{\varepsilon}, \\ t' = \theta\rho' u^{\varepsilon}, \\ t'' = \theta\rho'' u'''^{\varepsilon}, \\ t''' = \theta\rho''' u''^{\varepsilon}, \end{cases}$$

où θ est une variable auxiliaire, ρ, ρ', ρ'', ρ''' des constantes inconnues; ε désigne toujours ± 1. Le système IV se déduit du système II par une permutation circulaire. Il reste donc seulement trois systèmes de solutions à examiner, chacun se décomposant en deux J'indique d'abord des propriétés communes de toutes les solutions.

Considérons, par exemple, le premier système de solutions. De l'équation

$$at + bt' + ct'' + dt''' = 0$$

on déduit

$$a\rho u^{\varepsilon} + b\rho' u'^{\varepsilon} + c\rho'' u''^{\varepsilon} + d\rho''' u'''^{\varepsilon} = 0.$$

Or, entre les quantités u^{ε} il ne peut exister d'autre relation linéaire que

$$a_1 u^{\varepsilon} + b_1 u'^{\varepsilon} + c_1 u''^{\varepsilon} + d_1 u'''^{\varepsilon} = 0.$$

On a donc

$$\frac{a_1}{a\rho} = \frac{b_1}{b\rho'} = \frac{c_1}{c\rho''} = \frac{d_1}{d\rho'''}.$$

En employant de même l'équation

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{t'} + \frac{c}{t''} + \frac{d}{t'''} = 0,$$

on aura

$$\frac{a_1}{a}\rho = \frac{b_1}{b}\rho' = \frac{c_1}{c}\rho'' = \frac{d_1}{d}\rho''',$$

et, par conséquent, on doit avoir

$$\rho = \rho' = \rho'' = \rho''', \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{d_1}{d} = k,$$

k étant un nombre positif.

La présence de l'arbitraire θ dans les formules permet de remplacer toutes les quantités ρ par 1, et l'on a les formules définitives

$$\text{(I)} \qquad u = \theta t^{\varepsilon}, \quad u' = \theta t'^{\varepsilon}, \quad u'' = \theta t''^{\varepsilon}, \quad u''' = \theta t'''^{\varepsilon}.$$

θ étant évidemment de module égal à 1, comme quotient de deux quantités de module 1. On a, de plus,

$$\text{(I)}\qquad a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad c_1 = kc, \quad d_1 = kd.$$

En d'autres termes, *les deux quadrilatères correspondants sont directement ou inversement semblables, suivant que* $\varepsilon = +1$ *ou* $\varepsilon = -1$.

Les mêmes conclusions s'appliquent aux deux autres systèmes, pour lesquels on aura

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} u = \theta t'''^{\varepsilon}, & u' = \theta t''^{\varepsilon}, \quad u'' = \theta t'^{\varepsilon}, \quad u''' = \theta t^{\varepsilon}, \\ a_1 = kd, & b_1 = kc, \quad c_1 = kb, \quad d_1 = ka, \end{cases}$$

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} u = \theta t''^{\varepsilon}, & u' = \theta t'''^{\varepsilon}, \quad u'' = \theta t^{\varepsilon}, \quad u''' = \theta t'^{\varepsilon}, \\ a_1 = kc, & b_1 = kd, \quad c_1 = ka, \quad d_1 = kb. \end{cases}$$

Nous allons examiner successivement les diverses solutions.

IV.

Je commence par le système I et je suppose d'abord $\varepsilon = 1$. On a alors

$$u = \theta t, \quad u' = \theta t', \quad u'' = \theta t'', \quad u''' = \theta t''',$$
$$a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad c_1 = kc, \quad d_1 = kd.$$

Les équations à vérifier sont

$$\text{(22)}\qquad \begin{cases} a(1-a')t + bb't' = k\theta[a(1-a'_1)t + bb'_1t'], \\ b(1-b')t' + cc't'' = k\theta[b(1-b'_1)t' + cc'_1t''], \\ c(1-c')t'' + dd't''' = k\theta[c(1-c'_1)t'' + dd'_1t'''], \\ d(1-d')t''' + aa't = k\theta[d(1-d'_1)t''' + aa'_1t]. \end{cases}$$

Si entre les deux premières on élimine $k\theta$, on est conduit à la relation

$$\text{(23)}\qquad \begin{cases} abtt'[(1-a')(1-b'_1) - (1-a'_1)(1-b')] \\ \quad + actt''[(1-a')c'_1 - (1-a'_1)c'] \\ \quad + b^2(b'-b'_1)t'^2 + bct't''(b'c'_1 - c'b'_1) = 0. \end{cases}$$

Si la cubique T est indécomposable, cette relation, étant du second

degré, devra être une identité. On aura donc

$$b' = b'_1,$$

et par suite

$$a' = a'_1, \quad c' = c'_1.$$

La première des équations (22) donne alors

$$k\theta = 1 \quad \text{ou} \quad k = 1, \quad \theta = 1.$$

C'est une solution identique; les deux quadrilatères coïncident.

La même conclusion subsisterait si la cubique T se décomposait et était remplacée par la conique

$$tt' = t''t''',$$

car alors la relation entre t, t', t'' serait

$$at + at' + ct'' + c\,\frac{tt'}{t''} = 0,$$

et, comme cette équation ne contient pas de terme en t'^2, la relation (23) doit encore avoir lieu identiquement.

La conclusion est la même si l'on a la conique

$$tt''' = t't'',$$

ce cas se ramenant au précédent par une permutation circulaire.

Il nous reste à examiner le cas où l'on a

$$tt'' = t't''', \quad a = c, \quad b = d,$$

c'est-à-dire où le quadrilatère T et par conséquent le quadrilatère U sont des contre-parallélogrammes.

La relation entre t, t', t'', t''' est alors

$$att' + bt'^2 + at''t' + btt'' = 0,$$

et, en écrivant qu'elle est identique à la relation (23), on aura

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} & b^2(1 - a')(1 - b'_1) - b^2(1 - a'_1)(1 - b') \\ & = a^2(1 - a')c'_1 - a^2(1 - a'_1)c' \\ & = b^2(b' - b'_1) = b^2(b'c'_1 - b'_1c'). \end{aligned}\right.$$

d'où résultent d'abord les deux relations, ne contenant ni a ni b,

$$\frac{a'}{1-b'} = \frac{a'_1}{1-b'_1}, \quad \frac{b'}{1-c'} = \frac{b'_1}{1-c'_1},$$

auxquelles on peut joindre, par une permutation circulaire,

$$\frac{c'}{1-d'} = \frac{c'_1}{1-d'_1}, \quad \frac{d'}{1-a'} = \frac{d'_1}{1-a'_1}.$$

Si l'on désigne par m, n, p, r les valeurs communes des rapports égaux, on aura

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{ll} a' + mb' = m, & a'_1 + mb'_1 = m, \\ b' + nc' = n, & b'_1 + nc'_1 = n, \\ c' + pd' = p, & c'_1 + pd'_1 = p, \\ d' + ra' = r, & d'_1 + ra'_1 = r; \end{array}\right.$$

si l'on considérait m, n, p, r comme donnés, ces équations détermineraient a', b', c', d', et, par suite, on aura

$$a' = a'_1, \quad b' = b'_1, \quad c' = c'_1, \quad d' = d'_1,$$

tant que leur déterminant ne sera pas nul. La solution précédente devant être écartée, il faut que les quatre équations (25) se réduisent à trois, ce qui donne les deux conditions

$$mnpr = 1, \quad 1 - m + mn - mnp = 0.$$

On aura

$$b' = \frac{m - a'}{m}, \quad c' = \frac{nm - m + a'}{mn}, \quad d' = r - ra',$$

et de même pour b'_1, c'_1, d'_1, et ces valeurs, portées dans celle des équations (24) qui n'a pas été employée, donneront

$$b^2 = a^2 mp,$$

et par suite

$$a^2 = b^2 nr.$$

En résumé, les équations (25), jointes au groupe

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} b^2 = a^2 mp, \\ a^2 = b^2 nr, \quad 1 - m + mn - mnp = 0, \end{array}\right.$$

suffisent à exprimer que les quatre équations (22) qu'il s'agit de vérifier se réduisent à une seule, la première, par exemple, qui donnera $k\theta$. Il reste à écrire que le module de la valeur de $k\theta$ fournie par cette équation est constant et égal à k. A cet effet, nous associerons à la première équation (22) sa conjuguée

$$\frac{a(1-\alpha')}{t} + \frac{b\beta'}{t'} = \frac{k}{\theta}\left[\frac{a(1-\alpha'_1)}{t} + \frac{b\beta'_1}{t'}\right],$$

et nous multiplierons membre à membre. Nous aurons ainsi

$$a^2(1-a')(1-\alpha') + b^2 b'\beta' = k^2 a^2(1-a'_1)(1-\alpha'_1) + k^2 b^2 b'_1\beta'_1$$
$$+ ab[k^2(1-a'_1)\beta'_1 - (1-a')\beta']\frac{t}{t'} + ab[k^2(1-\alpha'_1)b'_1 - (1-\alpha')b']\frac{t'}{t}.$$

Cette équation devant être satisfaite identiquement, nous aurons

$$k^2 = \frac{b'(1-\alpha')}{b'_1(1-\alpha'_1)} = \frac{\beta'(1-a')}{\beta'_1(1-a'_1)},$$

$$a^2(1-a')(1-\alpha') + b^2 b'\beta' = k^2[a^2(1-a'_1)(1-\alpha'_1) + b^2 b'_1\beta'_1].$$

En remplaçant k^2 par sa valeur, on ramène cette dernière équation à la forme

$$[a^2(1-a')(1-\alpha'_1) - b^2 b'\beta'_1][b'(1-a'_1) - b'_1(1-a')] = 0.$$

Le second facteur, égalé à zéro, conduit encore à la solution identique

$$a' = a'_1, \quad b' = b'_1, \quad c' = c'_1, \quad d' = d'_1,$$

à moins que l'on n'ait

$$a' + b' - 1 = 0.$$

Mais alors le premier est nul, on le reconnaîtra aisément. Il suffit donc de poser

$$a^2(1-a')(1-\alpha'_1) - b^2 b'\beta'_1 = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{b^2}{a^2}$ par mp,

$$\frac{\beta'_1}{1-\alpha'_1} = \frac{d'}{1-c'}.$$

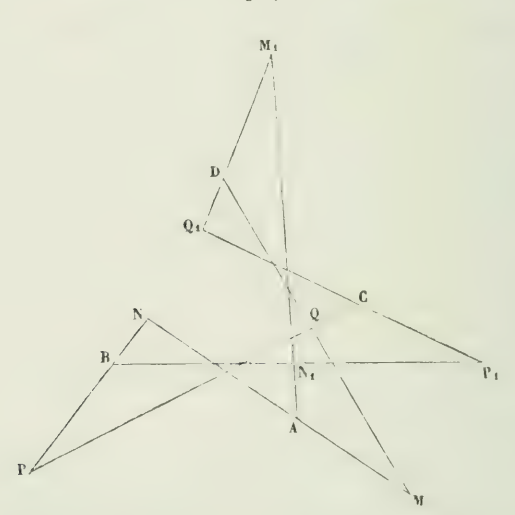
En réunissant tous les éléments de la solution, on a

$$(c)\quad \begin{cases} b^2 = a^2 mp, & \\ a^2 = b^2 nr, & 1 - m + mn - mnp = 0, \\ a' + mb' = m, & a'_1 + mb'_1 = m, \\ b' + nc' = n, & b'_1 + nc'_1 = n, \\ c' + pd' = p, & c'_1 + pd'_1 = p, \\ d' + ra' = r, & d'_1 + ra'_1 = r, \\ a'_1 = \dfrac{m(pm-1) + m\alpha'(1-\pi)}{pm - m + \alpha'(m-\pi)}, & \end{cases}$$

$$k^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{pm - \mu + a'(\mu - p)}{\mu - 1}\,\frac{\pi\mu - m + \alpha'(m-\pi)}{m-1},$$

μ, π désignant les quantités conjuguées de m, p.

Fig. 4.



En résumé, quand a et b sont donnés, m et a' ou, si l'on veut, a', b' peuvent être pris arbitrairement. Toutes les autres quantités sont déterminées.

Les six quadrilatères du système sont tous des contre-parallélogrammes; la *fig.* 4 représente le système articulé dans le cas où les triangles construits sur les côtés se réduisent à des droites. Ce cas est nouveau.

Examinons maintenant la deuxième solution du premier système :

$$u = \frac{\theta}{t}, \quad u' = \frac{\theta}{t'}, \quad u'' = \frac{\theta}{t''}, \quad u''' = \frac{\theta}{t'''}.$$

On devra avoir les équations

$$(27) \quad \begin{cases} a(1-a')t + bb't' = k\theta\left[\dfrac{a(1-a'_1)}{t} + \dfrac{bb'_1}{t'}\right], \\ b(1-b')t' + cc't'' = k\theta\left[\dfrac{b(1-b'_1)}{t'} + \dfrac{cc'_1}{t''}\right], \\ c(1-c')t'' + dd't''' = k\theta\left[\dfrac{c(1-c'_1)}{t''} + \dfrac{dd'_1}{t'''}\right], \\ d(1-d')t''' + aa't = k\theta\left[\dfrac{d(1-d'_1)}{t'''} + \dfrac{ad'_1}{t}\right]. \end{cases}$$

Éliminons $k\theta$ entre les deux premières équations. Nous aurons

$$ab(1-a')(1-b'_1)\frac{t}{t'} + ac(1-a')c'_1\frac{t}{t''} + bcb'c'_1\frac{t'}{t''}$$
$$-ab(1-a'_1)(1-b')\frac{t'}{t} - ac(1-a'_1)c'\frac{t''}{t} - bcb'_1c'\frac{t''}{t} + b^2(b'-b'_1) = 0.$$

Supposons d'abord la cubique T indécomposable.

L'équation précédente devra être identique à la relation (11). Les relations d'identification, jointes à celles qu'on en déduit par les permutations circulaires, nous donnent

$$(d) \quad \begin{cases} c' = a', & c'_1 = a'_1, \\ b' = d' = 1 - a', & b'_1 = d'_1 = 1 - a'_1, \\ a' + a'_1 - 2a'a'_1 = 0, & \\ a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 0, & k^2 = (2a'-1)(2\alpha'-1). \end{cases}$$

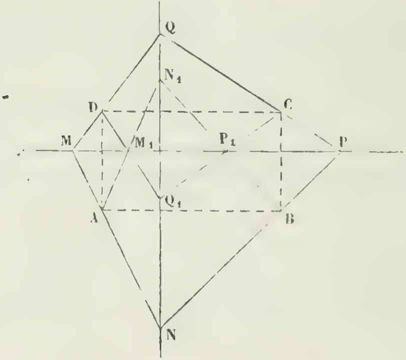
Le quadrilatère T a donc ses diagonales rectangulaires. Les triangles MDQ, PCQ, PBN, MAN sont directement semblables, et le quadrilatère ABCD est un parallélogramme dont les côtés ont pour expressions

$$\text{AB} = (1-a')(at + bt'), \quad \text{BC} = a'(bt' + ct''),$$
$$\text{CD} = (1-a')(ct'' + dt'''), \quad \text{DA} = a'(dt''' + at).$$

On voit que AB, BC sont proportionnels aux diagonales du quadrilatère T et font avec elles un angle constant. L'angle du parallélogramme est donc constant. Les autres quadrilatères conjugués sont tous bi-isoscèles. Le cas où les huit triangles se réduisent à des droites est représenté dans la *fig.* 5.

Cette figure montre clairement qu'à chaque position de l'un des quadrilatères autres que T et U correspondent deux positions de l'autre. Par exemple, au quadrilatère MDM_1A correspondent les

Fig. 5.



deux positions de PCP_1D, symétriques par rapport à la diagonale QN.

Cette solution correspond au cas IV de M. Kempe.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, la cubique T indécomposable. Admettons maintenant qu'elle se décompose et soit remplacée par une conique.

Si l'on a $a = b$, $c = d$ et par conséquent

$$tt' = t''t''',$$

la première et la troisième des équations (27), divisées l'une par l'autre, nous donnent

$$\frac{a(1-a')t + bb't'}{a(1-a'_1)t' + bb'_1t'} = \frac{c(1-c')t'' + dd't'''}{c(1-c'_1)t''' + dd'_1t''},$$

c'est-à-dire une relation entre $\frac{t}{t'}$, $\frac{t''}{t'''}$. Or, la seule relation existant

entre ces variables est

$$\frac{a^2(t+t')^2}{tt'} = \frac{b^2(t''+t''')^2}{t''t'''}.$$

Cette équation ne peut pas être satisfaite par une expression de $\frac{t}{t'}$ telle qu'on la déduirait de la formule précédente. On doit donc avoir

$$\frac{a(1-a')}{bb'_1} = \frac{a(1-a'_1)}{bb'} = \frac{c(1-c')}{dd'_1} = \frac{(1-c'_1)c}{dd'},$$

et alors la première des équations (27) nous donne

$$k\theta = \frac{a(1-a')tt'}{bb'_1}:$$

on a donc

$$a(1-a')t = b_1 b'_1 u'.$$

ou, d'après les formules (7),

$$AN + BN_1 = 0.$$

Le quadrilatère $ANBN_1$ est donc un parallélogramme, et nous rentrons dans un cas examiné.

Les mêmes conclusions s'appliqueraient au cas où $a=d$, $b=c$, qui se déduit du précédent par une permutation circulaire.

Examinons enfin l'hypothèse $a=c$, $b=d$, pour laquelle on a

$$tt'' = t't''',$$

ou

(28) $$(at'+bt'')t + (at''+bt')t' = 0.$$

En divisant la première des équations (27) par la seconde et remplaçant t par sa valeur tirée de l'équation précédente, on obtient l'équation

$$\frac{[bb'(at'+bt'')-a(1-a')(at''+bt')]t'}{(at'+bt'')[b(1-b')t'+cc't'']}$$
$$= \frac{t''[bb'_1(at''+bt')-a(1-a'_1)t'(at'+bt'')]}{(at''+bt')[b(1-b'_1)t''+cc'_1t']}.$$

Cette équation devant être vérifiée quel que soit le rapport $\frac{t'}{t''}$, on obtient facilement les conditions

$$c' = a', \qquad c'_1 = a'_1 = a',$$
$$b' = d' = 1 - a', \quad b'_1 = d'_1 = d'.$$

La première des équations (27) donne alors

$$k\theta = -\frac{(at + bt')tt'}{at' + bt} = -tt'',$$

d'où résulte

$$k = 1, \quad \theta = -tt'',$$

et par suite

$$u = -t'', \quad u'' = -t, \quad u' = -t''', \quad u''' = -t'.$$

Je n'insiste pas sur cette solution, qui sera retrouvée plus loin sous une forme plus générale.

V.

Examinons maintenant les solutions du système II et d'abord

$$u = \theta t''', \quad u' = \theta t'', \quad u'' = \theta t', \quad u''' = \theta t,$$
$$a_1 = kd, \quad b_1 = kc, \quad c_1 = kb, \quad d_1 = ka;$$

on devra avoir les équations

$$(29)\quad \begin{cases} a(1-a')t + bb't' = k\theta[d(1-a'_1)t''' + cb'_1t''], \\ b(1-b')t' + cc't'' = k\theta[c(1-b'_1)t'' + bc'_1t'], \\ c(1-c')t'' + dd't''' = k\theta[b(1-c'_1)t' + ad'_1t], \\ d(1-d')t''' + aa't = k\theta[a(1-d'_1)t + da'_1t''']. \end{cases}$$

Divisons la seconde de ces équations par la quatrième; nous aurons

$$\frac{b(1-b')t' + cc't''}{d(1-d')t''' + aa't} = \frac{c(1-b'_1)t'' + bc'_1t'}{a(1-d'_1)t + da'_1t'''}.$$

C'est une relation entre $\frac{t'}{t''}$ et $\frac{t'''}{t}$ qui doit être satisfaite identique-

ment toutes les fois que la cubique est indécomposable. On a donc

$$\frac{1-b'}{c'} = \frac{c'_1}{1-b'_1}, \quad \frac{1-d'}{a'} = \frac{a'_1}{1-d'_1},$$

et alors la seconde des équations (29) donne

$$k\theta = \frac{1-b'}{c'_1}.$$

On a, en vertu des formules (7),

$$BP + CP_1 = 0.$$

L'un des quadrilatères conjugués est encore un parallélogramme et nous pouvons nous dispenser de continuer.

Supposons la cubique décomposable.

Si l'on a $tt''' = t't''$, la méthode précédente s'applique sans modification et conduit aux mêmes conclusions.

Si l'on a

$$a = c, \quad b = d \quad \text{et} \quad tt'' = t't''',$$

la première et la deuxième équation (29), divisées membre à membre, donnent, après la substitution des valeurs de t'', t''', l'équation

$$\frac{(at'+bt)[a(1-a')t+bb't']}{b(1-b')(at'+bt)-ac'(at+bt')}$$
$$= \frac{(at+bt')[b(1-a'_1)t+ab'_1t']}{a(1-b'_1)(at+bt')-bc'_1(at'+bt)}.$$

Cette équation ne devient identique que si l'on a

$$1-a' = b', \quad a'_1 = a', \quad b'_1 = b', \quad c'_1 = c'.$$

Alors la première des équations (29) donne $k\theta = -1$, et par suite $k = 1$, $\theta = -1$. Les quadrilatères correspondants à la seconde et à la quatrième de ces équations sont des parallélogrammes. Nous pouvons encore nous dispenser de continuer.

Il reste à examiner enfin l'hypothèse

$$(30) \qquad tt' = t''t''', \quad a = b, \quad c = d.$$

Je dis que dans ce cas le premier de nos quadrilatères, celui qui

correspond à l'équation

$$a(1-a')t + bb't' - a_1(1-a'_1)u - b_1 b'_1 u' = 0,$$

a sa cubique indécomposable.

En effet, les exponentielles des côtés de ce quadrilatère sont proportionnelles à t, t', u, u'. Si donc la cubique de ce quadrilatère était décomposable, on aurait une des trois relations

$$tt' = huu', \quad tu' = hut', \quad tu = hu't',$$

h étant une constante, ou, en remplaçant u, u' par leurs valeurs,

$$tt' = h\theta^2 t''t''', \quad tt'' = ht't''', \quad tt''' = ht't''.$$

Les deux dernières relations sont incompatibles avec l'équation (30). La première donne θ constant, et alors deux de nos six quadrilatères conjugués deviennent encore des parallélogrammes. On voit donc que l'on peut supposer la cubique de notre premier quadrilatère indécomposable. Mais alors, en lui faisant jouer le rôle du quadrilatère T, on retrouvera ailleurs les solutions que nous pourrions obtenir (¹).

Il nous reste, pour terminer l'examen du second système, à étudier le cas où l'on a

$$u = \frac{\theta}{t'''}, \quad u' = \frac{\theta}{t''}, \quad u'' = \frac{\theta}{t'}, \quad u''' = \frac{\theta}{t},$$

$$a_1 = kd, \quad b_1 = kc, \quad c_1 = kb, \quad d_1 = ka.$$

Il faudra alors satisfaire aux équations

$$(31)\quad \begin{cases} a(1-a')t + bb't' = k\theta\left[\dfrac{d(1-a'_1)}{t'''} + \dfrac{cb'_1}{t''}\right], \\ b(1-b')t' + cc't'' = k\theta\left[\dfrac{c(1-b'_1)}{t''} + \dfrac{bc'_1}{t'}\right], \\ c(1-c')t'' + dd't''' = k\theta\left[\dfrac{b(1-c'_1)}{t'} + \dfrac{ad'_1}{t}\right], \\ d(1-d')t''' + aa't = k\theta\left[\dfrac{a(1-d'_1)}{t} + \dfrac{da'_1}{t'''}\right]. \end{cases}$$

(¹) On pourrait craindre, il est vrai, que la correspondance entre ce quadrilatère et son conjugué soit multiple; mais nous démontrerons plus loin (art. VI) que cela n'a jamais lieu toutes les fois que la cubique du quadrilatère est indécomposable.

Éliminons θ entre les deux premières équations et servons-nous de la relation

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{t'} + \frac{c}{t''} + \frac{d}{t'''} = 0$$

pour éliminer t'''. Nous aurons

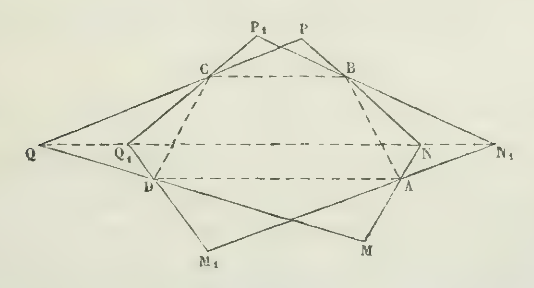
$$ac(1 - a')(1 - b'_1)\frac{t}{t''} + ab(1 - a')c'_1\frac{t}{t'} + bcb'(1 - b'_1)\frac{t'}{t''} + b^2 b' c'_1$$
$$+ [b(1 - b')t' + cc't'']\left[(1 - a'_1)\left(\frac{a}{t} + \frac{b}{t'}\right) + c\frac{1 - a'_1 - b'_1}{t''}\right] = 0.$$

Dans le cas où la cubique Γ est indécomposable, l'équation doit être identique à l'équation (11). En écrivant les équations d'identification et en y joignant celles qu'on obtient par la permutation circulaire qui change t en t'', on obtient le système suivant :

$$(e)\quad \begin{cases} c' = 1 - b', \quad a'_1 = a', \quad c'_1 = c', \\ d' = 1 - a', \quad b'_1 = b', \quad d'_1 = d', \\ (a^2 - d^2)(1 - a') + (c^2 - b^2)b' = 0, \\ k = 1, \quad \theta = \dfrac{bt' + ct''}{\dfrac{b}{t'} + \dfrac{c}{t''}}, \end{cases}$$

Il est très-facile de définir géométriquement cette nouvelle solution. Les triangles MAN, MDQ sont directement semblables, et de

Fig. 6.



même les triangles NBP, CPQ. La relation entre les côtés a, b, c, d, retranchée de sa conjuguée, prend la forme

$$a^2(a' - \alpha') + b^2(b' - \beta') + c^2(c' - \gamma') + d^2(d' - \delta') = 0,$$

et elle exprime que la somme algébrique des aires des triangles construits sur les quatre côtés est nulle. On a

$$\begin{aligned}
AB &= a(1-a')t + bb't',\\
BC &= (1-b')(bt' + ct''),\\
CD &= cb't'' + d(1-a')t'',\\
DA &= (1-d')(dt''' + at).
\end{aligned}$$

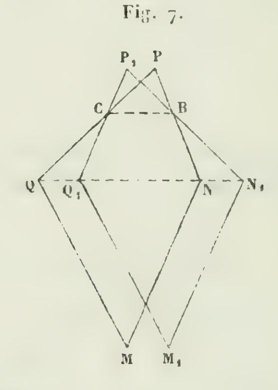
On voit donc que AD et BC sont dans un rapport constant avec la diagonale NQ du quadrilatère MNPQ. Enfin on a, comme il est aisé de le vérifier,

$$\text{gr. AB} = \text{gr. CD}.$$

Cette solution correspond au cas III de M. Kempe. La *fig.* 6 montre la disposition de l'appareil dans le cas où les triangles se réduisent à des lignes droites. ABCD est alors un trapèze isoscèle, et les deux quadrilatères sont symétriques par rapport à la médiane de ce trapèze.

Le cas très-remarquable où $a = d$ est dessiné dans la *fig.* 7.

Fig. 7.



Alors, si l'on fixe M_1N_1, et que l'on supprime les tiges inutiles MN, MQ, le point N décrit une droite perpendiculaire à M_1N_1, et l'on obtient le premier appareil à ligne droite, composé de cinq tiges, de M. Hart. Mais, si l'on conserve les deux tiges MN, MQ, on réalise, au moyen de sept tiges seulement, le mouvement de la droite MN parallèlement à elle-même. On a vu, dans notre article antérieur, que la seconde disposition de M. Hart permet d'obtenir le même résultat.

Nous avons supposé jusqu'ici la cubique T indécomposable. Considérons le cas où l'on a

$$tt''' = t''t''.$$

Alors, en désignant par θ' la valeur commune des deux membres de l'équation précédente, on aura

$$u = \frac{\theta}{t'''} = \frac{\theta}{\theta'}t, \quad u' = \frac{\theta}{\theta'}t', \quad u'' = \frac{\theta}{\theta'}t'', \quad u''' = \frac{\theta}{\theta'}t''',$$

Ce cas a donc été déjà examiné.

De même, si l'on a

$$tt'' = t't''' = \theta',$$

on pourra poser

$$u = \frac{\theta}{\theta'}t', \quad u' = \frac{\theta}{\theta'}t, \quad u'' = \frac{\theta}{\theta'}t''', \quad u''' = \frac{\theta}{\theta'}t''.$$

Ce cas se ramène aussi à un autre qui a déjà été discuté, si l'on effectue la permutation circulaire qui change t en t', u en u'.

Il ne reste plus que le cas où l'on a $tt' = t''t'''$. En répétant le raisonnement de la page 180, nous voyons que nous pouvons nous contenter d'examiner l'hypothèse où la cubique du quadrilatère correspondant à la première équation (31) est décomposable. Or cela n'aura lieu que si l'on a

$$\theta = ht't''',$$

h étant une constante, et, en substituant cette expression de θ, les équations (31) deviendront linéaires en t, t', t'', t'''. Elles devront donc être identiques toutes à l'équation

$$at + at' + ct'' + ct''' = 0,$$

et l'on est ainsi conduit à un cas particulier d'une solution qui sera donnée à l'article suivant.

VI.

Il ne nous reste plus qu'à examiner le troisième système de solutions. Nous prendrons d'abord

$$u = \theta t'', \quad u' = \theta t''', \quad u'' = \theta t, \quad u''' = \theta t',$$
$$a_1 = kc, \quad b_1 = kd, \quad c_1 = ka, \quad d_1 = kb.$$

Les équations à vérifier prennent ici la forme

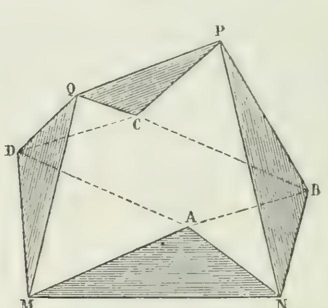
$$(32)\quad \begin{cases} a(1-a')t + bb't' = k\theta[c(1-a'_1)t'' + db'_1 t'''], \\ b(1-b')t' + cc't'' = k\theta[d(1-b'_1)t''' + ac'_1 t], \\ c(1-c')t'' + dd't''' = k\theta[a(1-c'_1)t + bd'_1 t'], \\ d(1-d')t''' + aa't = k\theta[b(1-d'_1)t' + da'_1 t''']. \end{cases}$$

Éliminons $k\theta$ entre les deux premières. Nous aurons une équation du second degré

$$[a(1-a')t + bb't'][ac'_1 t - (1-b'_1)(at + bt' + ct'')]$$
$$= [b(1-b')t' + cc't''][c(1-a'_1)t'' - b'_1(at + bt' + ct'')].$$

Cette relation devra être identique si la cubique T est indécom-

Fig. 8.



posable. Les relations qu'on obtient ainsi et celles qu'on en déduit par des permutations sont contenues dans le tableau suivant :

$$(f)\quad \begin{cases} a'_1 = a', \quad b'_1 = b', \quad c'_1 = c', \quad d'_1 = d', \\ c' = a', \quad b' = d' = 1 - a', \\ k = 1, \quad \theta = -1. \end{cases}$$

On a alors

$$AB = (1-a')(at + bt'), \qquad BC = a'(bt' + ct''),$$
$$CD = (1-a')(ct'' + dt'''), \qquad DA = a'(dt''' + at).$$

Les triangles MDQ, MAN, PBN, PCQ sont directement semblables, et le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. L'un des deux systèmes de quatre triangles est dessiné dans la *fig.* 8. La

partie non représentée du système articulé est symétrique de la première par rapport au centre du parallélogramme ABCD. Cette solution correspond au cas I de M. Kempe.

On reconnaît aisément que les cas où la cubique est décomposable se ramènent à d'autres déjà examinés.

Si l'on a

$$tt'' = t' t''' = \theta',$$

on pourra poser

$$u = \theta t'' = \frac{\theta\theta'}{t}, \quad u' = \frac{\theta\theta'}{t'}, \quad u'' = \frac{\theta\theta'}{t''}, \quad u''' = \frac{\theta\theta'}{t''},$$

et ce système a été étudié.

De même, si l'on a

$$tt' = t'' t''' = \theta',$$

on pourra poser

$$u = \theta t'' = \frac{\theta\theta'}{t'''}, \quad u' = \frac{\theta\theta'}{t''}, \quad u'' = \frac{\theta\theta'}{t'}, \quad u''' = \frac{\theta\theta'}{t},$$

ce qui nous ramène à une hypothèse déjà étudiée; de même enfin, si l'on a

$$tt''' = t' t''.$$

Étudions maintenant la dernière solution possible, celle pour laquelle on a

$$t = \frac{\theta}{u''}, \quad t' = \frac{\theta}{u'''}, \quad t'' = \frac{\theta}{u}, \quad t''' = \frac{\theta}{u'}.$$

Les équations à vérifier sont les suivantes :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
a(1-a')t + bb't' &= k\theta\left[\frac{c(1-a'_1)}{t''} + \frac{db'_1}{t'''}\right],\\
b(1-b')t' + cc't'' &= k\theta\left[\frac{d(1-b'_1)}{t'''} + \frac{ac'_1}{t}\right],\\
c(1-c')t'' + dd't''' &= k\theta\left[\frac{a(1-c'_1)}{t} + \frac{bd'_1}{t'}\right],\\
d(1-d')t''' + aa't &= k\theta\left[\frac{b(1-d'_1)}{t'} + \frac{da'_1}{t''}\right].
\end{aligned}\right.$$

Éliminons $k\theta$ entre les deux premières, nous aurons

$$[b(b'_1 - b')t' + cc'b'_1 t'' - a(1-a')(1-b'_1)t]\left(\frac{a}{t} + \frac{b}{t'} + \frac{c}{t''}\right)$$

$$+ a^2(1-a')c'_1 + abb'c'_1\frac{t'}{t} - bc(1-b')(1-a'_1)\frac{t'}{t''} - c^2c'(1-a'_1) = 0.$$

Si la cubique est indécomposable, cette équation devra être identique à l'équation (11), et les équations d'identification, jointes à celles qu'on en déduit par des permutations, nous donneront

$$(g)\quad \begin{cases} a'_1 = \dfrac{d'-1}{b'+d'-1}, & b'_1 = \dfrac{a'-1}{a'+c'-1}, \\ c'_1 = \dfrac{b'-1}{b'+d'-1}, & d'_1 = \dfrac{d'}{b'+d'-1}, \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} (1-a')(1-b')(1-c')(1-d') = a'b'c'd', \\ a^2(1-a')(1-b') - b^2b'(1-b') + c^2c'b' - \dfrac{b'c'd'}{1-c'}d^2 = 0. \end{cases}$$

Quand ces relations seront satisfaites, les équations (33) se réduiront à une seule. Mais il reste encore à exprimer que la valeur de $k\theta$ fournie par l'une quelconque de ces équations a son module constant.

Multipliant membre à membre la première équation et sa conjuguée, on trouve

$$a^2(1-a')(1-\alpha') + b^2b'\beta' - c^2k^2(1-a'_1)(1-\alpha'_1) - k^2d^2b'_1\beta'_1$$
$$= k^2cd\left[(1-a')\beta'_1\frac{t'''}{t''} + b'_1(1-\alpha'_1)\frac{t''}{t'''}\right]$$
$$- ab(1-a')\beta'\frac{t}{t'} - ab(1-\alpha')b'\frac{t'}{t}.$$

Cette relation doit être identique à la suivante :

$$a^2 + b^2 + ab\left(\frac{t}{t'} + \frac{t'}{t}\right) = c^2 + d^2 + cd\left(\frac{t''}{t'''} + \frac{t'''}{t''}\right).$$

Nous sommes ainsi conduit aux équations

$$(g)\quad \frac{b'}{1-a'} = \frac{\beta'}{1-\alpha'}, \quad \frac{\delta'}{1-\gamma'} = \frac{d'}{1-c'},$$

$$(35)\qquad \frac{\gamma'}{1-\beta'}=\frac{c'}{1-b'},\quad \frac{\alpha'}{1-\delta'}=\frac{a'}{1-d'},$$

$$(g)\qquad \left\{\begin{aligned} k^2 &= \frac{b'd'}{(1-a')(1-c')}(a'+c'-1)(\alpha'+\gamma'-1)\\ &= \frac{a'c'}{(1-b')(1-d')}(b'+d'-1)(\beta'+\delta'-1).\end{aligned}\right.$$

En tenant compte des équations (35), on reconnaît aisément que la dernière équation (34) est identique à l'équation conjuguée et qu'on peut la mettre sous la forme

$$(36)\quad a^2(a'-\alpha')+b^2(b'-\beta')+c^2(c'-\gamma')+d^2(d'-\delta')=0,$$

qui exprime que la somme algébrique des aires des triangles construits sur les quatre côtés du quadrilatère est nulle.

Cette dernière solution a été aussi rencontrée par M. Kempe et étudiée complétement à divers points de vue; les appareils les plus intéressants auxquels elle conduit sont précisément ceux dont nous avons fait, après M. Hart, la théorie géométrique (p. 152 de ce Volume).

Nous ne reviendrons pas sur ce sujet, mais nous dirons quelques mots d'une forme élégante que l'on peut donner aux équations qui se présentent dans la solution actuelle et dans plusieurs des solutions précédentes du problème posé.

Nous avons rencontré le système d'équations

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{b'}{1-a'}=\frac{\beta'}{1-\alpha'},\quad \frac{d'}{1-c'}=\frac{\delta'}{1-\gamma'},\\ &\frac{c'}{1-b'}=\frac{\gamma'}{1-\beta'},\quad \frac{a'}{1-d'}=\frac{\alpha'}{1-\delta'}.\end{aligned}\right.$$

La signification géométrique de ces relations est presque évidente. La première, par exemple, exprime que le rapport complexe

$$\frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{NP}}:\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{MN}}$$

est égal à son conjugué. Il a donc un argument égal à $k\pi$. C'est dire que l'angle BNA est égal à PNM, ou, ce qui est la même chose, que les angles BNP, ANM sont égaux et de même sens de rotation

(*fig.* 8). En d'autres termes, les deux triangles qui se réunissent en un sommet du quadrilatère y ont le même angle. Il suit de là que les angles à la base de ces triangles, égaux par couples de deux, n'ont que quatre valeurs distinctes. En appelant m, n, p, q les tangentes de ceux de ces angles qui ont leurs sommets en M, N, P, Q, on est conduit à la solution suivante des équations (37) et à l'expression des quantités a'. On trouvera

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} a' &= \frac{n}{n-m}(1+im), & b' &= \frac{p}{p-n}(1+in),\\ c' &= \frac{q}{q-p}(1+ip), & d' &= \frac{m}{m-q}(1+iq),\\ 1-a' &= \frac{n}{n-m}(1+in), & 1-b' &= \frac{n}{n-p}(1+ip),\\ 1-c' &= \frac{p}{p-q}(1+iq), & 1-d' &= \frac{q}{q-m}(1+im). \end{aligned}\right.$$

Si les triangles se réduisent à des droites, il suffira de supposer que m, n, p, q tendent vers zéro, leurs rapports demeurant finis, ce qui revient à garder les formules précédentes, en y supprimant les termes imaginaires.

Si l'on adopte les expressions (38) pour l'étude de la dernière solution, on trouvera, pour les valeurs m_1, n_1, p_1, q_1 des quantités m, n, p, q relatives au second quadrilatère, les expressions très-simples

$$(39)\qquad \text{arc tang}\, m_1 = \text{arc tang}\, m - \text{arc tang}\frac{h'}{h},$$

où l'on a

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} h &= mp - nq,\\ h' &= mp(n+q) - nq(m+p). \end{aligned}\right.$$

On a aussi

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} k^2 &= \frac{h^2+h'^2}{(p-n)(p-q)(m-n)(m-q)},\\ 1-k^2 &= \frac{h'[(n+q)(1-mp)-(m+p)(1-nq)]}{(p-n)(p-q)(m-n)(m-q)},\\ a'_1 &= \frac{q(p-n)(1+im)}{h+ih'},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ces formules permettront de se rendre compte très-aisément de tous les cas particuliers de la solution générale.

En résumé, nous avons trouvé toutes les solutions de M. Kempe, plus celle de la *fig.* 4, qui nous paraît nouvelle.

VII.

Toutes les recherches précédentes reposent sur l'hypothèse que les formules établissent une correspondance uniforme entre les points de la cubique T, liée au quadrilatère T, et ceux de la cubique U. Nous allons montrer, en terminant, que tous les cas de correspondance multiple se ramènent à celui que nous avons traité et sont compris dans les solutions données.

Supposons, en effet, qu'à un système de valeurs des u puissent correspondre, par les formules (8), deux systèmes différents

$$t, t', t'', t''', \quad t_1, t'_1, t''_1, t'''_1$$

de valeurs des t. On aura alors, en vertu de ces formules,

$$(42)\quad \begin{cases} a(1-a')t + bb't' = a(1-a')t_1 + bb't'_1, \\ b(1-b')t' + cc't'' = b(1-b')t'_1 + cc't''_1, \\ c(1-c')t'' + dd't''' = c(1-c')t''_1 + dd't'''_1, \\ d(1-d')t''' + aa't = d(1-d')t'''_1 + aa'_1t_1. \end{cases}$$

La première équation peut s'écrire

$$a(1-a')(t-t_1) = bb'(t'_1 - t'),$$

et, en y remplaçant les imaginaires par leurs conjuguées,

$$a(1-\alpha')\frac{t_1-t}{tt_1} = b\beta'\frac{t'-t'_1}{t't'_1}.$$

Les différences $t - t_1$, $t' - t'_1$ ne sont pas nulles, puisque les deux systèmes de valeurs sont distincts. On a donc, en divisant les équations membre à membre,

$$tt_1\frac{1-a'}{1-\alpha'} = \frac{b'}{\beta'}t't'_1.$$

De cette équation et des équations analogues on déduit

$$t_1 = h\frac{\theta}{t}, \quad t'_1 = h'\frac{\theta}{t'}, \quad t''_1 = h''\frac{\theta}{t''}, \quad t'''_1 = h'''\frac{\theta}{t'''},$$

θ étant une inconnue auxiliaire, h, h', h'', h''' des constantes. Si l'on porte ces valeurs de $t_1, \ldots, t'''_1$ dans l'équation

$$at_1 + bt'_1 + ct''_1 + dt'''_1 = 0,$$

on obtient

$$\frac{ah}{t} + \frac{bh'}{t'} + \frac{ch''}{t''} + \frac{dh'''}{t'''} = 0.$$

Cette équation n'est vérifiée (en excluant le cas du parallélogramme) que si les quantités h sont égales. On peut les supposer égales à 1, et l'on a

$$(43) \qquad t_1 = \frac{\theta}{t}, \quad t'_1 = \frac{\theta}{t'}, \quad t''_1 = \frac{\theta}{t''}, \quad t'''_1 = \frac{\theta}{t'''},$$

et par conséquent

$$a(1-a')t + bb't' = \theta\left(a\frac{1-a'}{t} + \frac{bb'}{t'}\right),$$

$$b(1-b')t' + cc't'' = \theta\left(b\frac{1-b'}{t'} + \frac{cc'}{t''}\right).$$

Éliminant θ entre les deux premières, on trouve

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} & ab(1-a')(1-b')\left(\frac{t}{t'} - \frac{t'}{t}\right) + acc'(1-a')\left(\frac{t}{t''} - \frac{t''}{t}\right) \\ & \quad + bcb'c'\left(\frac{t'}{t''} - \frac{t''}{t'}\right). \end{aligned} \right.$$

Cette équation ne peut jamais être satisfaite tant que la cubique T est indécomposable. D'ailleurs, nous avons vu (art. III) que, si la cubique T est indécomposable, il en est de même de la cubique U du quadrilatère conjugué. Donc :

Tant que la cubique de l'un des six quadrilatères conjugués sera indécomposable, il y aura une correspondance uniforme entre les positions correspondantes de ces quadrilatères conjugués ou entre les points correspondants de leurs cubiques.

Il suit de là que, en traitant spécialement de la correspondance uniforme, nous avons certainement obtenu tous les systèmes dans lesquels un seul des quadrilatères a sa cubique indécomposable. Il suffira donc d'examiner si, quand tous les six quadrilatères ont leurs cubiques décomposables, il peut y avoir une correspondance multiple entre deux quadrilatères conjugués. Nous allons voir que cela est impossible.

En effet, considérons le quadrilatère correspondant à la première des équations (8). Pour que sa cubique soit décomposable, il faut que l'on ait une des équations

$$uu' = htt', \quad ut' = hu't, \quad ut = hu't'.$$

D'abord les deux dernières sont impossibles dans le cas d'une correspondance multiple, car elles déterminent toutes deux une seule valeur de $\frac{t}{t'}$ quand u et u' sont connus. Or il résulte des formules (43) que, dans les cas de correspondance multiple, les deux valeurs de $\frac{t}{t'}$, $\frac{t_1}{t'_1}$ sont distinctes et réciproques. On ne peut donc avoir que la relation

$$tt' = \frac{1}{h} uu'.$$

Mais on aura aussi, pour le second système de valeurs des t,

$$t_1 t'_1 = \frac{1}{h} uu',$$

ou, en vertu des formules (43),

$$\theta = kuu'.$$

La considération de la seconde des équations (8) nous donnerait de même

$$\theta = k'u'u'',$$

résultat incompatible avec le précédent tant que U n'est pas un parallélogramme, ce qu'on peut supposer. Ainsi :

Il n'existe pas d'autres solutions que celles qui ont été déduites de l'étude de la correspondance uniforme.

Il était d'autant plus nécessaire d'établir cette proposition, que sur les sept solutions trouvées trois présentent des cas de correspondance multiple :

1° La solution (a) représentée par la *fig.* 2, comme nous l'avons déjà fait remarquer;

2° La solution (d), représentée par la *fig.* 5 ;

3° Enfin la solution (e), représentée dans la *fig.* 6.

Deux des quadrilatères conjugués, CP″BP et DM″AM, sont des parallélogrammes, et à une position de l'un de ces quadrilatères correspondent deux positions de l'autre, symétriques par rapport à la droite QQ″NN″.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

THOMAE (J.). — Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. 2 Auflage. 1 vol. in-8°, 197 p. Halle, 1874.

Le Livre de M. Thomae contient sous une forme condensée, ainsi que l'indique le titre, les propriétés les plus essentielles des fonctions Θ d'une seule variable, propriétés qui constituent le fondement de la théorie des fonctions elliptiques; elles sont résumées en soixante-dix pages. La première Partie de l'Ouvrage est consacrée à l'établissement des propositions fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, des intégrales prises entre des limites imaginaires, à quelques notions sur les surfaces de Riemann, nécessaires pour la représentation d'une fonction rationnelle de x et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en x, enfin aux intégrales elliptiques.

Les premières pages du livre de M. Thomae, employées à définir nettement les fonctions dont l'auteur va s'occuper à discuter différents genres de discontinuité, à prévenir le lecteur contre certaines erreurs où tombent volontiers les commençants et dont tous les livres élémentaires ne sont pas exempts, sont peut-être particulièrement dignes de fixer l'attention.

Pour ce qui concerne les fonctions d'une seule variable réelle, nous citerons la construction simple d'une fonction bien définie de x, entre a et b, pour laquelle le rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

quand h tend vers zéro par des valeurs positives, a toujours pour limite zéro, et qui toutefois n'est pas constante. Supposant que l'on ait $a < \alpha < \beta < \ldots < b$, on donnera à la fonction la valeur zéro pour toutes les valeurs de x comprises entre a et α, la limite supérieure α étant exceptée, la valeur 1 pour toutes les valeurs de x qui vont de α à β, en excluant la dernière limite (et non la première), etc... L'existence d'une telle fonction met en évidence la fausseté d'une démonstration bien connue de ce qu'une fonc-

tion dont la dérivée est constamment nulle entre deux limites a et b est constante entre ces limites, démonstration qui suppose seulement que le rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tend vers zéro quand h tend vers zéro par des valeurs positives; l'erreur tient à ce que la supposition précédente n'entraîne pas l'existence d'un nombre h tel que pour *toute* valeur de x comprise entre a et b le rapport soit plus petit qu'un nombre donné. M. Thomae montre que, lorsque, pour toute valeur de x comprise entre les limites, le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement positif ou négatif de la variable tend vers zéro, la fonction est effectivement constante; au surplus, la démonstration, maintenant classique, due à M. Ossian Bonnet, de la formule

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

met la chose nettement en évidence, et de la façon la plus simple.

Citons encore la distinction de ce genre particulier de discontinuité relative à des valeurs particulières de la variable, et qui disparaît en changeant la valeur de la fonction pour ces valeurs particulières. M. Seidel en a donné (*Journal de Crelle*, t. 73, p. 304) un exemple simple dans la fonction

$$f(x)=\lim\frac{\mathrm{A}n}{x^n+x^{-n}+n}, \quad \text{pour} \quad n=\infty,$$

qui pour $x \gtrless 1$ est nulle, et pour $x=1$ est égale à A, et présente ainsi, pour cette valeur particulière, la discontinuité signalée.

Pour ce qui est des fonctions de deux variables, M. Thomae insiste avec raison sur la nécessité de définir la continuité de la fonction $f(x,y)$ pour le point x, y par la condition que l'on puisse toujours trouver un nombre h assez petit pour que la différence

$$f(x+\xi h, y+\eta h)-f(x,y)$$

puisse être rendue plus petite, en valeur absolue, qu'un nombre donné aussi petit qu'on le voudra, ξ et η étant des nombres quelconques satisfaisant à l'inégalité $\xi^2+\eta^2 \leq 1$. Cette condition,

pour les points x, y situés sur le contour qui limite le domaine dans l'intérieur duquel on astreint la fonction à être continue, doit être modifiée de manière à n'y faire entrer que les valeurs de ξ, η qui satisfont à l'inégalité précédente et qui répondent à des points situés dans le domaine considéré. Ainsi, il ne suffit pas que $f(x+\theta h, y) - f(x, y)$ et $f(x, y+\theta h) - f(x, y)$ tendent vers zéro avec h pour que la fonction soit continue. La fonction

$$f(x, y) = \sin 4 \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

à laquelle on attribue la valeur zéro quand x et y sont nuls, est évidemment discontinue pour le point $x = 0, y = 0$, bien que l'on ait

$$f(\theta h, 0) - f(0, 0) = 0, \quad f(0, \theta h) - f(0, 0) = 0.$$

Le même exemple montre aussi que l'existence des dérivées partielles pour un système particulier de valeurs des variables ($x = 0$, $y = 0$) n'entraîne pas l'existence de la différentielle totale. Un autre exemple intéressant est fourni par la fonction

$$f(x, y) = r^{\mu} F(\varphi),$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

et où $F(\varphi)$ est la fonction définie par la série procédant suivant les sinus des multiples de l'arc φ, qui entre $-\pi$ et $+\pi$ représente, sauf pour $\varphi = 0$, la fonction impaire

$$(\varphi^2 - \pi^2) \sqrt[3]{\frac{1}{\varphi}}.$$

Signalons encore ce genre de discontinuité qui disparait par le changement des valeurs d'une fonction en des points particuliers ou le long d'une courbe; la fonction de M. Seidel

$$\lim \frac{n f(x, y)}{r^n + r^{-n} + n}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{pour} \quad n = \infty,$$

nulle pour tous les points du plan non situés sur le cercle

$$x^2 + y^2 = 1,$$

en est un exemple simple.

Ces préliminaires établis permettent à l'auteur de donner la notion précise des fonctions d'une variable imaginaire $z = x + yi$ auxquelles il entend se borner, fonctions pour lesquelles ne doit exister aucune discontinuité du dernier genre et qui pour tous les points du domaine considéré, sauf en des points *isolés* ou le long de lignes *isolées*, satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$i\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

M. Thomae montre ensuite comment le changement d'une variable imaginaire en une autre conduit à la *représentation conforme* d'une portion de plan sur une autre portion de plan, définit ce qu'il faut entendre par une intégrale prise entre des limites imaginaires, établit d'après Riemann le théorème fondamental de Cauchy; démontre les propositions relatives au développement d'une fonction en série procédant suivant les puissances entières positives ou négatives de la variable, en somme de fractions rationnelles, en produits d'un nombre infini de facteurs; donne la notion d'une fonction doublement périodique, du parallélogramme élémentaire et de ses propriétés; montre comment les périodes, les zéros et les infinis définissent une fonction doublement périodique, et comment les fonctions doublement périodiques du second ordre suffisent à construire les fonctions doublement périodiques d'ordre supérieur. L'auteur est alors amené à dire quelques mots des fonctions doublement périodiques à infinis doubles et des fonctions $\sigma(x)$ de M. Weierstrass, dont le logarithme a pour dérivée seconde une fonction de ce caractère, qui peuvent être définies par l'égalité

$$\sigma(x) = x\prod\left(1 - \frac{x}{2mK + 2niK'}\right)e^{\frac{x}{2mK+2niK'} + \frac{\frac{1}{2}x^2}{(2mK+2niK')^2}},$$

et qui d'ailleurs ne diffèrent que par un facteur exponentiel des fonctions Θ. Après avoir établi la relation algébrique entre une fonction doublement périodique du second ordre et sa dérivée, l'auteur est amené à étudier les surfaces de Riemann, en tant qu'elles servent dans la théorie des fonctions elliptiques; il donne ensuite la forme canonique des intégrales elliptiques et leurs propriétés les plus simples.

Le point de départ de M. Thomae, dans l'étude des fonctions Θ, est pris dans les équations fonctionnelles

$$\vartheta_{h,g}(x+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}\vartheta_{h,g}(x),$$
$$\vartheta_{h,g}(x+\mu a) = (-1)^{g\mu}e^{-a\mu^2-2\mu x}\vartheta_{h,g}(x),$$

où h, g, λ, μ désignent des nombres entiers quelconques, et ϑ une fonction uniforme, finie et continue dans tout le plan. En faisant $x = \log t$, on aperçoit aisément que les fonctions cherchées doivent être développables en séries procédant suivant les puissances entières positives et négatives de $t = e^x$; les équations fonctionnelles posées, jointes à l'équation aux dérivées partielles

$$4\frac{\partial\vartheta_{h,g}(x)}{\partial a} = \frac{\partial^2\vartheta_{h,g}(x)}{\partial x^2}$$

déterminent les coefficients de ces séries ; les valeurs 0, 1 attribuées aux indices h, g conduisent aux quatre fonctions ϑ. Le procédé même qui a servi pour intégrer les équations fonctionnelles conduit à prouver l'existence d'une relation linéaire à coefficients constants entre $p+1$ fonctions qui satisfont aux équations

$$\varphi(x+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}\varphi(x),$$
$$\varphi(x+\mu a) = (-1)^{g\mu}e^{-a\mu^2 p-2a\mu x p}\varphi(x).$$

De là résultent aisément les relations entre les carrés des fonctions ϑ et les expressions développées du produit de deux fonctions ϑ dont les arguments sont $x+\xi$, $x-\xi$; ces dernières formules conduisent immédiatement au théorème sur l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. De ce théorème on peut déduire les équations différentielles auxquelles satisfont ces fonctions; on peut dès lors établir la notion des intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce, leur expression au moyen des fonctions ϑ, et les propositions relatives à l'addition. L'auteur passe ensuite aux divers développements en produits infinis et en séries trigonométriques, et expose quelques-unes des conséquences arithmétiques qui s'en déduisent naturellement. Enfin, après avoir consacré quelques pages aux fonctions qu'on obtient en généralisant la série du binôme par le procédé appliqué par M. Heine à la série hypergéométrique, il s'occupe de la transformation linéaire des fonctions ϑ et des fonctions elliptiques.

J. T.

ROHN (K.). — **Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Functionen** $p = 2$. — München, 1878. In-8°, 60 pages.

On connaît l'étroite connexion qui existe entre les fonctions elliptiques et les courbes planes du troisième ordre ; si l'on considère les fonctions hyperelliptiques pour lesquelles les fonctions Θ correspondantes dépendent de *deux* arguments, c'est à une *surface* que l'on peut espérer de les relier par un mode analogue à celui que nous venons de rappeler, et la surface qui se trouve ainsi étroitement unie à ces fonctions est la surface de Kummer.

C'est cette connexion qu'étudie M. Rohn dans son importante *dissertation inaugurale*.

Dans la première Partie, l'auteur s'occupe de la surface de Kummer en elle-même, définit les deux paramètres qui déterminent chaque point, recherche les diverses formes que peut affecter la surface et les régions dans lesquelles on peut la décomposer ; le terrain ainsi préparé, M. Rohn expose, dans la seconde Partie de son travail, comment on peut représenter les fonctions hyperelliptiques ($p = 2$) sur la surface qu'il a étudiée, et, dans la troisième, compare avec sa méthode celle qu'a donnée M. Borchardt.

Nous indiquerons quelles variables choisit l'auteur pour déterminer les différents points de la surface.

Au système de complexes du second degré homofocaux

$$\frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \ldots + \frac{x_6^2}{k_2 - \lambda} = 0,$$

où les six complexes linéaires fondamentaux, deux à deux en involution, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., sont tels que l'on ait identiquement

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 0,$$

correspond une même surface de Kummer, touchée par chaque droite singulière. L'équation du système de complexes est du quatrième degré en λ, en sorte que chaque droite appartient à quatre complexes du système ; réciproquement, quatre complexes du système se coupent suivant trente-deux droites, dont les coordonnées

sont données par les formules

$$\rho x_\alpha^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - \lambda_4)}{f'(k_\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 6),$$

où $f'(k_\alpha)$ est la valeur de la dérivée, pour $\lambda = k_\alpha$, de

$$f(\lambda) = (k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)\ldots(k_6 - \lambda).$$

Les droites singulières s'obtiennent en égalant deux paramètres λ. D'ailleurs, en général, une seule droite du faisceau de tangentes en un point à la surface de Kummer appartient, en tant que droite singulière, à chaque complexe du système, les deux autres points où elle rencontre la surface étant les points singuliers correspondants; par suite, si la tangente considérée est une tangente d'inflexion, le faisceau entier des tangentes appartient au complexe dont cette droite est une droite singulière. Les tangentes en un point appartiennent donc à deux complexes du système homofocal, et ce sont les paramètres λ_1, λ_2 de ces complexes qui servent à M. Rohn pour définir ce point; quant aux autres paramètres λ_3, λ_4 des tangentes, ils sont égaux. Lorsque leur valeur commune λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la tangente décrit le faisceau et, pour $\lambda = \lambda_1$ ou λ_2, devient une tangente d'inflexion. Pour chaque système de valeur de λ_1, λ_2, on peut donc obtenir les six coordonnées de chacune des tangentes d'inflexion relatives au point correspondant. Les différentes combinaisons de signe fournissent trente-deux couples de telles tangentes, en sorte qu'à chaque système de valeurs de λ_1, λ_2 correspondent trente-deux points de la surface de Kummer; ces trente-deux points peuvent être regardés comme les intersections de deux lignes asymptotiques dont les équations, dans le système de coordonnées précédemment défini, seraient $\lambda_1 =$ const., $\lambda_2 =$ const. L'emploi des fonctions hyperelliptiques permet de distinguer les trente-deux points et de leur attribuer des paramètres différents. Enfin, la comparaison du procédé de représentation de M. Borchardt et du sien conduit M. Rohn à reprendre l'étude des transformations quadratiques et leur signification relative à la surface de Kummer; il parvient ainsi, pour ces transformations, aux formules les plus simples.

Quant à l'étude des diverses formes de la surface de Kummer, des relations entre ses nœuds et ses points doubles, elle a naturel-

lement pour point de départ la distinction des cas qui peuvent se présenter quant à la réalité des six complexes linéaires fondamentaux. Ces six complexes étant donnés, il existe une triple infinité de systèmes homofocaux correspondants, en sorte qu'on peut prendre arbitrairement un point de l'espace pour nœud de la surface de Kummer; les seize nœuds et la surface tout entière sont alors déterminés. Si l'on prend le nœud sur la surface réglée intersection de trois des complexes fondamentaux, les seize nœuds sont aux points d'intersection de quatre génératrices d'un système et de quatre génératrices de l'autre, et la surface de Kummer n'est autre que la surface du second degré comptée deux fois; cette dernière, avec les seize points d'intersection des huit génératrices considérées, peut être regardée comme l'image d'une surface de Kummer, avec ses seize nœuds, qui, par une déformation continue, viendrait se confondre avec elle. J. T.

BOUSSINESQ (J.). — Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé a celui de massifs solides et sur la poussée des terres sans cohésion. — Paris, Gauthier-Villars, 1876. In-4° de 180 p. Prix : 10 fr.

Dans ce Mémoire, l'auteur essaye de poser les bases de la Mécanique des corps semi-fluides qui sont, les uns pulvérulents, les autres plastiques. Rankine, dans une étude *Sur la stabilité de la terre sans cohésion* (*Philosophical Transactions*, 1856-1857), a traité de l'équilibre limite que présentent des masses pulvérulentes sur le point de s'ébouler; il a admis, comme base de son analyse, qu'en chaque point d'une telle masse la pression la plus inclinée sur la normale à l'élément plan qu'elle sollicite fait avec cette normale un angle égal à celui du frottement intérieur ou de terre coulante. D'autre part, M. Tresca, dans un Mémoire *Sur le poinçonnage des métaux et la déformation des corps solides* (*Savants étrangers de l'Académie de Paris*, t. XX, 1872), et M. de Saint-Venant, dans divers articles insérés aux *Comptes rendus* de 1870 et 1871, ont été conduits par l'expérience à admettre, comme principe fondamental de la Mécanique des corps plastiques, la constance de la plus grande composante tangentielle de pression aux divers points

de ces corps, supposés pétris avec une certaine lenteur. Mais on n'avait pas encore cherché comment ces états ébouleux et plastiques d'une matière que l'on déforme indéfiniment se rattachent aux états élastiques ordinaires, correspondant à des déformations moins étendues, c'est-à-dire comprises entre les limites d'élasticité. En outre, pour les masses pulvérulentes, on n'avait aucune connaissance de l'expression de leurs forces élastiques en fonction des petites déformations éprouvées à partir de l'état naturel. C'est à cette double lacune que répond le Mémoire de M. Boussinesq.

Admettant que les expressions des forces élastiques sont développables en séries très-convergentes suivant les puissances entières des déformations, il cherche les formes auxquelles se réduisent nécessairement ces expressions, supposées de grandeur modérée, dans les deux cas d'un solide d'élasticité constante et d'une masse pulvérulente, c'est-à-dire suivant que le corps présente toujours une rigidité finie ou suivant qu'il résiste aux déformations, alors seulement qu'il supporte dans tous les sens une pression plus ou moins grande. Dans le premier cas, il est conduit aux formules très-connues de Lamé (à deux coefficients d'élasticité λ, μ). Dans le second cas, il arrive, pour les six composantes N, T suivant les x, y, z des pressions exercées sur les éléments plans qui leur sont normaux, aux relations

$$N_1 = p\left(-1 + 2m\frac{du}{dx}\right), \quad N_2 = p\left(-1 + 2m\frac{dv}{dy}\right),$$

$$N_3 = p\left(-1 + 2m\frac{dw}{dz}\right),$$

$$T_1 = pm\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right), \quad T_2 = pm\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right), \quad T_3 = pm\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz}\right);$$

m désigne un coefficient constant pour chaque matière pulvérulente, p la pression moyenne exercée autour de la molécule considérée (x, y, z), et u, v, w les composantes du petit déplacement qu'elle a éprouvé. De plus, la même analyse montre que la dilatation cubique est négligeable en comparaison des trois dilatations linéaires dont elle égale sensiblement la somme algébrique. On peut donc joindre aux trois équations ordinaires d'équilibre où entrent les dérivées en x, y, z des forces N, T la quatrième

équation indéfinie

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

nécessaire à la détermination des quatre fonctions inconnues u, v, w, p.

Il existe, en outre, des conditions d'équilibre spéciales aux surfaces libres du massif et d'autres conditions, très-variées suivant les circonstances, concernant les surfaces de séparation de ce massif d'avec le sol ou les murs rigides qui le soutiennent. Ces dernières relations sont remplacées par une condition de maximum de stabilité intérieure dans le cas le plus important, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit des modes d'équilibre qui se produisent à la longue, une fois que les petits ébranlements auxquels tout massif est sans cesse exposé ont réussi à grouper les grains pulvérulents de la manière la moins forcée, la plus voisine de l'état naturel.

L'intégration du système d'équations indiqué fait connaître, dans chaque problème spécial, les valeurs de u, v, w, p, et par suite celles des déformations. Il reste ensuite à exprimer que les trois dilatations principales $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ satisfont partout à une certaine inégalité, c'est-à-dire ne sortent pas des limites d'élasticité imposées, comme on sait, à toute matière douée de la tendance à reprendre la forme dont on l'écarte. Dans le cas simple de déformations planes, on a $\partial_2 = 0$, et M. Boussinesq reconnaît que l'inégalité dont il vient d'être question revient, pour les masses pulvérulentes et pour les solides suffisamment plastiques, à supposer la plus grande dilatation ∂_1 inférieure à une constance spécifique ; le fait de l'absence de cohésion des massifs pulvérulents lui permet même de poser, pour ces massifs, $\partial_1 < \frac{\sin \varphi}{2m}$, φ désignant un angle aigu positif qu'il démontre plus loin être précisément celui du frottement intérieur.

Les intégrations sont faciles quand le massif homogène et pesant a pour surface libre un talus plan faisant un angle donné ω avec l'horizon, et que les déformations éprouvées, parallèles à son plan vertical de symétrie, se trouvent les mêmes en tous les points également distants du talus supérieur. M. Boussinesq effectue ces intégrations pour un massif pulvérulent et pour un massif solide. Les résultats deviennent fort simples dans les cas où la profondeur est suffisamment grande. Alors les dilatations principales ∂_1, ∂_3 sont

les mêmes en tous les points du massif pulvérulent, sensiblement proportionnelles à la distance au talus supérieur, dans le cas d'un massif solide. De plus, les bissectrices des angles formés par les éléments linéaires qui éprouvent ces dilatations principales ont des directions constantes en tous les points du massif pulvérulent, des directions qui tendent à devenir constantes quand on s'enfonce dans le massif solide. L'angle ε que fait avec la verticale une quelconque de ces directions est astreint, dans un massif pulvérulent de profondeur quelconque et dans un massif solide de profondeur très-grande, à vérifier l'inégalité

$$\cos^2(\omega - 2\varepsilon) > \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\varphi};$$

φ désigne pour un massif pulvérulent l'angle défini ci-dessus et pour un massif solide l'angle aigu, dont le sinus vaut $\mu : (\lambda + \mu)$. Cette inégalité n'est compatible avec aucune valeur réelle de ε quand on a $\omega > \varphi$, d'où se conclut l'impossibilité, pour un massif pulvérulent, de se soutenir sous un angle supérieur à celui de terre coulante, et pour un massif solide profond de se soutenir sous un angle supérieur à celui dont le sinus vaut le rapport $\mu : (\lambda + \mu)$, d'autant plus voisin de zéro qu'il s'agit d'un corps plus mou. Si au contraire $\omega < \varphi$, ε peut recevoir une infinité de valeurs; elles correspondent à tout autant de modes distincts d'équilibre d'élasticité, tous compris entre deux modes d'équilibre limite, l'un par détente, l'autre par compression, précisément identiques, dans les milieux pulvérulents, à ceux qu'avait découverts Rankine. M. Boussinesq démontre qu'un des modes d'équilibre d'élasticité ainsi obtenus, et un seul, convient au cas où le massif est soutenu d'un côté par un mur plan, soit lorsque ce mur présente un degré de résistance connu et que l'équilibre s'est réglé à la longue, soit lorsque le mur est une paroi sans pesanteur que maintient contre le massif une force donnée, comprise entre celle qui suffirait à peine pour le soutenir et celle qui le ferait refluer par écrasement au-dessus du talus supérieur, soit encore pour d'autres circonstances, les plus simples en théorie, mais peu réalisables pratiquement.

Les deux derniers paragraphes du Mémoire (§§ IX et X), qui sont aussi les plus longs, sont consacrés à la Dynamique des massifs incohérents et des solides malléables. L'auteur reconnaît d'abord

que les très-petites vibrations élastiques d'une masse pulvérulente non comprimée ne sont pas réglées par des équations linéaires, ce qui explique pourquoi ces masses ne peuvent pas vibrer *pendulairement* sous l'influence de leur élasticité et pourquoi elles étouffent le son. Il se borne ensuite à l'étude des mouvements assez lents dans lesquels l'inertie n'a qu'un rôle négligeable, si ce n'est en des points exceptionnels. Les six pressions N, T n'y diffèrent pas sensiblement, en chaque endroit, des forces élastiques maxima que comporte la matière, en sorte que l'équation caractéristique de l'état ébouleux ou de l'état plastique s'obtient en exprimant que les limites d'élasticité se trouvent atteintes; cette équation est précisément, soit la formule fondamentale posée par M. Rankine, soit celle de MM. Tresca et de Saint-Venant pour la plasticodynamique. M. Boussinesq joint donc cette relation finie en N, T aux trois équations bien connues qui expriment l'équilibre d'un élément de volume parallélépipédique et où entrent les dérivées en x, y, z des six pressions N, T. Mais il observe que la masse en équilibre ébouleux ou plastique n'admet généralement plus un *état naturel* où les pressions peuvent s'annuler partout; il faudrait séparer toutes ses particules infiniment petites les unes des autres pour qu'elles puissent se détendre simultanément sans se gêner.

M. Boussinesq complète le système de neuf équations indéfinies nécessaires à la détermination des six pressions N, T et des trois composantes u, v, w de la vitesse de chaque particule en admettant que les diverses fibres qui se croisent en un même point éprouvent *des dilatations persistantes proportionnelles à leurs dilatations élastiques actuelles*. Ce principe simple lui fournit aisément les cinq équations indéfinies qui manquaient. Enfin il joint des conditions évidentes spéciales, soit aux surfaces libres, soit aux couches en contact avec des parois solides, soit aux surfaces de séparation des parties passées à l'état ébouleux d'avec celles qui sont restées à l'état élastique ordinaire.

Comme première application, M. Boussinesq démontre que *la vitesse d'écoulement du sable par un orifice tend vers une limite ou devient indépendante de la hauteur de charge dès que celle-ci atteint une certaine valeur,* fait connu des anciens et qui leur permettait de mesurer le temps au moyen des sabliers. Il étudie ensuite la répartition des pressions dans un massif sans cohésion soutenu

par un mur, aux premiers moments d'un éboulement déterminé par l'ébranlement du mur. M. Maurice Lévy a heureusement appliqué au problème, en la découvrant de nouveau, une des deux solutions données par Rankine dont il a été parlé plus haut; seulement elle ne convient que pour un cas restreint, car elle n'est compatible avec le glissement de la matière du massif contre le mur qu'autant que celui-ci a sa face postérieure dirigée d'une certaine manière. M. Boussinesq en trouve d'autres beaucoup plus générales applicables pour des inclinaisons quelconques de ces faces et même pour le cas où les surfaces limites du massif sont courbes. Ces solutions comportent des représentations géométriques assez simples, et elles prouvent que, suivant les cas, une portion déterminée du massif, contiguë au mur de soutènement, reste à l'état élastique ou devient le siége d'un état ébouleux très-différent de celui qui affecte le reste. D'ailleurs, elles ne sont rigoureusement exactes que lorsque la matière pulvérulente présente une hétérogénéité trop peu sensible pour qu'il y ait lieu d'en tenir compte.

Un dernier paragraphe est consacré à l'étude, en coordonnées polaires, des déformations planes d'une masse plastique ou pulvérulente soumise en divers sens à des pressions beaucoup plus grandes que son poids, principalement quand ces pressions sont ou pareillement distribuées autour d'un axe, ou pareillement orientées en tous les points de chaque rayon vecteur émané de l'origine. M. Boussinesq en déduit, comme formules approximatives, les expressions simples et remarquables auxquelles M. Tresca a été conduit par l'expérience : 1° la force capable de faire pénétrer un poinçon cylindrique suivant l'axe d'un bloc de plomb de même forme, mais de plus grand diamètre, à contour tantôt libre, tantôt entouré d'un manchon rigide ; 2° la hauteur de la débouchure que détache ce poinçon, quand un orifice de même dimension transversale que lui est percé suivant son prolongement à travers le plan poli qui supporte le bloc poinçonné ; 3° enfin la force capable de faire écouler par un tel orifice un morceau cylindrique de plomb remplissant un vase en fer et poussé par un piston. M. Boussinesq trouve aussi les modes les plus simples de distribution des pressions qui se produisent dans une masse plastique ou pulvérulente remplissant l'angle dièdre formé par deux plans rigides, soit lorsque cet angle est constant et que la masse considérée y coule de manière que la

matière contiguë aux plans converge des deux côtés vers l'arête ou s'en éloigne des deux côtés, soit, au contraire, que l'angle des deux plans diminue ou grandisse et que l'écoulement soit produit par l'écrasement de la masse ou par sa détente latérale.

Le Mémoire se termine par l'exposition d'une méthode d'intégration graphique due à Rankine, pour traiter le problème de l'équilibre limite d'un massif pulvérulent à surface supérieure courbe. Rankine l'avait appliquée en faisant une hypothèse simplificative qui change beaucoup la question. M. Boussinesq montre comment elle peut, avec presque autant de simplicité, s'adapter aux équations vraies du problème. P. M.

MÉLANGES.

LETTRES DE LAPLACE A CONDORCET.

I.

A l'École militaire, ce 23 décembre 1771.

MONSIEUR,

En repassant sur les différens Mémoires que j'ay présenté jusques ici à l'Académie j'en ay extrait les remarques suivantes qui sont relatives à un objet dont vous vous estes occupé dans le troisième Volume des Mémoires de Thurin; et je prends la liberté de les soumettre à vostre examen.

Vous et M. de la Grange avez démontré dans ces Mémoires d'une manière fort élégante que, si l'on sçait intégrer l'équation

$$(1)\qquad 0 = y + H\frac{dy}{dx} + H'\frac{ddy}{dx^2} + \ldots + H^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n},$$

dx étant constant et H, H′, ... étant des fonctions de x, on pourra toujours intégrer celle-ci,

$$(2)\qquad X = y + H\frac{dy}{dx} + H'\frac{ddy}{dx^2} + \ldots + H^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n},$$

X étant une fonction de x.

Je suis parvenu par une méthode assez singulière non-seulement à démontrer ce théorème, mais encor à la règle suivante. Soit

$$y = Cu + C'u' + C''u'' + \ldots + C^{n-1}u^{n-1}$$

l'intégrale complète de l'équation (1), u, u', u'', ... étant des intégrales particulières de cette équation, et C, C', C'', ... étant des constantes arbitraires; on fera

$$\bar{u} = \frac{u'\,du - u\,du'}{du}, \quad \bar{\bar{u}} = \frac{\bar{u}'\,d\bar{u} - \bar{u}\,d\bar{u}'}{d\bar{u}}, \quad \bar{\bar{\bar{u}}} = \frac{\bar{\bar{u}}'\,d\bar{\bar{u}} - \bar{\bar{u}}\,d\bar{\bar{u}}}{d\bar{\bar{u}}},$$

$$\bar{u}' = \frac{u''\,du - u\,du''}{du}, \quad \bar{\bar{u}}' = \frac{\bar{u}''\,d\bar{u} - \bar{u}\,d\bar{u}''}{d\bar{u}}, \quad \ldots,$$

$$\bar{u}'' = \frac{u'''\,du - u\,du'''}{du}, \quad \ldots,$$

jusqu'à ce que l'on parvienne à former $\bar{u}^{z}$. Soit alors

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\bar{u}^{z}}\right) = z^{n-1}$$

(n n'étant pas un exposant, mais indiquant seulement le rang de z dans la suite des z). Si dans l'expression de z^{n-1} on change u^{n-1} en u^{n-2} et réciproquement, on formera z^{n-2}; si dans la même expression de z^{n-1} on change u^{n-1} en u^{n-3} et réciproquement, on formera z^{n-3}, et ainsi de suite; on aura

$$\begin{aligned} y = \; & u\;(C + \textstyle\int z\,X\,dx) \\ & + u'\;(C' + \textstyle\int z'\,X\,dx) \\ & + u''\;(C'' + \textstyle\int z''\,X\,dx) \\ & + \ldots\ldots\ldots \\ & + u^{n-1}(C^{n-1} + \textstyle\int z^{n-1}\,X\,dx), \end{aligned}$$

pour l'intégrale complète de l'équation (2).

Il résulte encore de cette méthode que l'intégrale de l'équation (2) dépend toujours de l'intégration de deux autres en degré $n - 1$ et dont il n'est même nécessaire que de trouver un nombre $n - 2$ d'intégrales particulières. La mesme méthode s'étend encor aux différences finies.

Soit l'équation différentio-différentielle aux différences finies

$$(3)\qquad X^x = y^x + H^x y^{x+1} + {}^1H^x y^{x-2} + \ldots + {}^{n-1}H^x y^{x+n},$$

X^x, H^x, ${}^1H^x$, ... étant des fonctions de x, et X^x, y^x, H^x, ... ne désignant pas des puissances de X, y, H, ..., mais le $x^{\text{ième}}$ terme de la série des X, des y, etc.

Que l'on désigne par la caractéristique Δ les différences finies et par la caractéristique Σ les intégrales finies; cela posé, soit

$$y^x = A u + {}'A{}'u + {}''A{}''u + \ldots + {}^{n-1}A{}^{n-1}u$$

l'intégrale de

$$(4)\qquad 0 = y^x + H^x y^{x+1} + \ldots + {}^{n-1}H^x y^{x+n},$$

u, $'u$, $''u$, ... étant des intégrales particulières de l'équation (4) et A, $'A$, ... étant des constantes arbitraires; que l'on fasse

$$\bar{u} = u\Delta\left(\frac{u'}{u}\right),\quad \bar{\bar{u}} = \bar{u}\Delta\left(\frac{\bar{u}'}{\bar{u}}\right),$$

$$\overline{u'} = u\Delta\left(\frac{u''}{u}\right),\quad \bar{\bar{u}}' = \bar{u}\Delta\left(\frac{\bar{u}''}{\bar{u}}\right),$$

$$\overline{u''} = u\Delta\left(\frac{u'''}{u}\right),\quad \ldots$$

jusques à ce qu'on parvienne à former $\overset{\overline{\scriptscriptstyle 1}}{u^{z}}$; que l'on fasse

$$\overset{\overline{\scriptscriptstyle 1}}{u^{z}} = {}^{n-1}z;$$

si dans cette expression on change ${}^{n-1}u$ en ${}^{n-2}u$ et réciproquement, on formera ${}^{n-2}z$, et ainsi de suite. L'intégrale de l'équation (3) sera

$$\begin{aligned} y^x = \quad & u\left(A \pm \sum \frac{X^x}{z}\right) \\ + \; & {}'u\left({}'A \pm \sum \frac{X^x}{{}'z}\right) \\ + \; & {}^{n-1}u\left({}^{n-1}A \pm \sum \frac{X^x}{{}^{n-1}z}\right), \end{aligned}$$

le signe + ayant lieu si n est impair, et le signe — s'il est pair.

Je suis parvenu par cette méthode non-seulement à sommer très directement les suites récurrentes, mais de plus une espèce de suite fort générale dont celles-ci ne sont qu'un cas particulier.

Toutes ces choses sont développées dans un Mémoire que M. de Fouchi m'a promis de faire imprimer au plus tost. J'aurois bien désiré que vos occupations vous eussent permis d'y jetter un coup d'œuil; mais je sais le peu de temps qu'elles vous laissent. Je crains même d'avoir abusé par cette lettre de votre complaisance; mais j'espère que vous me pardonnerez aisément cette importunité, que je vous prie d'imputer au désir que j'ai de mériter votre amitié. Je suis avec estime et respect

Votre très humble et très obéissant serviteur.

LAPLACE.

Remarque sur la Lettre précédente;

PAR M. G. DARBOUX.

En essayant de démontrer la règle indiquée par Laplace, je me suis aperçu que l'illustre géomètre la rapporte d'une manière inexacte, et que sa Lettre contient plusieurs erreurs de transcription. Il est d'ailleurs aisé de reconnaître *a priori* que l'une au moins des deux règles données pour les équations différentielles et pour les équations aux différences finies est inexacte; car celle qui se rapporte aux équations aux différences finies devrait comprendre l'autre comme cas particulier lorsqu'on suppose les différences infiniment petites, et c'est ce qui n'a pas lieu. Dans ce qui suit, je vais démontrer et énoncer d'une manière exacte la première règle relative aux équations différentielles linéaires.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + H_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + H_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + H_n y = X,$$

et soient u, u_1, u_2, ..., u_{n-1}, n intégrales particulières de l'équation sans second membre. La méthode d'intégration singulière dont parle Laplace est évidemment la suivante, qui est maintenant bien connue, et qui est exposée sous une forme un peu différente dans le *Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. Serret (t. II, p. 524).

Posons

$$(2)\qquad y = u\int\frac{y_1}{u}\,dx,\quad y_1 = u\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{u}\right) = \frac{u\,dy - y\,du}{u\,dx},$$

y_1 étant la nouvelle fonction inconnue, et substituons cette valeur de y dans l'équation (1). Le résultat contiendra l'intégrale dans les termes suivants :

$$\left(\frac{d^n u}{dx^n} + \mathrm{H}_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + \mathrm{H}_n u\right)\int\frac{y_1}{u}\,dx,$$

et, comme u est une solution particulière de l'équation (1) où l'on a supprimé le second membre, on voit que le coefficient de l'intégrale $\int\frac{y_1}{u}\,dx$ sera nul, et il restera pour y_1 une équation débarrassée de tout signe d'intégration et qui sera évidemment de la forme

$$(3)\qquad \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \mathrm{H}_1^1\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} + \ldots + \mathrm{H}_{n-1}^1 y_1 = \mathrm{X}.$$

Les solutions de l'équation sans second membre seront maintenant

$$u\frac{d}{dx}\left(\frac{u_1}{u}\right),\quad u\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u}\right),\quad \ldots,\quad u\frac{d}{dx}\left(\frac{u_{n-1}}{u}\right).$$

Je poserai

$$(4)\quad u_1^1 = u\frac{d}{dx}\left(\frac{u_1}{u}\right),\quad u_2^1 = u\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u}\right),\quad \ldots,\quad u_{n-1}^1 = u\frac{d}{dx}\left(\frac{u_{n-1}}{u}\right).$$

Nous sommes donc ramenés à une équation différentielle (3) de même forme que l'équation (1) et à laquelle nous pourrons appliquer la même méthode. En continuant ainsi indéfiniment, nous parviendrons à une équation du premier ordre, que nous saurons intégrer. Cette méthode est tout à fait différente de celle de Lagrange, et il est aisé de trouver la formule définitive à laquelle elle conduit.

En l'appliquant, nous serons conduits successivement à faire les substitutions suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} y = u\displaystyle\int\frac{y_1}{u}\,dx, & u_p^1 = u\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u_p}{u}\right),\\ y_1 = u_1^1\displaystyle\int\frac{y_2}{u_1^1}\,dx, & u_p^2 = u_1^1\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u_p^1}{u_1^1}\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y_i = u_i^i\displaystyle\int\frac{y_{i+1}}{u_i^i}\,dx, & u_p^{i+1} = u_i^i\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u_p^i}{u_i^i}\right),\end{array}\right.$$

la fonction y_i satisfaisant à une équation de la forme

$$(6)\qquad \frac{d^{n-i}y_i}{dx^{n-i}} + \mathrm{H}_1^i\frac{d^{n-i-1}y_i}{dx^{n-i-1}} + \ldots + \mathrm{H}_{n-i}^i y_i = \mathrm{X},$$

et les solutions particulières de l'équation sans second membre étant

$$u_i^i,\quad u_{i+1}^i,\quad \ldots,\quad u_{n-1}^i.$$

Si donc on fait $i = n - 1$, on sera ramené à l'équation

$$(7)\qquad \frac{dy_{n-1}}{dx} + \mathrm{H}_1^{n-1}y_{n-1} = \mathrm{X},$$

et, u_{n-1}^{n-1} étant l'intégrale de l'équation sans second membre, on aura

$$\frac{du_{n-1}^{n-1}}{dx} + \mathrm{H}_1^{n-1}u_{n-1}^{n-1} = 0,$$

et par conséquent

$$(8)\qquad y_{n-1} = u_{n-1}^{n-1}\int\frac{\mathrm{X}\,dx}{u_{n-1}^{n-1}}.$$

La constante arbitraire qui doit figurer dans y_{n-1} sera la limite inférieure de l'intégrale. En se reportant aux formules (5), on voit que l'on aura

$$(9)\qquad y = u\int\frac{u_1^1}{u}\,dx\int\frac{u_2^2}{u_1^1}\,dx\int\frac{u_3^3}{u_2^2}\,dx\int\cdots\int\frac{u_{n-1}^{n-1}}{u_{n-2}^{n-2}}\,dx\int\frac{\mathrm{X}\,dx}{u_{n-1}^{n-1}}.$$

Comme les quantités u_k^p sont définies par les formules (5), cette formule ne contient rien d'arbitraire, et les n constantes que doit contenir y seront amenées par les intégrations successives que l'on aura à effectuer.

Faisons une application de la formule (9) au cas des équations linéaires à coefficients constants. Alors les solutions particulières qu'il y aura à considérer seront

$$u = e^{ax},\quad u_1 = e^{a_1x},\quad u_{n-1} = e^{a_{n-1}x};$$

on trouvera aisément pour les quantités u_k^i l'expression

$$u_k^i = (a_k - a)(a_k - a_1)\ldots(a_k - a_{i-1})e^{a_kx},$$

et la formule (9) deviendra

$$(10)\qquad y = e^{ax}\int e^{(a_1-a)x}dx\int e^{(a_2-a_1)x}dx\ldots\int e^{(a_{n-1}-a_{n-2})x}dx\int e^{-a_{n-1}x}\mathrm{X}\,dx.$$

Désignons cette valeur de y par $\varphi(a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. L'intégration

par parties, portant sur la première intégrale et sur le terme $e^{(a_1-a)x}\,dx$, nous donnera la formule

$$\begin{aligned}\varphi(a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})\\ = \frac{1}{a-a_1}\left[\varphi(a, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}) - \varphi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})\right],\end{aligned}$$

d'où l'on déduira sans peine

$$\varphi(a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} + \frac{\varphi(a_1)}{f'(a_1)} + \cdots + \frac{\varphi(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})},$$

en posant

$$f(x) = (x-a)(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1}).$$

La formule précédente est équivalente à la suivante,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} y = {} & \frac{e^{ax}}{f'(a)}\int e^{-ax}\,\mathrm{X}\,dx \\ & + \frac{e^{a_1x}}{f'(a_1)}\int e^{-a_1x}\,\mathrm{X}\,dx + \ldots + \frac{e^{a_{n-1}x}}{f'(a_{n-1})}\int e^{-a_{n-1}x}\,\mathrm{X}\,dx,\end{aligned}\right.$$

qui est bien connue et fréquemment employée.

Telles sont les remarques que l'on peut présenter sur la méthode dont Laplace parle dans sa Lettre, considérée en elle-même; mais si l'on rapproche cette méthode de celle de Lagrange, on sera facilement conduit à la règle de Laplace.

En effet, la méthode de la variation des constantes revient à considérer l'intégrale générale de l'équation (1) comme représentée par la formule

$$(12)\qquad y = \mathrm{C}u + \mathrm{C}_1 u_1 + \ldots + \mathrm{C}_{n-1}u_{n-1},$$

où les $n-1$ fonctions C sont assujetties à vérifier les équations suivantes :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & u\frac{d\mathrm{C}}{dx} + u_1\frac{d\mathrm{C}_1}{dx} + \ldots + u_{n-1}\frac{d\mathrm{C}_{n-1}}{dx} = 0, \\ & \frac{du}{dx}\frac{d\mathrm{C}}{dx} + \cdots + \frac{du_{n-1}}{dx}\frac{d\mathrm{C}_{n-1}}{dx} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\frac{d\mathrm{C}}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-2}u_{n-1}}{dx^{n-2}}\frac{d\mathrm{C}_{n-1}}{dx} = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$\mathcal{A} = u\frac{d\mathrm{C}}{dx} + u_1\frac{d\mathrm{C}_1}{dx} + \ldots + u_{n-1}\frac{d\mathrm{C}_{n-1}}{dx} = 0,$$

et si l'on désigne par le symbole δ des différentiations où les quantités $\frac{dC}{dx}, \frac{dC_1}{dx}, \ldots, \frac{dC_{n-1}}{dx}$ sont traitées comme constantes, les équations (13) s'écriront, d'une manière abrégée,

$$(14)\qquad \mathcal{A} = 0, \quad \delta\mathcal{A} = 0, \quad \ldots, \quad \delta^{n-2}\mathcal{A} = 0.$$

Si nous nous reportons maintenant aux formules (2), nous aurons, en tenant compte de l'équation $\mathcal{A} = 0$,

$$y_1 = u\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{u}\right) = C_1 u_1^1 + C_2 u_2^1 + \ldots + C_{n-1} u_{n-1}^1,$$

et, si l'on pose

$$(15)\qquad \mathcal{A}_1 = u_1^1\frac{dC_1}{dx} + u_2^1\frac{dC_2}{dx} + \ldots + u_{n-1}^1\frac{dC_{n-1}}{dx},$$

on trouve, en substituant l'expression des quantités u_k^1,

$$\mathcal{A}_1 = \delta\mathcal{A} - \mathcal{A}\frac{du}{u\,dx},$$

et par conséquent, en vertu des équations (14), on aura

$$(16)\qquad \mathcal{A}_1 = 0, \quad \delta\mathcal{A}_1 = 0, \quad \ldots, \quad \delta^{n-3}\mathcal{A}_1 = 0.$$

En d'autres termes, les quantités C_1 vérifient, par rapport à la nouvelle équation en y_1 comme par rapport à l'ancienne, les équations auxquelles les assujettirait l'application directe de la méthode de Lagrange à cette équation en y_1.

En répétant donc les mêmes raisonnements, nous voyons que l'on aura

$$(17)\qquad y_i = C_i u_i^i + C_{i+1} u_{i+1}^i + \ldots + C_{n-1} u_{n-1}^i,$$

avec les conditions

$$\mathcal{A}_i = u_i^i\frac{dC_i}{dx} + u_{i+1}^i\frac{dC_{i+1}}{dx} + \ldots + u_{n-1}^i\frac{dC_{n-1}}{dx} = 0,$$

auxquelles il faut joindre les suivantes :

$$\delta\mathcal{A}_i = 0, \quad \ldots, \quad \delta^{n-i-2}\mathcal{A}_i = 0.$$

On aura donc en particulier

$$(18)\qquad y_{n-1} = C_{n-1} u_{n-1}^{n-1}.$$

et par conséquent, en vertu de la formule (8),

$$(19) \qquad C_{n-1} = \int \frac{X\,dx}{u^{n}_{n-1}}.$$

C'est là précisément la règle donnée par Laplace. Comme on peut ranger les intégrales particulières dans un ordre quelconque, il est clair, comme Laplace le fait remarquer, que cette formule donnera toutes les quantités C_i par des permutations convenables. Mais on pourrait aussi observer que les équations

$$\mathcal{A}_{n-2} = 0, \quad \mathcal{A}_{n-3} = 0, \quad \ldots, \quad \mathcal{A}_1 = 0, \quad \mathcal{A} = 0$$

détermineront, la première $\frac{dC_{n-2}}{dx}$, la seconde $\frac{dC_{n-3}}{dx}$, et ainsi de suite, quand $\frac{dC_{n-1}}{dx}$ sera connue.

Dans le cas des équations à coefficients constants, on a

$$C_{n-1} = \frac{1}{f'(a_{n-1})} \int X e^{-a_{n-1} x}\,dx,$$

$f'(a)$ ayant la signification déjà donnée, et par suite

$$y = \sum \frac{e^{ax}}{f'(a)} \int X e^{-ax}\,dx,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les racines de l'équation caractéristique, ce qui s'accorde bien avec notre premier résultat.

La méthode de Cauchy, telle qu'elle a été exposée par M. Hermite dans son Cours de l'École Polytechnique de 1873-1875, donne un moyen bien simple d'arriver à la formule précédente, et même à la formule plus générale qui doit être employée quand l'équation caractéristique a des racines multiples. On peut aussi, quand la formule précédente a été démontrée, employer d'une manière assez simple le procédé de d'Alembert par lequel on passe du cas des racines au cas des racines multiples. En effet, Z désignant la valeur de X quand on remplace x par z, la formule précédente peut s'écrire

$$y = \sum \int_{\alpha}^{x} \frac{e^{a(x-z)} Z\,dz}{f'(a)},$$

et elle nous donne une intégrale particulière de l'équation si l'on prend la même limite inférieure α dans toutes les intégrales ; on a alors

$$(20) \qquad y = \int_{\alpha}^{x} ZR\,dz,$$

en posant

(21) $$R = \sum \frac{e^{a(x-z)}}{f'(a)}.$$

Or, on peut définir R de la manière suivante. Supposons que l'on développe, dans la fonction

$$e^{u(x-z)} \frac{1}{f(u)},$$

l'exponentielle suivant les puissances *positives* de u et $\frac{1}{f(u)}$ suivant les puissances négatives de u. On obtiendra un développement contenant à la fois les puissances positives et négatives de u, développement qui sera d'ailleurs convergent quand u sera suffisamment grand. Le coefficient du terme en $\frac{1}{u}$ est précisément R. On a, en effet,

$$\frac{e^{u(x-z)}}{f(u)} = \sum \frac{e^{u(x-z)}}{f'(a)} \frac{1}{u-a},$$

et, en développant $\frac{1}{u-a}$ suivant les puissances de $\frac{1}{u}$, on trouvera précisément, pour le coefficient de $\frac{1}{u}$,

$$\frac{e^{a(x-z)}}{f'(a)}.$$

Ainsi, nous avons la règle suivante : *On aura une intégrale particulière de l'équation linéaire à coefficients constants et avec second membre* X, *en prenant*

(22) $$y = \int_{\alpha}^{x} \mathrm{ZR}\, dz,$$

où R *désigne le coefficient de* $\frac{1}{u}$ *dans le développement de* $\frac{e^{u(x-z)}}{f(u)}$ *effectué à la fois suivant les puissances positives et négatives de* u, *c'est-à-dire le numérateur* $e^{u(x-z)}$ *étant développé suivant les puissances positives de* u *et* $\frac{1}{f(u)}$ *étant développé suivant les puissances négatives de* u.

Cette règle permet de trouver l'intégrale particulière sans résoudre l'équation caractéristique. Comme elle est indépendante de la nature des racines de l'équation caractéristique, elle subsistera quand cette équation aura des racines multiples. On aura alors

$$\frac{1}{f(u)} = \sum \left[\frac{A_0}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(u-a)^p} \right],$$

et l'on reconnaîtra, par un calcul des plus simples et en développant d'abord l'exponentielle $e^{u(x-z)}$ suivant les puissances de $u-a$, que le coefficient de $\frac{1}{u}$ dans le développement de

$$\frac{A_q}{(u-a)^{q+1}}e^{u(x-z)}$$

est

$$\frac{A_q}{1.2\ldots q}e^{a(x-z)}(x-z)^q.$$

On a donc, dans le cas des racines multiples,

$$(23)\quad R=\sum\left[A_0+\frac{A_1(x-z)}{1}+\ldots+\frac{A_{p-1}(x-z)^{p-1}}{1.2\ldots p-1}\right]e^{a(x-z)},$$

formule que l'on obtient d'ailleurs beaucoup plus rapidement en employant la belle méthode exposée par M. Hermite dans le Cours déjà cité.

II.

A Monsieur le marquis de Condorcet, Secrétaire de l'Académie des Sciences, rue Louis-le-Grand, a Paris.

J'ai reçu, Monsieur, la Note que vous avez eu la bonté de m'envoyer; elle me paroît très juste, et vous observez avec raison que, toutes fois que l'intégrale sera possible en termes finis, vous la trouverez par votre méthode, qui me paroît fort ingénieuse. Quand mon travail sera fini sur cet objet, je me propose de vous le communiquer. Du reste, on vous doit et je vous rendrai la justice d'observer que vous estes le premier qui ayez donné une méthode générale sur ces intégrations, car il me semble qu'une des raisons pour lesquelles on n'a point avancé cette partie de l'Analyse autant qu'elle pouvoit l'être est que l'on s'est borné à des méthodes de transformation nécessairement limitées. Je vous prie de me croire avec toute l'estime et l'amitié possibles,

Monsieur,

Vostre très humble et très obéissant serviteur,

Laplace.

LAPLACE A D'ALEMBERT.

I.

A Paris, ce samedi 15 novembre 1777.

Monsieur et très illustre Confrère,

Au lieu d'aller demain vous importuner, comme je me l'étois proposé, j'ai cru plus à propos de vous envoyer l'addition dont nous sommes convenus; d'ailleurs je n'aurai plus demain mon Mémoire, puisque je dois le remettre ce soir, à l'Académie, à M. le marquis de Condorcet. Après cette phrase : « C'est donc, à proprement parler, à M. d'Alembert qu'il faut rapporter les premières » recherches exactes qui ayent paru sur cet important sujet; cet » illustre autheur, s'étant proposé, dans son excellent Ouvrage qui » a pour titre *Réflexions sur la cause des vents*, de calculer les effets » de l'action du Soleil et de la Lune sur notre atmosphère, y dé» termine d'une manière synthétique et fort belle les oscillations » d'un fluide de peu de profondeur qui recouvre une planète immo» bile au-dessus de laquelle repose un astre immobile; il cherche » ensuite à déterminer ces oscillations dans le cas où, la planète » étant toujours supposée immobile, l'astre se meut uniformément » sur un parallèle à l'équateur, et il parvient, par une analyse aussi » savante qu'ingénieuse, aux véritables équations de ce problème; » mais la difficulté de les intégrer l'a forcé de recourir à des sup» positions qui en rendent la solution incertaine. On trouvera dans » ces recherches la solution rigoureuse de ce même problème, quels » que soient la densité du fluide et le mouvement de l'astre. »

J'ai ajouté ce qui suit :

« Au reste, je dois à M. d'Alembert la justice d'observer que, si » j'ai été assez heureux pour ajouter quelque chose à cet égard à ses » excellentes réflexions sur la cause des vents, j'en suis principale» ment redevable à ces réflexions elles-mêmes et aux belles décou» vertes de ce grand géomètre sur la théorie des fluides et sur le Calcul » intégral aux différences partielles dont on voit les premières traces » dans l'Ouvrage que je viens de citer. Si l'on considère combien les » premiers pas sont difficiles en tout genre et surtout dans une ma-

» tière aussi compliquée, si l'on fait attention aux progrès immenses » de l'Analyse depuis l'impression de son Ouvrage, on ne sera pas » surpris qu'il nous ait laissé quelque chose à faire encor, et qu'aidés » par des théories que nous tenons de lui presque tout entierres, » nous soyons en état d'avancer plus loin dans une carrière qu'il » a le premier ouverte. »

J'espère, mon cher Confrère, que vous serez content de cette addition; je suis très enchanté d'avoir cette occasion de vous témoigner publiquement mon estime et ma reconnoissance. Je vous devois d'ailleurs cette justice à tous égards, puisqu'il est vray de dire que, sans votre travail et sans les belles recherches que vous avez publiées dans votre excellent *Essay sur la résistance des fluides* et que M. Euler a depuis présentées d'une manière fort simple et fort générale dans les *Mémoires* de Berlin et de Pétersbourg, je n'aurois jamais osé entreprendre de traiter la matière qui fait l'objet de mes *Recherches*.

J'ai toujours cultivé les Mathématiques par goût plus tost que par le désir d'une vaine réputation, dont je ne fais aucun cas; mon plus grand amusement est d'étudier la marche des inventeurs et de voir leur génie aux prises avec les obstacles qu'ils ont rencontrés et qu'ils ont sçu franchir; je me mets alors à leur place, et je me demande comment je m'y serois pris pour surmonter ces mêmes obstacles, et, quoique cette substitution n'ait le plus souvent rien que d'humiliant pour mon amour-propre, cependant le plaisir de jouir de leur succès me dédommage amplement de cette petite humiliation. Si je suis assez heureux pour ajouter quelque chose à leurs travaux, j'en attribue tout le mérite à leurs premiers efforts, bien persuadé que dans ma position ils auroient été beaucoup plus loin que moi. Vous voyez par là, mon cher Confrère, que personne ne lit vos Ouvrages avec plus d'attention et ne cherche mieux à en faire son profit que moi; aussi personne n'est plus disposé à vous rendre une justice plus entière, et je vous prie de me regarder comme un de ceux qui vous aiment et qui vous admirent le plus. C'est dans ces sentiments que j'ai l'honneur d'être,

Monsieur et illustre Confrère,

Vostre très humble et très obéissant serviteur.

LAPLACE.

II.

« Ce dimanche, 10 mars 1782.

Monsieur et illustre Confrère,

Je suis très flatté que mes recherches sur les suites ayent pu fixer quelques momens votre attention; j'aurois bien désiré que vos occupations vous eussent permis de suivre l'analyse que j'y donne du problème des cordes vibrantes au moyen du Calcul intégral aux différences finies partielles, car il me paroît évident par cette analyse que toute figure initiale de la corde dans laquelle deux côtés contigus ne forment point entre eux un angle fini peut être admise. Voici en peu de mots à quoi se réduit mon raisonnement.

Si l'on nomme $y_{x,t}$ l'ordonnée d'une corde vibrante dont l'abscisse est x, t désignant le temps, il est clair que la force accélératrice du point de la corde placé à l'extrémité de cette ordonnée sera proportionnelle à la différence seconde des trois ordonnées qui répondent à $x - dx$, x, $x + dx$, c'est-à-dire proportionnelle à $y_{x-dx,t} - 2y_{x,t} + y_{x+dx,t}$; de plus, cette force sera, par les principes de Dynamique, proportionnelle à $d\,dy_{x,t}$, cette différence seconde étant prise en ne faisant varier que le temps t. En la mettant donc, comme cela se peut, sous cette forme $y_{x,t-dt} - 2y_{x,t} + y_{x,t+dt}$, on aura, pour déterminer le mouvement de la corde, l'équation

$$y_{x,t+dt} - 2y_{x,t} + y_{x,t-dt} = a^2(y_{x+dx,t} - 2y_{x,t} + y_{x-dx,t}),$$

a^2 étant un coefficient constant. Cette équation convient incontestablement à tous les points de la corde, excepté aux deux extrêmes, dont le premier n'a point d'ordonnée antérieure et le second d'ordonnée postérieure; mais ces deux points sont fixes par les conditions du problème. J'observe cependant que, pour que l'équation précédente subsiste, il est nécessaire que deux côtés contigus ne forment point entre eux un angle fini; car au sommet de cet angle la force accélératrice, qui partout ailleurs est finie, seroit infinie; la vitesse changeroit donc brusquement à ce point, et l'on ne pourroit pas supposer la force accélératrice égale à $\frac{d^2 y_{x,t}}{dt^2}$, comme cela est néces-

saire pour que l'équation générale du problème des cordes vibrantes puisse avoir lieu.

Maintenant, au lieu d'intégrer l'équation précédente par la considération des infiniment petits, ce qui peut laisser des doutes sur la discontinuité des fonctions arbitraires auxquelles on parvient, je l'intègre comme une équation aux différences finies, et dans laquelle par conséquent dx et dt sont des quantités finies. Il est visible que, rien n'étant négligé dans cette intégration, les résultats que je trouve conviennent également au cas de dx et de dt infiniment petits; et, comme dans le cas général la valeur de $y_{x,t}$ se construit en plaçant alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses le polygone qui représente la valeur de $y_{x,t}$ lorsque $t = o$, on doit en conclure que cette même construction a lieu lorsque dx et dt sont infiniment petits, et qu'ainsi la construction que vous avez donnée dans vostre Mémoire sur les cordes vibrantes relativement aux fonctions analytiques est générale, quelle que soit la figure initiale de la corde, pourvu qu'aucun de ses angles ne soit fini. Il ne me sera pas difficile présentement de répondre à la difficulté que vous me faisiez hier à l'Académie sur la force accélératrice qui a lieu au point de contact de deux courbes qui se touchent. Pour cela je considère deux arcs de cercle BA, B'A qui se touchent au point A et dont les centres sont C et C'. La force accélératrice au point A est en raison inverse du rayon osculateur de ce point, et, comme il appartient également aux deux arcs AB, AB', vous me demandiez lequel des deux rayons CA, C'A on doit choisir pour représenter la force accélératrice du point A. Pour répondre à cette difficulté, j'observerai que, lorsqu'on suppose la force accélératrice inversement proportionnelle au rayon osculateur au point A, cela veut dire que, si l'on prend deux points M et M' infiniment voisins et équidistants de A, et que l'on fasse passer un cercle par ces trois points, la force accélératrice du point A sera en raison inverse du rayon de ce cercle. Cela posé, je dis que cette force ne sera inversement proportionnelle ni à CA ni à C'A, parce qu'aucun de ces deux rayons ne sera celui du cercle qui passe par les trois points M, A, M'; mais, si l'on prolonge M' C' jusqu'à ce qu'il rencontre MC en O, O sera le centre de ce cercle et la force en A sera réciproque au rayon AO; or il est facile de prouver que AO est égal au produit des deux rayons CA et C'A, divisé par la moitié de leur

somme. Il n'y a donc point d'ambiguïté relativement à la force accélératrice du point A, qui sera toujours proportionnelle à la différence seconde des trois ordonnées qui passent par les points M, A et M'.

Telles sont, Monsieur, les réflexions que j'ai l'honneur de vous présenter sur une question très délicate que vous avez tant de fois agitée et sur laquelle l'opinion dépend de la manière dont on envisage le problème. Il est naturel de transporter au résultat de la

Fig. 1.

solution la continuité qu'exige la méthode dont on fait usage et qui souvent restreint la généralité de cette solution; aussi je ne suis point surpris que notre illustre ami M. de la Grange, qui a traité ce problème, dans le Tome III des *Mémoires* de Thurin, par la méthode des suites infinies, ait cru la continuité nécessaire entre les différences quelconques des fonctions arbitraires; mais la méthode des différences, dans laquelle on ne néglige rien, est exempte de ces inconvénients. Il m'a toujours semblé que M. Euler a été trop loin en n'assujettissant à aucune condition les fonctions arbitraires; mais je pense que vous avez été trop circonspect en les restreignant aux seules fonctions analytiques. Cette circonspection étoit bien naturelle dans l'inventeur d'un calcul qui offre des résultats aussi vastes et aussi inattendus; mais vous ne devez pas trouver mauvais que l'on vous prouve que votre calcul a plus d'étendue que vous ne lui en aviez soupçonné d'abord. Je vous prie de croire que personne ne sent mieux que moi l'importance et la beauté de cette précieuse découverte et ne vous rend à cet égard une justice plus sincère, à laquelle je suis porté d'ailleurs par le sentiment de la reconnoissance pour vos premières bontés, que je

n'oublierai jamais. J'ai l'honneur d'être avec toute l'estime et la considération possibles,

Monsieur et très illustre Confrère,

Vostre très humble et très obéissant serviteur.

LAPLACE.

LETTRE DE BORDA A CONDORCET.

Profession de foi de M. de Condorcet.

1° Je regarde comme hypothétique toute théorie qui n'est pas fondée sur le mouvement des particules.

Réponse.

1° Et moi aussi; mais j'ai fait voir que l'hypothèse du parallélisme des tranches donnoit le mouvement du fluide assez exactement lorsqu'une certaine quantité N n'influait pas beaucoup sur les résultats, et c'est le cas de toutes les questions que j'ai examinées.

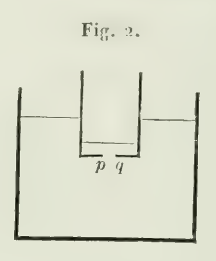
Profession de foi :

2° Je crois qu'il y a perte de forces vives dans le choc de deux masses de fluide; mais, lorsqu'il n'y a point de choc entre les masses ni de fermentation dans ce fluide, je ne vois pas pourquoi on la supposeroit.

Réponse :

2° Lorsqu'une partie du fluide agit sur l'autre comme si elle n'étoit pas contenue entre des parois, il y a nécessairement une perte de forces vives, et, s'il n'y en avoit pas, il s'ensuivroit que, si l'on supposoit l'orifice pq infiniment petit par rapport au

Fig. 2.



vase submergé, le fluide entreroit dans le vase avec une vitesse infinie.

3° Je suis du même avis, c'est pourquoi je ne me suis permis de regarder une tranche entière comme une masse unique qu'après avoir montré, dans le commencement de mon Mémoire, que la considération des différentes tranches revenoit au même que celle des différents canaux quelconques dans tous les cas que j'ai examinés.

4° Je ne vais point contre les démonstrations rigoureuses.

5° J'ai démontré le contraire et j'ai fait voir, outre cela, d'où venoit l'absurdité du résultat.

6° Dans la solution des syphons de M. l'abbé Bossut, la lettre k signifie la surface supérieure. (*Voy.* p. 374, ligne dernière.)

3° Je regarde comme très-hypothétique toute manière d'évaluer la perte de forces vives, à moins qu'on ne prenne la valeur de cette perte pour chaque particule et qu'on ne somme ces valeurs.

4° Je ne crois pas que dans un vase qui se vuide par un trou percé au fond la dernière tranche tombe (dans les premiers instants) comme un corps libre. Cette conclusion me paroît plus extraordinaire encore que celle de M. d'Alembert, sur laquelle je suspends aussi mon jugement.

5° Je ne crois pas que l'hypothèse qu'a choisie M. l'abbé Bossut soit inadmissible pour le cas où le fluide environnant est très-étendu et le trou très-petit.

6° En examinant la solution du syphon, on trouve la vitesse imaginaire comme dans la solution du vase submergé lorsqu'on cherche la vitesse pour un endroit où la tranche du fluide est infiniment petite, ce qui, d'après votre propre manière de comparer le problème à celui des syphons, prouve la nécessité de

changer les signes, et je persiste à croire que l'hypothèse de M. l'abbé Bossut doit donner la vitesse réelle.

7° Si vous entendez par roues verticales celles dont les ailes remplissent exactement le coursier dans lequel elles se meuvent, je nie la proposition; si vous entendez celles qui se meuvent dans le courant des rivières, je n'en ai pas entrepris la solution parce que je la regarde comme trop au-dessus de tous les géomètres; mais si j'avois voulu y appliquer la théorie ordinaire de la résistance des fluides, je n'aurois certainement pas commis la même faute que M. l'abbé Bossut.

Ma manière d'évaluer le choc des fluides est la même que celle de tous les géomètres, c'est-à-dire que je dis comme eux que ce choc est proportionnel au nombre des molécules qui frappent, dans un temps donné, multiplié par la vitesse perdue par chacune de ces molécules.

7° Votre solution du mouvement des roues est fort ingénieuse, mais, dans le cas des roues verticales, elle me paroît aussi hypothétique que l'autre, et votre manière d'évaluer la percussion des fluides ne me paroît pas une chose démontrée.

Voilà, mon cher confrère, ma réponse à votre profession de foi; je suis fâché que vous ne soyiés pas de ma croyance; mais nous n'en irons pas moins tous les deux au paradis, sauf à y disputer sur les fluides, et je répondrai de vive voix à la partie morale de votre Lettre.

Je vous embrasse de tout mon cœur.

De Borda.

LETTRE DE FUSS A CONDORCET [1].

Saint-Pétersbourg, le 15/26 mai 1778.

Monsieur,

C'est avec un plaisir proportionné à l'importance du sujet et à l'impression qu'il a faite sur moi que j'ai appris de M. J.-A. Euler, mon cher et respectable amy, que les deux Mémoires *Sur les dérangements d'une comète qui passe près d'une planète,* que j'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie Royale des Sciences avec la devise *Non jam prima peto, Mnestheus,* etc., ont remporté le prix. Mais j'ai été surpris en même temps d'apprendre que vous n'avés reçu ni le billet que j'avois ajouté à mon premier Mémoire, adressé à M. de Fouchy, ni celui du supplément, que M. Euler le fils eut la complaisance de vous adresser, et qui contenoient l'un et l'autre les éclaircissements nécessaires qu'on a coutume d'ajouter aux pièces concourantes. M. Euler pourroit appuyer de son témoignage l'assurance que je n'ai pas manqué à cette formalité.

Je me fais un devoir, Monsieur, de vous réitérer ici la déclaration contenüe dans les billets égarés : que c'est uniquement à mon illustre maître, M. Euler le père, dont les soins et les instructions sont depuis quatre années le bonheur de ma vie, que je suis redevable d'avoir pu présenter à votre illustre Académie quelque chose qui ne fût pas indigne de son approbation, relativement au sujet important qu'elle avoit choisi deux fois et proposé à l'orbe littéraire, parce que, outre que c'est à lui seul que je dois le peu de lumières que j'ai acquises, il m'a non-seulement encouragé à soumettre à tant de juges éclairés les deux Mémoires qu'ils viennent de couronner, mais qu'il m'en a même suggéré les principales idées. Le seul mérite donc sur lequel je puisse faire quelque prétension est celui d'avoir assés bien saisi et exécuté les idées de mon divin maître, pour m'attirer le suffrage inestimable de votre illustre Corps. Ils auroient sans doute infiniment gagné, ces idées, s'il avoit voulu les digérer et vous présenter lui-même

[1] Toutes les Lettres publiées dans ce numéro ont été trouvées dans les papiers de Condorcet légués à l'Institut par Mme O'Connor-Condorcet, sa fille.

Daignés, Monsieur, être auprès de l'illustre Académie l'interprète des sentiments de respect et de reconnoissance que je lui dois à tant de titres : je ne trouve point d'expressions assés fortes pour vous dépeindre ceux dont je suis pénétré en ce moment.

M. J.-A. Euler, qui, ayant été plusieurs fois dans le cas présent, saura mieux que moi les formalités et les mesures à prendre, aura la complaisance de vous dire à ma place quelques mots sur les moyens de me faire parvenir l'argent qui m'est destiné. Je pense que le plus sur seroit si vous vouliez bien faire négocier et m'envoyer une lettre de change de Holande, qui sont partout les plus sures et les plus recherchées.

Agréés, Monsieur, l'hommage d'un jeune géomètre qui n'a d'autre mérite que celui d'être élève de M. Euler et celui de pouvoir vous admirer dans vos Ouvrages, qu'il a le double avantage de lire, et de lire à son divin maître. Il y a longtemps que je souhaite une occasion de vous témoigner le profond respect que m'a inspiré la profondeur et la fécondité de votre génie. La voilà qui se présente aujourd'huy et elle ne pourroit être ni plus flatteuse ni plus solennelle pour celui qui a l'honneur d'être avec tous les sentiments de la plus haute vénération et de la plus parfaite estime,

Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

Nicolas Fuss,
Adjoint de l'Académie impériale des Sciences.

P.-S. — M. Euler, qui vous fait assurer de son amour et de son estime, me charge de vous demander si par hazard vous n'auriés pas reçu la dernière Lettre qu'il vous a adressée (j'ai oublié sous quelle date, quoiqu'elle soit écrite de ma main), vu qu'il n'a point reçu de réponse. Elle contenoit, comme une des précédentes, quelques réflexions sur la formule intégrale $\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$, qu'il observe pouvoir être rendüe rationnelle moyennant la substitution singulière $x = \frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}}$, quoiqu'il ait cru autrefois qu'il soit impossible de la réduire à la rationalité par quelque substi-

tution que ce soit, parce qu'il en pouvoit exprimer l'intégrale par des logarithmes et des arcs de cercle. Il y avoit ensuite ajouté quelques observations sur la somme des quarrés des coefficients d'une puissance quelconque d'un binome et l'essentiel de la méthode dont il s'est servi pour ces sommations dans un Mémoire présenté à nôtre Académie.

LETTRE DE JEAN-ALBERT EULER A CONDORCET.

A Saint-Pétersbourg, ce 15/26 may 1778.

Monsieur et très illustre Confrère,

L'auteur de l'écrit sur la perturbation des comètes, auquel votre illustre Académie vient d'ajuger le prix, est M. Fuss, élève de mon père, et adjoint de l'Académie impériale des Sciences pour les Mathématiques. Il aura l'honneur de vous le notifier lui-même, Monsieur, dans une Lettre qu'il m'a promis de me remettre encore ce soir pour la faire partir avec la mienne. J'ai été bien surpris de voir, par votre obligeante notification, qu'il ne s'est point trouvé de billet cacheté ni à la pièce même que j'ai eu l'honneur de vous adresser en 1775, ni au supplément qui vous est parvenu l'année passée. M. Fuss m'assure en avoir joint à l'une et à l'autre; il faut donc qu'ils ayent été égarés par mégarde, dont je suis bien fâché, parce que par là le public a été pour quelque temps détourné d'un jeune géomètre qui déjà mérite toute son attention, et qui, quelque jour, fera l'admiration de l'Europe savante. Quant à la manière de lui faire toucher le prix, je lui ai conseillé de vous prier, Monsieur, que vous lui en fassiez remisse par une lettre de change sur la Hollande, de la même manière que mon père a touché, il y a quelque tems, les mille roubles dont votre très gracieux Roy a bien voulu le gratifier.

Mon père se porte très bien au sein de sa nombreuse famille; jusqu'ici il ne discontinue point de travailler journellement à des Mémoires de Géométrie et de Physique qui entreront dans nos *Actes académiques*. Ensuite, pour se délasser et se donner du mouvement nécessaire à la conservation de sa santé, il s'amuse à aiman-

ter des barres d'acier trempé, dont il a un très-grand nombre de différentes dimensions; il en a de 30 pouces de long sur $2\frac{1}{2}$ pouces d'épaisseur en quarré qu'il travaille et frotte avec des lames de 24 pouces. Il vous remercie infiniment de la part obligeante que vous me prenez à son état et vous prie d'être très persuadé de son parfait retour. Mais il ne comprend pas quelles nouvelles le comte de Schouvalov vous a pu donner de sa santé, lui qui, comme tous ses autres compatriotes, ne se souvient guère des gens de notre état et les voyent le moins qu'ils le peuvent. Mais ces messieurs sont tout autres lorsqu'ils voyagent que lorsqu'ils sont sur leur fumier : passent encore les beaux esprits, les poëtes — dont ils ne font cependant de cas qu'autant qu'ils les amusent.

Vous aurez actuellement reçu, Monsieur, le diplome académique que j'ai eu l'honneur de vous adresser de la part de notre Académie, et dont le chevalier de Corberon, votre chargé d'affaires à notre Cour, a bien voulu se charger. Je dois une ample réponse à notre digne et cher confrère M. de Lalande, et je m'en acquitterai avec bien du plaisir au premier jour ; je vous prie de l'assurer, en attendant, de mon inviolable attachement.

» J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite estime, Monsieur et très illustre Confrère, votre très humble et très obéissant serviteur.

JEAN-ALBERT EULER.

DOMENICO CHELINI (NOTICE NÉCROLOGIQUE);

PAR M. L. CREMONA [1].

Dominique Chelini naquit le 18 octobre 1802 à Gragnano, duché de Lucques, d'une famille de paysans aisés. Son père, François-Marie, désira qu'il entrât dans la carrière ecclésiastique, et, l'ayant placé à Lucques chez une famille privée, l'y fit instruire dans les premiers rudiments de la langue latine, où il eut pour

---

(1) Lue dans la séance du 5 janvier 1879 de l'Académie royale des Lincei.

maître un certain P. Puccinelli, des chanoines de Latran. Son père étant mort lorsque Dominique était encore fort jeune, ses frères souhaitèrent qu'il revînt dans sa famille, soit pour éviter des dépenses, soit pour qu'il les aidât dans les travaux des champs. Mais le P. Puccinelli, voyant avec regret le jeune homme interrompre des études où il avait fait et promettait encore de faire de grands progrès, fit tant qu'il parvint à faire poursuivre à son élève la carrière entreprise. Pendant qu'il était encore à Lucques, il fut initié, paraît-il, aux études de Minéralogie par le P. Pietrini, des *Scuole pie,* professeur à l'Université de Rome. Grâce aux soins du P. Puccinelli, Chelini fut bientôt admis à revêtir l'habit religieux à Rome, où il entra dans les *Scuole pie* le 18 novembre 1818, et fit ses études au Collége de Nazareth, de 1819 à 1826. Il y eut pour professeur en Philosophie le P. Barretti, en Mathématiques le P. Gandolfi, tous les deux de l'Archigymnase romain, et en éloquence le P. Bianchi, latiniste de grande réputation. Il se distingua à la fois dans les études scientifiques et dans les études littéraires, si bien que, à peine eut-il cessé d'être écolier, il fut chargé d'enseigner les humanités dans le même Collége. L'année suivante, il alla professer la rhétorique à Narni, où il fut ordonné prêtre (avril 1827). Là, se trouvant dans une résidence tranquille et suivant l'inclination naturelle de son esprit, il se mit avec ardeur à continuer seul, avec le secours des livres, ses études mathématiques, entreprise qui fut toujours sa principale et sa plus chère occupation, et qu'il n'abandonna jamais jusqu'à la fin de sa vie. Il passa une année à Narni, puis une autre (1828-29) à Città della Pieve, comme professeur de Philosophie; de là il fut transféré avec les mêmes fonctions à Alatri. En 1831, il tomba gravement malade, et alla se traiter à Naples. La même année, il fut rappelé au Collége de Nazareth et il y obtint la chaire de Mathématiques, qu'il occupa pendant une vingtaine d'années, quoique, pendant plusieurs années à partir de 1836, il professât aussi la Philosophie en l'absence du titulaire. Dans les derniers mois de 1843 et dans les premiers de 1844, il fit la connaissance de Jacobi, venu à Rome pour raisons de santé, en même temps que Lejeune-Dirichlet, Steiner, Schläfli et Borchardt, et il s'acquit la bienveillance et l'estime du grand mathématicien et de ses illustres compagnons.

En octobre 1851, il alla comme professeur de Mécanique et d'Hy-

draulique à l'Université de Bologne; le 24 mai 1860, il perdit sa place pour avoir refusé de prendre part à la solennité religieuse de la fète du Statut, et, le 5 novembre de la même année, il fut rétabli dans la chaire de Mécanique rationnelle par une décision exceptionnelle sous forme d'un arrêté ministériel, le nommant professeur extraordinaire pour un temps illimité, avec dispense du serment et les mêmes appointements dont il jouissait auparavant comme professeur ordinaire. Mais, en octobre 1863, on commença à ne plus vouloir respecter la position exceptionnelle de Chelini; on lui signifia un arrêté qui le nommait professeur extraordinaire pour l'année scolaire suivante, comme c'est l'usage pour les professeurs extraordinaires. Ce procédé affecta très-péniblement Chelini, qui aimait sincèrement la patrie italienne et qui était absolument incapable de s'associer à tout acte hostile au gouvernement national; sur ses sentiments à ce sujet, ses intimes amis peuvent lui rendre le plus complet témoignage. Un an après, le ministère lui demanda de prêter le serment politique, et, sur sa déclaration qu'il ne pouvait le prêter à cause de sa position ecclésiastique, il fut destitué par arrêté du 18 décembre 1864. A cette occasion, les professeurs et les étudiants de l'Université de Bologne manifestèrent de diverses manières toute l'estime et toute l'affection qu'ils portaient à Chelini, et toute la douleur qu'ils ressentaient de se voir privés de toute espérance de le conserver dans leur Université. Chelini supporta sa disgrâce avec une admirable sérénité d'âme; il se rendit à Lucques, où il avait de nombreux neveux et où il reçut, à sa grande consolation, un album des portraits photographiques des professeurs de Bologne et de ses amis scientifiques des autres Universités.

En mars 1865, il alla à Rome, où on lui avait fait espérer une chaire à l'Université; mais ce fut seulement en septembre 1867 qu'il obtint l'enseignement de la Mécanique rationnelle, et il l'inaugura au commencement du mois de décembre suivant. Quatre ans après, il fut de nouveau congédié, alors que, Rome étant devenue capitale de l'Italie, on lui présenta de nouveau le dilemme de prêter serment ou de se retirer. Depuis lors, il enseigna dans l'Université dite *du Vatican*, tant que celle-ci ne fut pas fermée; après cela, il se consacra à l'enseignement privé.

Il espérait obtenir une petite pension, qu'il eût destinée à secourir des parents dans le besoin; elle lui fut refusée. Au prin-

temps de 1878, l'Ordre civil de Savoie lui décerna un petit traitement annuel, qu'il accepta avec une vive gratitude; mais il ne lui fut pas donné d'en toucher le premier trimestre, la mort l'ayant surpris le 16 novembre, après quelques jours de maladie, au Collége de Nazareth, où il habitait depuis 1865.

Il était membre de l'Académie des Lincei depuis 1847, de l'Académie de Bologne depuis 1854 et de la Société Italienne des Quarante depuis 1863. Il appartenait en outre à un grand nombre d'autres Académies et Sociétés moins importantes.

Toute sa vie fut consacrée aux progrès de la Science et de l'instruction. Ses publications sont au nombre de cinquante-trois et embrassent une période d'au moins quarante-quatre ans. Son premier travail est un Mémoire « Sur la théorie des quantités proportionnelles », lu à l'Académie des Lincei le 28 juillet 1834, et son dernier est un Mémoire « Sur quelques questions de Dynamique », présenté à l'Académie de Bologne le 26 avril 1877. Jusqu'à ses derniers jours, il conserva intacte la force de l'esprit comme celle du corps. Deux semaines environ avant sa mort, il était chez moi et me parlait d'une question qui l'occupait, et de la solution de laquelle il espérait tirer un Mémoire destiné au Recueil de l'Académie de Bologne.

Je sortirais des limites qui me sont imposées dans cette enceinte si, pour peindre au vif l'excellent ami que j'ai perdu, j'essayais de montrer de quel génie, de quel cœur, de quel caractère, de quelle modestie il était doué. J'y renoncerai d'autant plus facilement, sachant qu'une vraie et complète biographie sera écrite par un ami commun, le professeur Beltrami. Je me bornerai à terminer cette Notice en citant les belles paroles par lesquelles M. Beltrami annonça à l'Académie de Bologne la mort de Chelini : « .... Ceux qui l'ont connu l'ont aimé. Les mathématiciens qui ont étudié ses travaux l'ont admiré et aimé en même temps. C'est que sa pensée scientifique était limpide et sereine comme son cœur, et le souci constant de rendre intuitives les vérités les plus cachées était en lui le reflet d'une splendide intelligence non moins que d'un sentiment exquis d'universelle bienveillance. L'entreprise de résumer et d'expliquer la longue série de ses travaux sera facile et agréable à celui qui devra s'en charger; ce sera une histoire d'idées belles, bonnes et vraies, revêtues de formes simples et élégantes; ce sera une

nouvelle preuve de la célèbre maxime : « Le style, c'est l'homme. » Malheureusement, si le style nous reste, l'homme n'est plus. Lui aussi, ce vétéran de la Science italienne, dont le nom sortait avec respect de la bouche des étrangers au temps où nos études partageaient l'abaissement de nos destinées nationales, il est descendu dans la tombe. Il attendait son dernier jour l'âme tranquille; il avait la conscience d'une vie noblement dépensée. Bénissons la mémoire de Dominique Chelini : c'est la mémoire d'une âme candide et d'un esprit d'élite. »

Une souscription est ouverte pour ériger à Chelini un modeste monument dans le portique de l'Université romaine, où il a terminé sa carrière comme professeur public.

Voici maintenant la liste de ses publications :

Publications scientifiques de Domenico Chelini.

I. — *Giornale Arcadico.*

1. Teoria delle quantità proporzionali (Memoria letta nell' Accademia dei Lincei, le 28 juillet 1834). (T. LXXIII, 1837, p. 166-190).

2. Teorica de valori delle proiezioni. (T. LXXIV, 1838, p. 47-73).

3. Saggio di Geometria analitica trattata con nuovo metodo. (T. LXXV, 1838, p. 80-130, 279-308; t. LXXVI, 1839, p. 3-65, 257-286) (¹).

4. Formazione e dimostrazione della formola che dà i valori delle incognite nelle equazioni di primo grado. (T. LXXXV, 1840, p. 3-12).

5. Nota sulle proprietà di alcune espressioni algebriche relative alle superficie di second' ordine e sulla riduzione di alcuni integrali multipli. (T. XCIV, 1843, p. 49-57).

6. Teorema di Steiner sul volume di un corpo terminato da basi

(¹) Ce travail a été aussi publié séparément (Roma, tipografia delle Belle Arti, 1838).

parallele e circonscritto lateralmente da una superficie rigata. (T. XCVI, 1843, p. 3-16).

7. Sull' equazione cubica per la quale si determinaro gli assi principali delle superficie di second' ordine; Nota del sig. dott. E.-E. Kummer, prof. in Breslavia, tradotta dal sig. C.-G.-J. Jacobi ed annotata dal prof. Domenico Chelini. (T. XCVIII, 1844, p. 71-82).

8. Equazioni differenziali del moto di un sistema di punti materiali. (T. C, 1844, p. 129-136).

9. Equazioni differenziali del moto di un pianeta intorno al Sole integrate con nuovo metodo dal sig. C.-G.-J. Jacobi (estratto di una Memoria di Jacobi con Note del prof. dott. Chelini). (*Ibid.*, p. 136-140).

10. Dimostrazioni geometriche delle trasformazioni degli integrali multipli relativi alle superficie ed ai volumi. (T. CVI, 1846, p. 127-161).

11. Teoremi relativi alle linee di curvatura e geodetiche sopra i paraboloidi. (*Ibid.*, p. 161-164).

12. Di alcuni teoremi di F. Gauss relativi alle superficie curve. (T. CXV, 1848, p. 257-284; T. CXVI, 1848, p. 3-20).

II. — *Raccolta scientifica di Palomba.* (Roma, 1845-1849).

13. Sulla curvatura delle linee e delle superficie. (T. I, 1845, p. 105–109, 129-136, 140-148, 156-160).

14. Sopra uno de' tre principi che formano l'anello di unione tra l'Algebra e le diverse parti delle Matematiche. (T. II, 1846, p. 57-61, 73-77).

15. Teoremi relativi alle linee di curvatura e geodetiche sopra i paraboloidi [1]. (*Ibid.*, p. 95-97).

---

[1] Reproduction, sauf de légères variantes, du Mémoire n° 11.

16. Determinazione geometrica in coordinate ellittiche degli elementi ds_1, ds_2, ds_3 delle tre linee d'intersezione s_1, s_2, s_3, secondo cui si segano in un punto tre superficie ortogonali di secondo grado (λ), (μ), (ν). (*Ibid.*, p. 109-113, 126-131).

17. Principio delle velocità virtuali. (T. III, 1847, p. 145-152).

18. Sui centri dei sistemi geometrici. (T. V, 1849, p. 39-73).

19. Sull' uso sistematico de' principî relativi al metodo delle coordinate rettilinee. (*Ibid.*, p. 227-263, 333-374).

III. — *Annali di Scienze fisiche e matematiche compilati da B. Tortolini.*

20. Jacobi in Roma. (T. II, 1851, p. 142-143) (¹).

21. Nota sulla spiegazione dell' esperienza del sig. Foucault intorno al pendolo. (*Ibid.*, p. 243-246).

22. Osservazioni sopra una Memoria delle sig. Liouville intorno alla teoria generale delle superficie. (*Ibid.*, p. 291-300).

23. Addizione alla Nota sulle oscillazioni del pendolo: nuova dimostrazione geometrica del principio dinamico de' moti relativi. (*Ibid.*, p. 311-316).

24. Nota sulla risoluzione in numeri interi dell' equazione $x^2 + y^2 = N$. (T. III, 1852, p. 126-129).

25. Memoria sulle formole fondamentali riguardanti la curvatura delle superficie e delle linee. (T. IV, 1853, p. 337-394).

IV. — *Annali di Matematica pura ed applicata, pubblicati da B. Tortolini.* (Roma, 1858-1866).

26. Sulle proprietà geometriche e dinamiche de' centri di percossa ne' moti di rotazione. (T. VII, 1866, p. 217-256).

(¹) Cette Notice nécrologique a été reproduite dans le *Journal de Crelle*, t. 42, p. 93, et dans les *Beiträge*, au n° 768 des *Astronomische Nachrichten*, 1851, col. 397-398.

V. — *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane.* (Napoli).

27. Sul teorema del prof. Beltrami esposto a pag. 21 del vol. V (1867, p. 190).

28. Nota sopra i sistemi materiali di egual momento d'inerzia. (T. XII, 1874, p. 201-204) (¹).

VI. — *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni.* (Roma).

29. Articolo bibliografico sugli *Éléments de Géométrie* di E. Catalan. (T. I, 1868, p. 54-56).

30. Rendiconto della sua Memoria « Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, di aree e di punti ». (T. IV, 1871, p. 135-136).

31. Rendiconto della sua Memoria « Interpretazione geometrica di formole essenziali alle scienze dell' estensione, del moto et delle forze ». (T. VI, 1873, p. 533-535) (²).

VII. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.*

32. Comunicazione intorno alla teoria delle superficie. (T. III, 1850, p. 45-46).

33. Dimostrazione nuova del parallelogrammo de' moti rotatori. (T. IV, 1851, p. 377-380).

34. Rapporto sul premio Carpi (letto nella sessione dell' 11 giugno 1865). (T. XX, 1867, p. 84-88) (³).

(¹) *Voir* un article bibliographique dans le *Bulletin*, t. VIII, 1875, p. 35.

(²) Dans le même Volume, p. 536-538, est reproduite une lettre écrite en 1839 par Louis Poinsot au professeur Chelini. Articles bibliographiques dans le *Bull. des Sc. math. et astr.*, t. VII, 1874, p. 125, et dans le *Jahrbuch* d'Ohrtmann, t. V, 1873, p. 47.

(³) Article bibliographique dans le *Bull. des Sc. math. et astr.*, t. II, 1871, p. 19.

35. Nuova dimostrazione elementare delle proprietà fondamentali degli assi permanenti. (T. XXII, 1869, p. 147-155) (¹).

VIII. — *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.*

36. Determinazione analitica della rotazione de' corpi liberi secondo i concetti del sig. Poinsot. (T. X, 1859, p. 583-620).

37. Della legge onde un ellissoide eterogeneo propaga la sua attrazione da punto a punto. (2ᵉ série, t. I, 1861, p. 3-52) (²).

38. Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile. (*Ibid.*, p. 361-428) (³).

39. Sulla teoria de' sistemi semplici di coordinate, e sulla discussione dell' equazione generale di secondo grado in coordinate triangolari et tetraedriche. (*Ibid.*, t. III, 1863, p. 3-81) (⁴).

40. Delle sezioni del cono e della prospettiva nell' insegnamento della Geometria analitica. (T. IV, 1864, p. 441-464).

41. Dell' uso delle coordinate obliquangole nella determinazione de' momenti d'inerzia. (T. V, 1865, p. 143-175).

42. Sugli assi centrali delle forze e delle rotazioni nell' equilibrio e nel moto de' corpi. (T. VI, 1866, p. 3-55).

43. Dell' uso del principio geometrico della resultante nella teoria dei tetraedri. (T. VII, 1867, p. 79-99).

44. Della curvatura delle superficie con metodo diretto ed intuitivo. (T. VIII, 1868, p. 27-76) (⁵).

(¹) Articles bibliogr. *Bull. des Sc. math. et astr.*, t. II, 1871, p. 148, et *Jahrbuch* d'Ohrtmann, t. II, 1869-70, p. 726.

(²) Article bibliogr. dans l'*Archiv* de Grunert, t. XXXVIII, 1862, *Bericht*, p. 7.

(³) Article bibliogr. *Archives de Grunert*, t. XXXIX, 1863, *Bericht*, p. 8.

(⁴) Article bibliogr. *Archives de Grunert*, t. XLI, 1864, *Bericht*, p. 6.

(⁵) Article bibliogr. *Jahrbuch* d'Ohrtmann, t. I, 1868, p. 220.

45. Teoria delle coordinate curvilinee nello spazio e nelle superficie. (T. IX, 1869, p. 483-533) ([1]).

46. Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, di aree e di punti. (T. X, 1870, p. 343-391) ([2]).

47. Sulla nuova geometria de' complessi. (3ᵉ série, T. I, 1871, p. 125-153, avec extrait dans le *Rendiconto delle sessioni* de la même Académie, 1870-71, p. 74-75) ([3]).

48. Interpretazione geometrica di formole essenziali alle scienze dell' estensione, del moto et delle forze. (T. III, 1873, p. 205-246, avec extrait dans le *Rendiconto*, etc., 1872-73, p. 70-72).

49. Sopra alcuni punti notabili nella teoria elementare de' tetraedri e delle coniche. (T. IV, 1874, p. 223-253, avec extrait dans le *Rendiconto*, etc., 1873-74, p. 77-78) ([4]).

50. Intorno ai poligoni inscritti e circoscritti alle coniche. (*Ibid.*, p. 353-357).

51. Intorno ai principî fondamentali della Dinamica con applicazioni al pendolo ed alla percussione de' corpi secondo Poinsot. (T. VI, 1876, p. 409-459, avec extrait dans le *Rendiconto*, etc., 1875-76, p. 54-63) ([5]).

52. Sopra alcune questioni dinamiche. Memoria che fa seguito a quella intorno ai principî fondamentali della Dinamica. (T. VIII, 1877-78, p. 273-306).

([1]) Article bibliogr. *Jahrbuch* d'Ohrtmann, t. I, 1868, p. 151.

([2]) Article bibliogr. *Bull. des Sc. math. et astr.*, t. IV, 1873, p. 248, et t. VII, 1874, p. 241; *Jahrbuch* d'Ohrtmann, t. II, 1869-1870, p. 599, et *Giorn. di Matem.*, t. XII, 1874, p. 22.

([3]) Article bibliogr. *Bull. des Sc. math. et astr.*, t. IV, 1873, p. 250, et t. VII, 1874, p. 241; *Jahrbuch* d'Ohrtmann, t. III, 1871, p. 412, et *Giorn. di Matem.*, t. XII, 1874, p. 24.

([4]) Article bibliogr. *Bull. des Sc. math. et astr.*, 2ᵉ série, t. I, 1877, 2ᵉ Partie, p. 81.

([5]) *Ibid.*, p. 82.

IX. — *Ouvrage publié séparément.*

53. Elementi di Meccanica, con Appendice sui principî fondamentali delle Matematiche. Bologna, Giuseppe Legnani, editore, 1860. In-8, 456 p.; App., 90 p. ([1]).

NOTE SUR LA CYCLIDE;

PAR M. ELLIOT,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

1. On sait qu'une surface S dont un des systèmes de lignes de courbure est circulaire peut être considérée comme l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une courbe A. Considérons le cône ayant son sommet au centre d'une des sphères et dirigé par la caractéristique située sur cette sphère. Ce cône est de révolution autour de la tangente menée à la courbe A par son sommet, et ses génératrices, normales à la sphère, le sont aussi à la surface S. Il en résulte qu'on peut considérer cette surface comme la trajectoire orthogonale de cônes droits ayant leurs sommets sur la courbe A et leurs axes tangents à cette courbe.

Comme par un point quelconque de la surface S passe une ligne de courbure du système circulaire, on voit que toutes les normales de S doivent rencontrer la courbe A.

Réciproquement, supposons qu'une surface soit la trajectoire orthogonale de cônes droits ayant leurs sommets sur une courbe A et leurs axes tangents à cette courbe. Un des cônes ne pourra rencontrer la surface que suivant une courbe coupant normalement toutes les génératrices, c'est-à-dire suivant un cercle, et tous ces cercles sont évidemment des lignes de courbure.

Ce qui précède fournit pour la détermination de la surface dont

---

([1]) Article bibliogr. *Ann. di Matematica*, 1re série, t. III, 1860, p. 245; *Archives de Grunert*, t. XXXVII, 1861, *Bericht*, p. 4.

toutes les lignes de courbure sont circulaires un procédé assez simple. Dupin a trouvé d'abord cette surface, qu'il a appelée *cyclide*, comme enveloppe des sphères tangentes à trois sphères données, et M. Mannheim a montré qu'on pouvait la regarder comme la transformée par rayons vecteurs réciproques d'un tore.

2. La surface cherchée devra avoir pour normales les droites qui rencontrent deux courbes A et B. Les normales passant par un point de A sont les génératrices du cône qui a son sommet en ce point et qui passe par la courbe B; ce cône doit toujours être de révolution. La courbe B, qui se trouve sur une infinité de cônes du second degré, doit se réduire à une conique; il en est de même de A, et ces deux courbes seront l'ensemble d'une ellipse et d'une hyperbole focales. On sait d'ailleurs que le cône ayant son sommet en un point de l'une des courbes et passant par l'autre a pour axe la tangente à la première courbe.

La surface doit avoir pour trace sur le plan de l'hyperbole, par exemple, qui est un plan de symétrie, une courbe coupant normalement toutes les droites issues des sommets de l'ellipse, c'est-à-dire un système de deux cercles ayant pour centres ces sommets. La sphère variable dont la surface cherchée est l'enveloppe touchera donc deux sphères fixes ayant pour grands cercles les cercles dont il vient d'être question. On peut d'ailleurs assujettir la sphère variable à toucher seulement une des sphères fixes; son mouvement sera déterminé, puisque son centre doit décrire l'hyperbole. Le rayon de cette sphère fixe est seul arbitraire; en le faisant varier, on obtiendra des surfaces parallèles entre elles. La sphère variable touchera constamment une infinité de sphères fixes dont les centres peuvent être pris en un point quelconque de l'ellipse. Cela résulte immédiatement de cette propriété connue que la différence des distances d'un point de l'hyperbole à deux points fixes de l'ellipse est constante.

Il est clair que les surfaces ainsi définies couperont à angle droit toutes les droites rencontrant à la fois l'ellipse et l'hyperbole; elles seront donc les trajectoires orthogonales des cônes droits passant par l'ellipse et de ceux qui passent par l'hyperbole, en sorte que les deux systèmes de leurs lignes de courbure seront circulaires.

Le tore s'obtiendra comme cas particulier en supposant que l'el-

lipse se réduise à un cercle; l'hyperbole focale devient alors l'axe du cercle.

Nous avons supposé les courbes A et B distinctes. Il reste à voir si les sécantes doubles d'une courbe gauche peuvent couper normalement une même surface. Le cône qui est dirigé par la courbe et qui a son sommet en un point quelconque de cette courbe devant être de révolution, il faut que cette courbe soit une cubique gauche; mais, en outre, l'axe du cône doit être la tangente à la courbe menée par le sommet, ce qui est impossible, puisque cette tangente est évidemment une génératrice du cône.

3. En général, les normales d'une surface sont les tangentes doubles de la surface Σ lieu des centres de courbure des sections principales. La condition pour que Σ ait une de ses nappes ou toutes les deux réduites à des lignes conduit aux surfaces admettant un ou deux systèmes de lignes de courbure circulaires.

Il est évident que, dans le cas d'une surface dont l'un des systèmes de lignes de courbure est circulaire, la surface Σ se réduit à la ligne A et à une surface Σ_1 qui est l'enveloppe des cônes dont la surface donnée est la trajectoire orthogonale.

Réciproquement si l'on cherche une surface normale aux droites, qui rencontrent une courbe A et qui touchent une surface Σ_1, cette surface ne pourra couper le cône circonscrit à Σ_1, et ayant son sommet en un point de A, que suivant une ligne située sur une sphère dont le centre est au sommet du cône, car la ligne d'intersection est évidemment une ligne de courbure de la surface dont une des développées se réduit à un point. La surface sera l'enveloppe des sphères.

Enfin, si l'on veut que la surface Σ se réduise à deux lignes, il faudra que la surface donnée soit de deux façons différentes l'enveloppe d'une sphère; elle sera donc une cyclide de Dupin, et les deux lignes seront deux coniques focales.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

NEUMANN (F.). — Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen. Erste und zweite Abtheilung. In-4°, 156 p. — Leipzig, 1878.

La première Partie du travail de M. Neumann concerne la représentation, au moyen d'intégrales définies et de séries infinies, des fonctions sphériques de première espèce, ordinaires ou *dérivées*, définies comme intégrales particulières de l'équation

$$(a) \qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dY}{dx}\right] + n(n+1)Y - \frac{j^2}{1-x^2}Y = 0$$

pour j égal à zéro ou différent de zéro. Dans le premier cas, la fonction $P_n(x)$ est assujettie à avoir pour $x = 1$ la valeur finie 1 et à être infinie pour $x = \infty$; la fonction $Q_n(x)$ est assujettie à être nulle pour cette dernière valeur et infinie pour la première ; de plus, on doit avoir

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,dz}{x-z}.$$

Dans le second cas, la fonction *dérivée* de seconde espèce $Q_{nj}(x)$ est assujettie à s'annuler pour $x = \infty$ et à devenir infinie pour $x = \pm 1$; en outre, le facteur laissé arbitraire par ces conditions est déterminé par la condition

$$Q_{nj}(x) = (1-x^2)^{\frac{j}{2}} \frac{d^j Q_n(x)}{dx^j}.$$

Les fonctions P_{nj} de première espèce doivent être infinies pour $x = \infty$ et se divisent en deux classes, selon que j est plus petit ou plus grand que n. Pour la première classe ($j \leqq n$), on a

$$P_{nj}(x) = (1-x^2)^{\frac{j}{2}} \frac{d^j P_n(x)}{dx^j}.$$

La seconde classe ($j < n$) se divise en deux sous-classes : les fonctions $S_{nj}(x)$ s'annulent pour $x = -1$ et deviennent infinies pour $x = +1$; l'inverse a lieu pour les fonctions $T_{nj}(x)$; enfin on a

$$Q_{nj}(x) = S_{nj}(x) - T_{nj}(x).$$

La série

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}}\left[a_0(x-1)^n+a_1(x-1)^{n-1}+\ldots\right],$$

substituée dans l'équation (a), permet de déterminer deux intégrales particulières Y_1 et Z_1, dont la seconde est *conforme* à $Q_{nj}(x)$ (n'en diffère que par un facteur constant). Les expressions ainsi obtenues peuvent être soumises à *sept* transformations résultant des combinaisons des changements de x en $-x$, de j en $-j$, de n en $-n-1$, qui n'altèrent pas l'équation (a). De là résultent *huit* intégrales particulières, conformes en partie les unes aux autres. De cette façon, trois intégrales Z_2, Z_3, Z_4 se déduisent de Z_1, trois autres Y_2, Y_3, Y_4 de Y_1; les quatre intégrales Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 sont conformes à $Q_{nj}(x)$, et M. Neumann détermine les facteurs numériques par lesquels on doit les multiplier pour les rendre identiques à cette fonction : de là résultent quatre séries procédant suivant les puissances descendantes de $x-1$ ou de $x+1$, qui peuvent représenter $Q_{nj}(x)$, qui sont convergentes pour $x^2>1$, et se réduisent à des expressions finies pour $j>n$. De même, pour $j\leq n$, les quatre intégrales Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 peuvent être identifiées à $P_{nj}(x)$; lorsque l'on a $j>n$, deux de ces intégrales sont conformes à $S_{nj}(x)$, les deux autres à $T_{nj}(x)$.

Relativement à ces deux dernières fonctions, l'auteur montre que l'on a

$$S_{nj}(x)=(-1)^j\,1.2\ldots j\,(1-x^2)^{\frac{j}{2}}\int_x^{1}\frac{P_n(z)\,dz}{(x-z)^{j+1}},$$

$$T_{nj}(x)=(-1)^j\,1.2\ldots j\,(1-x^2)^{\frac{j}{2}}\int_x^{-1}\frac{P_n(z)\,dz}{(x-z)^{j+1}},$$

$$T_{nj}(x)=(-1)^{j-n}S_{nj}(-x),$$

$$\begin{aligned}Q_{nj}(x)&=+S_{nj}(x)-(-1)^{j-n}S_{nj}(-x)\\&=-T_{nj}(x)+(-1)^{j-n}T_{nj}(-x).\end{aligned}$$

Outre les intégrales définies qui entrent dans ces formules, étudiées par lui sous le nom d'intégrales de *première espèce*, M. Neumann introduit les intégrales de *seconde espèce*

$$\int_x^{1}(x-z)^{j-1}P_n(z)\,dz,\qquad\int_x^{-1}(x-z)^{j-1}P_n(z)\,dz,$$

qui, pour $j > n$, se déduisent des premières, à un facteur constant près, en les multipliant par $(x^2-1)^j$, et au moyen desquelles on peut exprimer S_{nj}, T_{nj}, P_{nj}. Quant à Q_{nj}, on a

$$Q_{nj} = (-1)^n \frac{1.2\ldots(j+n)}{(j-1)(j-2)\ldots(j-n)} \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_{-1}^{+1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,dz,$$

et cette formule, établie pour $j > n$, subsiste pour les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$ de j, en levant convenablement l'indétermination.

La fin de cette première Partie se rapporte aux développements des diverses fonctions sphériques suivant les puissances ascendantes de x et à l'expression de ces fonctions au moyen des deux séries

$$1 + \frac{(j-n)(j+n+1)}{1.2} x^2 + \frac{(j-n)(j-n+2)(j+n+1)(j+n+3)}{1.2.3.4} x^4 + \ldots,$$

$$x + \frac{(j-n+1)(j+n+2)}{1.2.3} x^3 + \frac{(j-n+1)(j-n+3)(j+n+2)(j+n+4)}{1.2.3.4.5} x^5 + \ldots.$$

La deuxième Partie s'ouvre par une sorte de préface où sont réunies les diverses relations, à forme récurrente, qui lient entre elles les fonctions sphériques à indices différents et leurs premières dérivées, ainsi que les formules qui donnent les valeurs de ces fonctions pour $x = 0, \pm 1, \infty$. L'objet principal poursuivi par l'auteur est le développement en séries de fonctions sphériques du produit de deux telles fonctions, développement dont l'intérêt n'échappera pas au lecteur. M. Neumann parvient à l'effectuer en formant l'équation différentielle linéaire du quatrième ordre à laquelle satisfait le produit de deux intégrales particulières quelconques de deux équations différentielles telles que

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dU}{dx}\right] + p(p+1)U = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dV}{dx}\right] + q(q+1)V = 0.$$

Lorsque $p = q$, cette équation ne monte qu'au troisième ordre; il y a là un résultat facile à généraliser : cette équation a évidemment pour intégrale générale

$$AP_p P_q + BP_p Q_q + CP_q Q_p + DQ_p Q_q;$$

en substituant ensuite une série de la forme

$$A_0 P_{\nu_0} + A_2 P_{\nu_2} + A_4 P_{\nu_4} + \ldots$$

à la place de l'inconnue, on trouve quatre manières de satisfaire à cette équation, qui correspondent aux quatre intégrales particulières et conduisent ainsi aux développements cherchés. A ces développements, qui ne concernent que les produits de fonctions sphériques ordinaires, M. Neumann a joint ceux qui concernent les produits où entrent des fonctions sphériques dérivées du premier ordre. Tous ces résultats sont réunis dans huit tableaux, dont chacun remplit une page.

Enfin il en est fait une application intéressante aux intégrales de la forme

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(z)\,dz}{x - z},$$

en supposant $F(z) = P_p(z)P_q(z)$, ou $(1 - z^2)P'_p(z)P'_q(z)$, ou $P_q(z)P'_p(z)$; on a, par exemple, pour $p > q$,

$$Q_p(x)P_q(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z)P_q(x)}{x - z}(z)\,dz.$$

FLAMMARION (C.). — CATALOGUE DES ÉTOILES DOUBLES ET MULTIPLES EN MOUVEMENT RELATIF CERTAIN, comprenant toutes les observations faites sur chaque couple depuis la découverte et les résultats conclus de l'étude des mouvements. — 1 vol. in-8° de XIV et 184 p. Paris, Gauthier-Villars, 1878.

Les étoiles doubles font aujourd'hui l'objet des travaux d'un grand nombre d'observateurs, et les données que nous possédons sur ces systèmes physiques vont rapidement en augmentant, de telle sorte qu'il sera bientôt possible de calculer d'une manière

suffisamment rigoureuse les orbites du plus grand nombre d'entre elles. Sans doute, bien des observations sont encore nécessaires pour cela, et ce n'est pas trop des forces d'une réunion d'astronomes pour conduire à bonne fin des recherches aussi laborieuses; mais c'est précisément parce que le travail à accomplir est presque gigantesque, qu'il importe qu'il n'y ait pas de forces perdues et qu'il est indispensable que les observateurs choisissent, parmi les 11 000 étoiles multiples aujourd'hui signalées comme pouvant être physiquement associées, celles pour lesquelles les données sont encore incertaines ou insuffisantes. Un catalogue complet des étoiles doubles, une collection de leurs observations, souvent disséminées dans des publications difficiles à obtenir, était donc indispensable.

L'amiral Smyth, dans son *Celestial Cycle*, a bien donné autrefois une collection des observations faites avant lui; mais cette collection est actuellement trop incomplète pour pouvoir être de quelque utilité aux astronomes. Le Catalogue d'étoiles doubles de J. Herschel renferme la position de 10000 de ces astres, mais il ne fait pas connaître leurs positions relatives; d'un autre côté, l'histoire synoptique de 4000 de ces étoiles, écrite par le même auteur, est restée jusqu'ici manuscrite.

Aucun document n'était donc préparé pour venir en aide à l'astronome désireux de savoir sur quelles étoiles multiples devaient se porter les observations. Cette lacune est aujourd'hui heureusement comblée par le Volume de M. Flammarion, que nous analysons ici, et tout le monde lui sera reconnaissant d'avoir donné aux astronomes une statistique qui a exigé un laborieux travail de plusieurs années, une persévérance digne des plus grands éloges.

Les groupes stellaires dans lesquels M. Flammarion a, après une discussion graphique, reconnu un mouvement relatif certain sont au nombre de 819, dont 731 doubles, 73 triples, 12 quadruples, 2 quintuples et 1 sextuple; c'est donc en tout 1745 étoiles diversement associées.

Certains de ces groupes ont été très-fréquemment observés; pour d'autres, il y a pénurie presque complète de mesures. C'est ainsi que, tandis qu'on connait près de 200 observations complètes de γ de la Vierge, 300 de ζ du Cancer, 200 environ de Castor, M. Flammarion n'a, pour d'autres étoiles, trouvé dans les Recueils

imprimés que quelques mesures, insuffisantes par leur nombre ou par leur précision, pour décider de la réalité des mouvements relatifs. Une partie de ces lacunes a été comblée par des observations faites à Paris par l'auteur lui-même et surtout par d'obligeantes communications de MM. Duner, Engelmann, Wilson et Seabroke, Gledhill, Knot, Doberck, Barclay, Dembowski, Schiaparelli, Burnham, Stone, Newcomb, Hall, Holden, qui ont transmis à M. Flammarion des observations encore inédites.

Pour chaque étoile, M. Flammarion donne, avec le nom de la constellation à laquelle elle appartient, sa lettre ou son numéro dans les Catalogues de Flamsteedt ou de Bode; viennent ensuite son numéro dans les Catalogues d'étoiles doubles de W. Struve, d'O. Struve ou d'Herschel, puis sa position pour 1880, et enfin une courte description du groupe.

Pour les observations mêmes, la date est donnée en centièmes d'année, l'angle de position en dixièmes de degré et la distance en centièmes de seconde. Le nom des observateurs est indiqué par des initiales, dont un Tableau spécial donne la clef. Toutes les observations d'une année ont été réunies en une moyenne unique.

Une courte Note ajoutée à la suite des observations de chaque étoile fait connaître, avec les éléments de l'orbite lorsqu'elle a été calculée, la grandeur et la nature du mouvement orbital et les particularités physiques les plus importantes du système; c'est une histoire, en général très-complète, des diverses recherches faites sur l'astre considéré.

Réduit à cette première Partie, purement statistique, le Volume de M. Flammarion rendrait déjà d'importants services, mais il prend un intérêt plus grand encore par les réflexions que la considération de l'ensemble des étoiles multiples a inspirées à son auteur et par la classification qu'il a cru devoir faire de ces astres.

Dans leurs classifications antérieures, l'amiral Smyth, lord Wrottesley, le P. Secchi, M. Barclay, etc., se sont accordés à considérer les couples en mouvement comme physiques et les couples demeurés stationnaires comme simplement optiques; mais M. Flammarion fait observer qu'il ne suffit pas qu'une étoile double offre un mouvement certain pour affirmer qu'elle est orbitale, et qu'un très-grand nombre de ces couples prouvent au

contraire, par la nature de leur mouvement, qu'ils ne sont dus qu'à la perspective.

« Si, dit l'auteur, dans un grand nombre de cas, nous pouvons affirmer la nature orbitale du couple et même calculer les éléments de cette orbite, ou, au contraire, affirmer son état optique et prouver que les deux composantes ne se trouvent actuellement réunies sur le même rayon visuel que par l'incertitude des mesures ou le hasard des perspectives célestes, cependant, dans un grand nombre de cas aussi, l'exiguïté du mouvement parcouru laisse le champ libre à plusieurs interprétations : il n'est pas toujours facile de se décider. En tenant compte de la distance angulaire des composantes, de leur similitude ou de leur différence d'éclat, de la sûreté ou de la difficulté des mesures, de la grandeur et de la direction du mouvement, on arrive cependant à l'opinion la plus conforme à l'ensemble de l'examen et à la conclusion la plus probable. Mais ce serait s'abuser que de prétendre apporter une rigueur mathématique dans les conclusions relatives à ces cas douteux. La comparaison des résultats généraux m'a toutefois conduit à considérer en général comme orbitaires les couples dont la distance est 1 seconde ou au-dessous et comme optiques ceux dont la distance surpasse 25 secondes. Pour les autres cas douteux, la recherche du mouvement propre, la forme du mouvement relatif, la différence de grandeur des étoiles, la durée de la période d'observation, sont entrées en ligne de compte pour la conclusion définitive. »

C'est en suivant ces principes que M. Flammarion a dressé et publié, dans les dernières pages de son Volume, une classification de l'ensemble des étoiles doubles suivant la nature et la rapidité de leurs mouvements : 1° systèmes orbitaux certains, classés suivant que, depuis leur découverte, le compagnon a fait autour de l'étoile centrale une révolution entière, les trois quarts, la moitié, le quart, etc., d'une révolution; 2° les systèmes orbitaux probables, rangés suivant l'ordre de probabilité; 3° les systèmes physiques dans lesquels le mouvement relatif est rectiligne; 4° les systèmes ternaires; 5° les étoiles triples non ternaires; 6° les systèmes quaternaires; 7° les étoiles quadruples; 8° les groupes de perspective; 9° les groupes indéterminés, etc., etc.

Il y a, d'après cette classification, 558 systèmes orbitaux certains ou probables, 317 groupes de perspective, 17 systèmes phy-

siques dont les composantes se déplacent en ligne droite, 23 systèmes ternaires, 32 triples non ternaires, formés d'un système binaire et d'un compagnon optique.

L'étoile binaire dont la période est la plus courte est δ du Petit Cheval, dont le mouvement complet, en ligne droite sur une longueur de $0'',4$, s'effectue en sept ou en quatorze années. Viennent ensuite Σ 3130 de la Lyre, dont la période est de seize ans, 42 de la Chevelure, dont la période est de vingt-cinq ans, etc., etc.

Tel est, en quelques lignes, le résumé rapide des documents rassemblés et discutés par M. Flammarion dans l'Ouvrage que nous avons sous les yeux, et qui prendra certainement place dans la bibliothèque de tous les observatoires dont les astronomes étudient les étoiles doubles. G. R.

SERRET (J.-A.), membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE. 4e édition. 2 vol. in-8°; 1877-79. Paris, Gauthier-Villars.

Il suffira évidemment de signaler à nos lecteurs cette nouvelle édition d'un Ouvrage dont la réputation est si bien établie. L'auteur a fait quelques changements; une addition assez considérable a été introduite au Tome II. Un Chapitre nouveau est consacré à la détermination des fonctions entières irréductibles suivant un module premier dans le cas où le degré est une puissance du module (p. 190-211). M. Serret considère successivement le cas où le degré est égal au module et celui où le degré est une puissance du module.

On doit remercier M. Serret d'avoir bien voulu donner tous ses soins à cette nouvelle édition et d'avoir mis de nouveau à la disposition des géomètres un Ouvrage qui leur est devenu indispensable, et dont l'édition précédente était depuis longtemps épuisée.

G. D.

P. PUISEUX. — Accélération séculaire du mouvement de la Lune.

Résumé des travaux antérieurs sur l'accélération du mouvement de la Lune. — État de la question.

L'accélération séculaire du mouvement de la Lune a été signalée par l'observation longtemps avant qu'on fût en mesure d'en assigner la cause par la théorie. De tous les phénomènes astronomiques, les éclipses de Soleil et de Lune sont ceux qui ont le plus attiré l'attention des anciens. Ptolémée nous a fait connaître, dans l'*Almageste*, un grand nombre d'éclipses de Lune observées soit par les Babyloniens, soit par Hipparque, soit par lui-même. Malheureusement les nombres qu'il donne sont peu précis, et il y a lieu de craindre qu'ils n'aient subi des altérations. Les observations arabes qui nous sont parvenues paraissent mériter plus de confiance. C'est par l'étude des éclipses de Soleil observées en Asie par Albaténius, à la fin du IXe siècle de notre ère, que Halley a pu s'assurer, en 1695, de l'existence d'une équation séculaire dans la longitude de la Lune. Il ne se crut pas autorisé, toutefois, à en fixer la valeur numérique. Ce progrès fut accompli cinquante ans plus tard par Dunthorne et Mayer. Aux observations déjà considérées par Halley ils joignirent deux éclipses de Soleil observées au Caire par Ibn Junis à la fin du Xe siècle, ainsi qu'un grand nombre de documents plus récents. Dunthorne fut ainsi conduit à attribuer au moyen mouvement de la Lune une accélération de $10''$ par siècle. Après une discussion qui paraît avoir été plus complète, Mayer adopta le chiffre de $6'',7$. Dans la dernière édition de ses Tables de la Lune, il le porta à $9''$, sans que l'on sache bien les raisons qui ont déterminé ce changement.

Aucun de ces chiffres, toutefois, ne permettait d'établir un accord satisfaisant entre les observations et les Tables. Frappé de ces divergences, Lalande proposa de ne faire entrer dans la discussion qu'une seule des éclipses de Ptolémée, en y joignant les deux observations faites par Ibn Junis, les seules dont l'heure puisse être regardée comme connue avec précision. Il obtint de la sorte une confirmation du résultat de Dunthorne. Lagrange fut plus réservé dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1774. Après

avoir cherché vainement à rendre compte par la théorie du fait de l'accélération séculaire, il émit des doutes sur la réalité même de cette accélération. Selon lui, les observations anciennes sont trop vagues et trop discordantes pour justifier les conclusions de ses devanciers.

La question historique, délaissée pendant plusieurs années, entra dans une phase nouvelle lorsque Baily eut signalé en 1811, dans les éclipses totales, un nouveau et précieux moyen de contrôle pour les Tables de la Lune. Cette fois, ce n'est plus aux astronomes, c'est aux historiens de l'antiquité qu'il faut s'adresser. Les éclipses totales étant excessivement rares en un point donné de notre globe, il suffit d'une indication même approchée de temps et de lieu pour identifier l'éclipse chronologique avec une de celles qui sont indiquées par les Tables ; à une condition toutefois, c'est qu'il ne subsiste pas une trop grande incertitude sur la valeur même de l'accélération séculaire. En adoptant pour valeur approchée $10''$ et en faisant usage des Tables de Damoiseau, M. Airy fut conduit à élever cette valeur à $10'',72$. Enfin, dans son Mémoire de 1857, l'illustre Astronome Royal d'Angleterre, se servant des Tables construites par M. Hansen, a trouvé que la valeur de l'accélération séculaire qui rend le mieux compte des éclipses totales de l'antiquité est de $12'',989$, soit à peu près $13''$. Aucune des déterminations théoriques effectuées jusqu'à présent n'atteint un chiffre aussi élevé.

Les géomètres, cependant, ne s'étaient point laissé décourager par l'insuccès de Lagrange. Bossut avait déjà, en 1762, présenté une explication fondée sur l'hypothèse d'un milieu très-raréfié, mais résistant, dont l'influence serait plus sensible sur la Lune que sur les planètes. Lagrange avait écarté cette explication comme démentie par le ralentissement de Saturne. Laplace montra qu'il suffirait de supposer que la transmission de la force attractive de la Terre à la Lune ne fût pas instantanée pour introduire une équation séculaire dans le mouvement de notre satellite. Il signala également ce fait capital qu'un ralentissement dans la rotation de la Terre sur elle-même, fût-il seulement de $0^s,01$ depuis le temps d'Hipparque, amènerait dans le mouvement de la Lune une accélération apparente supérieure à celle que semblaient exiger les observations. C'était déplacer la question, mais non la résoudre, car

aucune cause connue ne semblait devoir affecter l'invariabilité du jour sidéral. Lagrange, revenant sur la question en 1783, dans un travail inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin,* montra que les variations séculaires de l'excentricité, de l'inclinaison, de la longitude du nœud ou du périhélie d'une planète pouvaient produire une équation séculaire dans le mouvement d'un astre voisin, au moins lorsqu'on avait égard aux secondes puissances des excentricités et des inclinaisons. Faisant l'application de sa théorie aux actions réciproques de Jupiter et de Saturne, il n'obtint que des résultats négligeables, et, par une conclusion trop hâtive, il admit qu'il en serait de même pour toutes les autres planètes de notre système. C'est ainsi qu'il se laissa enlever par Laplace l'honneur d'une découverte contenue implicitement dans ses formules.

C'est en travaillant à la théorie des satellites de Jupiter que Laplace fut mis sur la voie de l'explication si longtemps cherchée. Il reconnut qu'une variation séculaire dans l'excentricité de l'orbite de cette planète produisait une accélération dans les mouvements moyens des satellites. Ce résultat, transporté à la Lune, lui donna une équation séculaire peu différente de celle qui avait été déduite des seules observations. Une circonstance analogue se présenta dans les mouvements du nœud et du périgée de l'orbite lunaire. Cette importante découverte fut communiquée à l'Académie des Sciences de Paris le 19 novembre 1787 et publiée avec détail l'année suivante dans le Volume de l'*Histoire de l'Académie* pour 1786. La première partie du calcul développé dans les pages suivantes reproduit, en ce qu'elle a de plus essentiel, l'analyse du grand géomètre. Laplace s'en était tenu à la première puissance de la force perturbatrice du Soleil, et encore n'avait-il conservé que la partie principale du résultat. En présence de l'accord satisfaisant du chiffre obtenu avec celui que Dunthorne et Lalande avaient cru pouvoir déduire des observations, Laplace n'avait pas jugé nécessaire d'examiner s'il ne serait pas modifié par une approximation ultérieure.

En 1820, Plana et Damoiseau reprirent la question. Le premier, adoptant la forme algébrique pour les inégalités lunaires, calcula jusqu'aux quantités du septième ordre la série qui multiplie l'intégrale $\int e'^2\,dt$ dans le coefficient de l'accélération séculaire. C'est sous cette forme, comme nous le verrons plus loin, que se présente

le résultat, e' désignant l'excentricité de l'orbite terrestre. Il trouva ainsi $10'',58$ au lieu du nombre $10'',18$ que donnait le terme de Laplace pris seul. Par une voie différente, Damoiseau obtint $10'',72$. Enfin M. Hansen a porté ce coefficient successivement à $11'',47$ et à $12'',18$. La méthode employée par lui n'a pas été publiée *in extenso*, et ce résultat emprunte par conséquent toute son autorité à l'exactitude reconnue des Tables de la Lune publiées par son auteur. Il est bon d'ajouter, cependant, que l'accord des Tables de M. Hansen avec les observations modernes ne serait pas altéré par une modification apportée au coefficient de l'accélération séculaire. Ce n'est qu'à une époque reculée que l'influence de cette correction se ferait sentir, et il n'est pas encore absolument démontré, au jugement de MM. Airy et Delaunay, que les observations anciennes ne puissent être représentées par les Tables actuelles, avec une valeur différente de l'accélération.

Toutes ces déterminations s'accordaient à fournir pour le coefficient considéré une valeur un peu supérieure à $10''$, lorsque M. Adams, dans un Mémoire lu à la Société royale de Londres le 16 juin 1853, vint signaler un vice de méthode dans les recherches de Plana et Damoiseau. Dans les équations différentielles qui définissent le mouvement de la Lune, ces deux savants avaient traité l'excentricité de l'orbite terrestre, et par suite le moyen mouvement de la Lune, comme des constantes, pour ne leur attribuer le caractère de variables qu'après l'intégration faite. Ce procédé, légitime quand on n'a égard, comme l'avait fait Laplace, qu'à la première puissance de la force perturbatrice, cesse de l'être quand on passe aux approximations suivantes. La supposition contraire, la seule conforme aux faits, introduit dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune de nouveaux termes proportionnels au carré du temps, et le résultat primitif se trouve profondément modifié. Cette conclusion imprévue, dont nous trouverons une confirmation nouvelle dans les calculs qui vont suivre, a été parfaitement mise en évidence par MM. Adams et Delaunay. Nous renverrons, pour plus de détails, au Mémoire inséré par M. Delaunay dans la *Connaissance des Temps* pour 1864. On trouvera dans ce même travail une confirmation du résultat de M. Adams, obtenue par la méthode dont Delaunay a fait la base d'une nouvelle théorie de la Lune. De ces recherches et des calculs plus

complets dont Delaunay a donné le résultat dans le Tome LXXII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, il résulte que le coefficient de l'accélération séculaire doit être réduit à 6″,176. C'est, on le voit, la moitié du chiffre de M. Hansen. Il convient d'ajouter que la seule cause invoquée dans ces travaux pour rendre compte de l'accélération séculaire a été la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre.

Les recherches que nous venons de citer ont reçu depuis l'assentiment d'un grand nombre de géomètres. Plana, à la suite d'une longue controverse, a été amené à reconnaître la nécessité de modifier ses calculs dans le sens indiqué par M. Adams. MM. Lubbock et Cayley ont obtenu séparément une confirmation entière de la théorie nouvelle. Le Verrier, cependant, a longtemps combattu la modification proposée comme inconciliable avec les observations anciennes. Il faut répondre, avec Delaunay, que cet argument ne saurait être décisif dans une question d'analyse, et que, si la divergence annoncée est réelle, la cause doit en être cherchée dans quelque influence physique mal étudiée. Le Verrier alléguait moins, du reste, ses propres recherches que l'autorité de M. Hansen, qui affirmait avoir obtenu par la théorie seule son coefficient de 12″. A dire vrai, l'effet produit par cette déclaration a dû être un peu atténué par la publication d'une Lettre de M. Hansen à M. Warren de la Rue, président de la Société Astronomique de Londres [1]. Dans ce document, M. Hansen, tout en maintenant le chiffre proposé par lui comme le plus conforme aux observations, reconnaît comme exacte l'analyse de M. Adams; l'éminent astronome de Gotha attribue la divergence à ce qu'il aurait, dans ses propres calculs, traité comme constante une certaine quantité Ξ, dont la variation est liée à celle du moyen mouvement de la Lune. Nous retombons, on le voit, dans l'hypothèse fautive de M. Plana. En vain M. Hansen insiste sur la concordance remarquable que l'hypothèse $\Xi = 0$ établirait entre le calcul et l'observation. Un tel accord ne saurait racheter une lacune dans la théorie. Pour s'en faire une arme contre le résultat de M. Adams, si bien confirmé par tous les procédés de l'analyse, il faudrait avoir établi

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXII, p. 704.

clairement que la cause dont on a tenu compte est la seule qui puisse modifier le moyen mouvement de la Lune.

Rien n'est moins démontré, et M. Hansen lui-même donne, avec M. Airy, son assentiment aux vues de Delaunay, qui a cherché dans une nouvelle cause physique agissant sur la Lune l'explication du désaccord. Déjà Laplace avait signalé l'influence qu'aurait sur le mouvement apparent de la Lune une altération, si petite qu'elle fût, de la durée du jour sidéral. Dans une Communication faite à l'Académie des Sciences ([1]), Delaunay a montré, avec sa clarté ordinaire, que le retard de la marée sur le passage de la Lune au méridien doit produire un couple résistant qui ralentit la rotation de la Terre sur elle-même, accroît dans la suite des siècles la durée du jour sidéral et entraîne une accélération apparente dans le moyen mouvement de la Lune. S'il est aisé de se rendre compte de l'existence d'une pareille cause, il l'est beaucoup moins de la soumettre au calcul et de se faire une idée, même approchée, de la grandeur de ses effets.

Le dernier travail important qui ait été publié, à notre connaissance, sur ce sujet, a paru en 1873, dans le *Recueil des Mémoires présentés à l'Académie des Sciences* (t. XXI). Dans ce Mémoire, mon père a démontré, en poussant l'approximation plus loin que ne l'avait fait Laplace, que la variation séculaire de l'inclinaison de l'orbite terrestre est sans effet, dans les limites des temps historiques, sur l'accélération du mouvement de la Lune. Par là même se trouve écartée l'hypothèse d'une équation séculaire due au déplacement progressif du nœud de l'orbite terrestre. On voit en effet, à l'inspection de la fonction perturbatrice de la Lune, que l'hypothèse qui consiste à regarder comme nulle l'inclinaison de l'orbite terrestre, supposition permise dans la recherche de l'équation séculaire, fait évanouir à la fois tous les termes où figure la longitude du nœud. Reste le déplacement du périhélie de l'orbite terrestre, que Lagrange avait signalé comme pouvant produire une équation séculaire de la Lune. Mais un coup d'œil jeté sur la fonction perturbatrice montre qu'il n'en est rien. La longitude du périhélie, qui dans nos formules sera désignée par ϖ', n'entre en effet que

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXI, p. 1023.

lans les termes périodiques, et, si l'on suppose nulle l'inclinaison le l'orbite terrestre, elle se trouvera partout associée aux longiudes moyennes de la Terre et de la Lune, qui ont une variation bien plus rapide. Le seul effet du déplacement du périhélie sera lonc de modifier légèrement les périodes des inégalités de la Lune; l ne peut en résulter d'équation séculaire dans la longitude.

Calcul de l'accélération séculaire du mouvement de la Lune par la méthode de Poisson.

Dans la première approximation, on pourra réduire la fonction perturbatrice de la Lune, telle qu'elle est donnée dans l'Ouvrage le Delaunay, à sa partie non périodique. Il suffira d'y remplacer 'excentricité de l'orbite terrestre par son expression en fonction lu temps, qui est, d'après Le Verrier,

$$e' = 3459'',28 - 0,08755\,t - 0'',00000282\,t^2.$$

Enfin l'on intégrera l'expression qui en résulte pour la dérivée de a longitude moyenne de la Lune. Le calcul ainsi effectué ne diffère le celui de Laplace que par la suppression de quelques développenents étrangers à notre objet.

La seconde approximation est fondée sur la méthode de la variation des constantes arbitraires, modifiée conformément aux inlications données par Poisson dans son Mémoire de 1833. On 'assure aisément que deux arguments différents de la fonction perturbatrice donneront toujours, quand on les combinera par adlition ou soustraction, un résultat périodique. Il sera donc permis, lans la recherche d'une inégalité séculaire, de limiter successivenent la fonction perturbatrice à chacun de ses termes.

On peut encore abréger le calcul en profitant d'une remarque faite par Delaunay, dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1862. Si l'on s'en tient aux premières puissances de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire, la fonction perturbatrice e réduit à vingt termes, dont neuf contiennent en facteur l'excenricité; les autres n'en dépendent pas. Les termes appartenant à 'une ou à l'autre de ces deux catégories peuvent être compris dans ine même forme analytique et soumis à un même calcul. Le coefficient relatif à chaque terme se tire ensuite de la formule générale

par de simples substitutions numériques. Le calcul ainsi effectué n'occupe qu'un petit nombre de pages et permet de retrouver, à $\frac{2}{10}$ de seconde près, le résultat de M. Adams. Il met aussi en lumière l'insuffisance de la première approximation. Il existe en effet dans la fonction perturbatrice un terme périodique qui, à lui seul, produirait dans le moyen mouvement de la Lune une plus grande accélération que la partie non périodique, la seule considérée par Laplace.

Sans sortir de la seconde approximation, on peut obtenir une précision plus grande en n'excluant plus que les puissances de l'excentricité et de l'inclinaison égales ou supérieures à la quatrième. Le développement de la fonction perturbatrice se trouve ainsi porté à trente-cinq termes. Comme précédemment, on fait à chacun de ces termes deux applications successives de la méthode de Poisson, de manière à trouver dans la dérivée de la longitude moyenne la partie qui contient en facteur le carré de l'excentricité de l'orbite terrestre. Les termes qui rentrent dans une même forme analytique peuvent être traités ensemble, mais ici l'introduction des puissances supérieures de e et de φ amène des différences dont il est indispensable de tenir compte; on est conduit à partager les trente-cinq termes de la fonction perturbatrice en dix groupes, dont chacun fait l'objet d'un calcul séparé.

Pour obtenir partout le même degré d'exactitude, on doit : 1° compléter la partie non périodique de la fonction perturbatrice par l'introduction des termes du second et du quatrième ordre dans le multiplicateur de e'^2; 2° chercher la partie principale de la troisième approximation fournie par une application nouvelle de la méthode de Poisson. Cette fois, des termes non périodiques peuvent apparaître par la combinaison de trois arguments. Il n'est donc plus permis de réduire, comme nous l'avons fait jusqu'ici, la fonction perturbatrice successivement à chacun de ses termes. Cependant, comme l'expression que l'on veut obtenir ne doit renfermer ni e, ni φ, ni les puissances de e' supérieures à la seconde, on peut, dès le début, écarter les termes de la fonction perturbatrice qui contiendraient ces quantités en facteur. A la fonction ainsi réduite on applique trois fois la méthode d'approximation de Poisson, toujours en vue d'obtenir le coefficient de e'^2 dans la dérivée de la longitude moyenne. La seule précaution à prendre dans ce calcul

consiste à supprimer, à mesure qu'ils se présentent, les termes qui ne doivent pas influer sur le résultat final et dont l'introduction conduirait à une analyse prolixe.

Les données qui ont servi à réduire la formule en nombres ont été empruntées aux Tables de M. Hansen pour les éléments de la Lune, et aux Mémoires publiés par M. Le Verrier dans les *Annales de l'Observatoire*, pour ce qui se rapporte à l'orbite terrestre. Le coefficient du carré du temps dans la longitude moyenne de la Lune se trouve ainsi porté à $6'',334$. Par l'effet d'une telle accélération, la longitude de la Lune, à vingt-cinq siècles de notre époque, est accrue de plus de 1°. Il en résulterait une modification profonde dans les circonstances d'une éclipse. Beaucoup moindre est l'influence du terme en t^3, qui apparaît également dans la longitude moyenne quand on remplace e' par son expression en fonction du temps. Après vingt-cinq siècles, la modification due à ce terme dans la longitude moyenne de la Lune serait environ de $2'$, comme on s'en assure par un calcul facile. Le peu de précision des observations anciennes qui nous sont parvenues permet de regarder un tel déplacement comme sans importance.

Jusqu'ici nous avons admis que la partie proportionnelle au temps dans la dérivée de la longitude moyenne provenait uniquement du facteur e'^2. Il existe cependant dans l'expression de cette dérivée des termes en e'^4 et en e'^6 qui, lorsqu'on remplacera e' par sa valeur en fonction du temps, ajouteront au coefficient de l'accélération séculaire des parties du même ordre que celles qui ont été considérées en dernier lieu. On s'assure facilement que les termes en e'^6 sont négligeables; mais il n'en est pas de même des termes en e'^4, dont plusieurs dépassent en valeur absolue $\frac{1}{100}$ de seconde. Il est vrai que la somme des termes négatifs diffère peu de celle des termes positifs, circonstance qui se présente assez fréquemment dans les recherches astronomiques. La considération de ces termes a pour effet de réduire le coefficient de l'accélération séculaire à $6'',328$. Selon toute apparence, une nouvelle application de la méthode de Poisson, effectuée en vue d'obtenir une précision plus grande, ne modifierait que le chiffre des millièmes de seconde.

DINI (U.) — Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. — Pise, 1878. In-8°, 407 pages.

Depuis un certain nombre d'années, on se préoccupe de mettre de la rigueur dans l'établissement des principes de l'Analyse, de donner plus de précision aux définitions et de n'en tirer que ce qu'elles contiennent; la nécessité de cette révision s'imposa à partir du moment où, dans le célèbre Mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques, la définition de l'intégrale des fonctions discontinues fut donnée d'une manière précise, définition qui entraînait comme corollaire l'existence de fonctions continues n'ayant pas de dérivée. Depuis lors, les travaux de Hankel, de MM. Weierstrass, Du Bois-Reymond, Darboux ont éclairci les points les plus importants. De son côté, M. Dini prit cette matière pour le sujet d'une partie de ses Leçons pendant l'année scolaire 1871-1872 et y revint à plusieurs reprises. Diverses causes ont retardé jusqu'à l'année 1878 la publication de l'Ouvrage d'ensemble qu'il préparait sur les diverses questions qui se rattachent à cet ordre d'idées; l'auteur paraît craindre que son livre n'ait ainsi perdu quelque peu de son actualité; quoi qu'il en soit, cet Ouvrage ne perd rien de son utilité, maintenant qu'il importe de déterminer la mesure dans laquelle il convient de faire pénétrer dans l'enseignement la substance des résultats acquis sur ce sujet depuis une vingtaine d'années.

M. Dini commence par préciser les notions de nombre incommensurable et de limite. Tout nombre pouvant être représenté par un point sur une ligne droite dont la distance à un point fixe pris sur cette droite est mesurée par ce nombre lui-même, on pourra parler indifféremment d'un nombre ou du point qui le représente.

Ainsi la notion d'un groupe de nombres compris entre deux nombres donnés pourra être remplacée par celle du groupe de points correspondants : s'il y a un nombre infini de tels points, il existera, entre les deux points extrêmes, au moins un point tel, que dans son domaine (*intorno*), quelque petit qu'il soit, il y ait un nombre infini de points du groupe considéré; l'ensemble de ces points, que nous appellerons avec l'auteur *points limites*, est le premier groupe dérivé; si ce groupe dérivé est infini, il donnera

lieu lui-même à un second groupe dérivé, etc. Les mêmes considérations donnent lieu à la notion de limite supérieure et inférieure d'un groupe de nombres ou de points. La fonction d'une variable dans un intervalle étant nettement définie par ce fait que sa valeur est, pour toute valeur de la variable, comprise dans l'intervalle considéré, complètement déterminée, la notion du maximum et du minimum, de l'oscillation d'une fonction dans un intervalle donné, la preuve de l'existence d'un point dans le domaine duquel, si petit qu'il soit, la fonction prend des valeurs aussi voisines qu'on le veut de sa valeur maximum se déduisent aisément de ce qui précède, ainsi que les conséquences principales de la *continuité,* si l'on suppose que la fonction considérée est continue : en particulier, une telle fonction, dont les valeurs sont données pour un groupe de points, prend, par cela même, des valeurs données aux points *limites* de ce groupe; elle atteint les valeurs maxima et minima dans tout intervalle et passe par toutes les valeurs intermédiaires. Il y a lieu de remarquer qu'une fonction continue, dans le domaine d'un point, si petit qu'il soit, peut présenter une infinité de maxima et de minima; en sorte qu'il y a lieu de distinguer les fonctions continues en deux classes, suivant qu'elles font ou non un nombre infini d'oscillations dans un intervalle donné.

Pour ce qui est de la discontinuité, il y aura lieu de distinguer d'abord les fonctions qui, dans un intervalle déterminé, ne sont discontinues qu'en un nombre limité de points et, parmi ces dernières, celles qu'on pourrait rendre continues en modifiant les valeurs qu'elles prennent aux points de discontinuité. On remarquera encore qu'une fonction peut être discontinue d'un côté d'un point sans l'être de l'autre côté. La discontinuité, à droite de la valeur a, par exemple, sera de première espèce lorsque, $x - a$ tendant vers zéro par des valeurs positives, la fonction tend vers une limite déterminée; dans le cas contraire, elle sera de seconde espèce. Une fonction, tout en étant susceptible d'une définition analytique, peut, dans un intervalle donné, être discontinue un nombre infini de fois; elle est dite *ponctuellement* discontinue si dans toute portion de cet intervalle elle admet des points de continuité, sinon elle est *totalement* discontinue.

L'auteur aborde ensuite la notion de dérivée et établit la suite de propositions qui résultent de la seule supposition de l'existence

de la fonction dérivée. Il fait ensuite une digression nécessaire sur les propositions concernant les séries uniformément ou non convergentes, et donne les conditions sous lesquelles on peut affirmer que la série formée en prenant la dérivée des termes d'une série donnée représente la dérivée de la fonction égale à la somme de cette dernière série. Il a ainsi tous les éléments nécessaires pour exposer le principe de la condensation des singularités, principe au moyen duquel, en partant d'une fonction qui présente en un point quelque singularité relative, soit à la continuité, soit à la dérivée ou aux maxima et aux minima, on peut construire les expressions analytiques d'une infinité de fonctions qui, dans un intervalle donné, présentent la même singularité en un nombre infini de points d'une portion quelconque de cet intervalle. L'application de ce principe fournit de nombreux exemples de fonctions continues n'admettant pas de dérivées déterminées en une infinité de points aussi voisins qu'on le veut.

Relativement aux fonctions continues et indépendamment de toute hypothèse sur la possibilité de les représenter analytiquement, M. Dini introduit la considération suivante, dont il tire grand parti. Soit $f(x)$ une telle fonction, continue dans l'intervalle $a, b \, (a < b)$, le rapport $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, lorsqu'on y fait varier h de zéro à $b-x$, est, en excluant la limite inférieure, une fonction continue de h dans cet intervalle, admettant une valeur maximum et une valeur minimum qui, d'ailleurs, peuvent être infinies. Ces deux quantités L_x et l_x sont des fonctions définies de x; en outre, il est clair que, si l'on fait tendre b vers x, les nombres L_x et l_x qui dépendent de b tendront vers des nombres déterminés Λ_x, λ_x, la valeur de x étant supposée elle-même déterminée. Les deux fonctions Λ_x, λ_x constituent une généralisation de la notion de dérivée *à droite* du point x; elles sont égales quand cette dérivée existe. A gauche du même point, on obtiendra de même deux fonctions Λ'_x, λ'_x, qui joueront un rôle analogue. La considération de ces fonctions permet en particulier à l'auteur d'établir un caractère au moyen duquel on peut affirmer, pour une classe importante de fonctions continues, l'existence d'une dérivée à droite et à gauche.

Passant ensuite aux intégrales définies, M. Dini précise nette-

ment le sens de ce mot et donne les conditions pour qu'une fonction $f(x)$ soit apte à l'intégration entre des limites données. Il établit avec rigueur diverses formules permettant d'obtenir des valeurs approchées des intégrales définies; citons, en particulier, la formule de M. Weierstrass, où l'on suppose que la fonction $\varphi(x)$ varie dans le même sens quand x croît de α à β,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{\alpha+\theta(\beta-\alpha)} f(x)\,dx + \varphi(\beta)\int_{\alpha+\theta(\beta-\alpha)}^\beta f(x)\,dx.$$

Cette proposition de M. Weierstrass est, du reste, extrêmement voisine de celle donnée par M. Bonnet (p. 249 du *Journal de Liouville* et *Mémoire sur la théorie générale des séries*, p. 8. Académie de Bruxelles, *Mémoires couronnés*).

Enfin, pour traiter le cas où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie, ainsi que le cas où l'une des limites de l'intégrale est infinie, il reprend et développe la notion des intégrales définies singulières de Cauchy, et établit un critérium qui permet de reconnaître si l'intégrale a une valeur finie et déterminée.

MÉLANGES.

A QUELLE ÉPOQUE VIVAIT DIOPHANTE?

PAR M. PAUL TANNERY.

Quiconque étudie l'histoire des Mathématiques est nécessairement frappé du vide absolu que semble présenter le IIIe siècle après J.-C. Tandis qu'au IIe Ptolémée marque le point culminant de cette pseudo-renaissance des travaux scientifiques que l'Empire romain ne put faire aboutir, on ne retrouve après lui qu'à la fin du IVe des auteurs ayant quelque valeur : Diophante, Pappus, Théon d'Alexandrie. Les écrits des philosophes du IIIe siècle, Anatolius, Porphyre, Jamblique, qui ont spéculé sur les nombres, font pitié, même à côté de ceux d'un Proclus au Ve siècle, d'un Eutocius au VIe.

Une telle lacune est d'autant plus inexplicable, que, malgré les

troubles politiques du IIIe siècle, l'époque était réellement plus favorable pour les Sciences que celles qui suivirent. La littérature en général ne subit nullement une pareille décadence; tout au contraire, il se produit alors un très-puissant mouvement philosophique, celui de l'éclectisme, indice de l'activité des esprits, et l'on ne rencontrerait pas dans l'Histoire un autre mouvement semblable qui ne soit contemporain d'importants travaux mathématiques.

Il est donc clair qu'il y a lieu d'examiner s'il n'y a pas là quelque erreur historique. Usener a déjà reporté, sur la foi d'un scholiaste, Pappus au temps de Dioclétien (284-305 après J.-C.). Dans son excellente édition de ce mathématicien (Berlin, 1875-1879, vol. III, p. 7), F. Hultsch a apporté de très-sérieuses raisons à l'appui de cette opinion, et il a promis de la confirmer mieux encore. Nous nous proposons de discuter ici la question très-controversée de l'âge où vécut Diophante et de montrer qu'il convient également de le reporter au moins à la même époque.

Il n'y a, à notre avis du moins, aucun indice à tirer du caractère spécial de l'œuvre de ce prétendu inventeur de l'Algèbre. Nous ne pouvons, en effet, ni admettre qu'il soit apparu à la fin de l'âge scientifique des Hellènes pour ouvrir une nouvelle carrière et y marcher à pas de géant, ni, comme certains ont été tentés de le faire, lui chercher ailleurs que dans le monde grec d'imaginaires précurseurs. Lorsque Hankel dit (*Zur Geschichte der Mathematik*; Leipzig, 1874, p. 157) : « Si ses écrits n'étaient pas en langue grecque, il ne viendrait à la pensée de personne qu'ils soient un produit de la civilisation grecque », c'est une étrange hallucination; la forme caractéristique de la rédaction n'eût certes pas permis de méconnaître la véritable origine, même sous le déguisement d'une langue étrangère, pourvu que la traduction eût été littérale.

La rareté des indices de travaux analogues à ceux de Diophante et remontant au premier âge de l'École d'Alexandrie est d'ailleurs suffisamment explicable par diverses circonstances sur lesquelles il serait hors de propos de nous étendre ici; mais, si rares que soient ces indices, ils suffisent, avec l'étude des écrits de notre auteur, pour établir que c'est un esprit dans le genre de celui de Pappus, un mathématicien érudit plutôt qu'un génie inventeur. Les artifices de ses solutions ont été, comme ensemble, beaucoup trop vantés;

leur valeur est très-inégale, et, si aux uns il faut bien reconnaître *la griffe d'un lion inconnu*, d'autres problèmes, à côté, sont, en comparaison, traités plus ou moins maladroitement. L'œuvre apparaît donc comme un recueil emprunté à diverses sources, recueil où l'auteur a pu d'ailleurs mettre beaucoup du sien. Mais, si dans ces conditions on est plutôt conduit à placer sous l'Empire romain l'époque de la composition, rien, à la rigueur, à l'examiner en elle-même, n'empêcherait de la faire remonter plus haut.

La limite supérieure est au reste donnée par une citation d'Hypsiclès, dont l'âge se trouve déterminé vers l'an 200 avant J.-C., entre Apollonius, dont il est parlé au XIVe Livre des *Éléments*, et Hipparque, aux travaux duquel l'Ἀναφόρικος (*De ascensionibus liber*) est certainement antérieur (¹).

Diophante ne fait pas d'autre citation; le Dionysios auquel il dédie ses *Arithmétiques* porte un nom trop commun pour qu'on puisse faire la moindre conjecture à son égard (²).

Quant à une limite inférieure, elle a été, jusqu'à présent, rigoureusement déterminée par une citation d'un passage de notre auteur que Ramus avait signalée dans Théon d'Alexandrie (*Commentaire sur l'Almageste*, édit. de Bâle, p. 40) et que Nesselmann a retrouvée (*Die Algebra der Griechen*, p. 250). La citation est d'ailleurs faite comme s'il s'agissait d'un classique et non d'un auteur contemporain.

Théon d'Alexandrie florissait de 365 à 390 après J.-C. On a donc, pour placer Diophante, un intervalle de *cinq siècles et demi*. Il serait d'ailleurs vicieux d'arguer de l'absence de toute citation

---

(¹) *Voir* Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*; Leipzig, 1870, p. 182. Le XVe Livre des *Éléments*, qui a également été attribué à Hypsiclès, ne semble pas antérieur au VIe siècle. L'*Isidoros* que l'auteur de ce Livre donne comme son maître est plutôt celui d'Eutocius et d'Anthémius, le premier Isidore de Milet, que, comme le veut Friedlein, le philosophe Isidore de Gaza. Ce dernier n'était nullement mathématicien, comme a pu le faire croire un passage de Suidas mal interprété. C'est, du reste, une des singulières erreurs de M. Hœfer (*Histoire des Mathématiques*, p. 279) que de confondre ces deux personnages contemporains, l'ingénieur architecte de Sainte-Sophie, qui ne philosopha pas plus que ses disciples, ni son neveu du même nom que lui, avec l'opiniâtre et mystique païen dont Damascius a écrit la vie.

(²) Signalons cependant que les *Definitiones* du pseudo-Héron (éd. Hultsch, p. 7) sont dédiées à un personnage du même nom.

antérieure à Théon pour rapprocher notre auteur de la limite inférieure, car on ne pourrait dire à bon droit, vu la nature spéciale de son Ouvrage, qui aurait dû parler de lui.

On ne peut, au reste, avoir en vue qu'une détermination très-approximative, car, si l'on en croit une célèbre épigramme de l'Anthologie grecque, Diophante aurait vécu quatre-vingt-quatre ans, et l'on ne sait guère à quel moment de cette longue vie placer la composition des *Arithmétiques*.

Il est clair que, si l'on connaissait l'auteur de cette épigramme, ce serait un indice précieux. Malheureusement les attributions de l'Anthologie sont assez douteuses en général, et, d'autre part, le nom de Métrodore, sous lequel on la trouve, est assez fréquent. La conjecture de Brunck, qui pense à Métrodore de Scepsis, nous reporterait immédiatement après Hypsiclès; mais on penche plutôt aujourd'hui pour un Métrodore de Byzance, grammairien et arithméticien, qui vivait sous Constantin le Grand.

Il nous reste à discuter les déterminations qui ont été faites entre les limites que nous avons fixées.

Celle qui prévaut d'ordinaire est celle de Montucla; elle s'appuie sur un passage de l'historien arabe Aboulfaradj pour faire vivre Diophante sous Julien l'Apostat (361-363 après J.-C.). A cause du trop proche voisinage de Théon d'Alexandrie, ce ne pourrait, en tout cas, être admis que pour la fin de la vie de notre auteur. Mais Cossali et Colebrooke, remarquant que son nom est étrangement accolé par Aboulfaradj à celui du philosophe Thémistius, ont, à bon droit, soupçonné qu'il y avait confusion entre le mathématicien grec et un sophiste que Suidas donne comme maître du rhéteur Libanius. Cette confusion est évidente.

A la vérité, en l'absence de preuves contraires, il serait loisible, comme le remarque Nesselmann, d'identifier les deux personnages. Si Hypatia, qui a commenté Diophante, professait la Philosophie, Diophante ne pouvait-il pas enseigner même la Rhétorique? Fermat était bien conseiller au parlement de Toulouse!

Malheureusement pour cette hypothèse, l'autorité de Suidas est facile à retrouver. C'est Eunape dans les *Vies des sophistes*; il nous donne ce Diophante, qu'il a connu et dont il ne fait d'ailleurs pas grand cas, comme né, non pas à Alexandrie, ainsi que le mathématicien, mais en Arabie (Διόφαντος ὁ Ἀράβιος), et, d'autre part.

comme professant à Athènes. L'identification n'est donc pas possible, et, dès lors, nous considérerons le passage d'Aboulfaradj comme sans valeur.

Dans son édition de Diophante, Bachet de Méziriac, ayant lu dans Suidas qu'Hypatia avait commenté le *Canon astronomique* de notre auteur, a proposé de l'identifier avec un astrologue du temps de Néron, sur lequel un contemporain(?), Lucillius, a composé quelques épigrammes de l'Anthologie grecque. Cette supposition est insoutenable : d'une part, le ridicule héros de plaisanteries classiques, faites à Rome, tantôt sur la maigreur, tantôt sur la vanité des prédictions astrologiques, semble n'être qu'un personnage d'invention ; d'un autre côté, le texte de Suidas est corrompu, et il faut le rétablir avec Fabricius ([1]), en entendant que c'est comme auteur des *Arithmétiques* que Diophante a été commenté par Hypatia. Il ne reste donc aucune preuve qu'il se soit occupé d'Astronomie.

Enfin Bombelli, le premier qui ait fait connaître Diophante (1572), l'a placé, sans indiquer aucune preuve, sous le règne d'Antonin le Pieux, c'est-à-dire qu'il en fait un contemporain de Ptolémée (IIe siècle après J.-C.). On a bientôt fait d'en finir avec cette opinion en la traitant, comme fait Nesselmann, d'hypothèse arbitraire. Il faudrait, au contraire, dans l'obscurité où l'on se trouve, rechercher si cette affirmation précise ne peut pas avoir quelque fondement, afin d'être en mesure de la discuter sérieusement.

Je crois avoir rencontré l'origine de cette détermination en faisant une autre recherche. Il s'agissait de l'autorité d'après laquelle Ramus a attribué des *Harmoniques* à Diophante, assertion répétée sans contrôle par Gessner et Fabricius ([2]).

([1]) Ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διόφαντον.... τὸν ἀστρονομικὸν κανόνα, εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. C'est à tort que Nesselmann, qui adopte au reste le même sens que Fabricius, signale l'expression εἰς Διόφαντον (*Sur Diophante*, au lieu de *Sur les Arithmétiques de Diophante*) comme n'étant pas grecque; on en trouve assez d'exemples dans les auteurs byzantins.

Il est au reste douteux qu'Hypatia ait composé un *Canon astronomique*, comme l'admet Fabricius; aussi avons-nous indiqué une lacune après Διόφαντον. On peut suppléer εἰς et supposer qu'il s'agit d'un commentaire sur les *Canons* de Ptolémée.

([2]) Ce dernier suppose gratuitement que cet Ouvrage traitait d'Arithmétique, non de Musique; cette hypothèse ne peut se défendre.

La source de Ramus était, à n'en pas douter, un manuscrit grec sur la Musique; or, dans l'édition des *Antiquæ musicæ auctores* de Meibomius, on lit, pages 22-23 du Traité de Bacchius le Vieux, cinq définitions du rhythme empruntées à Phèdre, Aristoxène, Nicomaque, Λεόφαντος, Didyme. Λεόφαντος [1] n'est pas grec, et il n'est pas douteux qu'il ne faille lire Διόφαντος, ce qu'ont probablement fait Ramus et d'autres que lui.

L'identification de cet auteur avec notre mathématicien est certainement assez hypothétique; mais elle est tout indiquée quand on voit son nom à côté de celui de Nicomaque. On sait, au reste, qu'Euclide et Ptolémée figurent aussi parmi les auteurs qui ont traité de la Musique, et que la technologie de cet art faisait, dans l'antiquité, partie des μαθήματα.

Or, dans les énumérations comme celle que nous avons rapportée, l'ordre chronologique est généralement suivi et l'époque de divers auteurs n'a pas été assignée sur des arguments plus certains. Dans le cas présent, on peut d'ailleurs vérifier cet ordre pour deux noms : Aristoxène, disciple d'Aristote, et Nicomaque, postérieur à Thrasylle, qui vivait sous Tibère.

Nicomaque est, d'autre part, antérieur à son commentateur Apulée de Madaure, contemporain de Ptolémée, et ce dernier (*Harmoniques*, Livre II) parle d'une division du tétrachorde due au néo-pythagoricien Didyme. Quant à Phèdre, il est inconnu. Si dans ces conditions on admet que l'ordre chronologique a été rigoureusement suivi et si l'on tient compte de la longue vie de Diophante, on peut le considérer (ainsi que Didyme) comme contemporain de Ptolémée et placer son âge mûr ou sa vieillesse sous Antonin le Pieux (138-161 après J.-C.), conformément à l'assertion de Bombelli.

Cette détermination aurait un grand poids si Bacchius le Vieux était un auteur suffisamment rapproché de ceux qu'il cite pour connaître exactement leurs âges respectifs. Malheureusement, l'époque à laquelle il vivait lui-même est très-incertaine. On conjecture d'ordinaire le règne de Constantin le Grand; mais cette opinion me parait difficile à confirmer, et je suis beaucoup plus

(1) Léophante est un nom grec connu, mais s'écrit Λεωφάντος; la confusion entre Λεω et Λεό est beaucoup moins probable que celle entre Διό et Λεό.

ncliné à considérer l'épigramme rapportée par Meibomius, et où Bacchius le Vieux se trouve associé à un certain Dionysios, comme parlant de Constantin Porphyrogénète (dix siècles après J.-C.).

D'autre part, de graves doutes peuvent être élevés contre la dé-ermination précédente. Il faut remarquer que la définition du hythme donnée par Diophante se rapproche beaucoup de celle de Nicomaque et semble en être le développement, tandis que les rois autres sont sensiblement différentes, soit entre elles, soit par apport à ces deux-là ([1]).

Si l'on peut en tous cas inférer que Diophante est postérieur à Nicomaque, ce que nous retiendrons, il est très-possible que leurs leux définitions aient été rapprochées l'une de l'autre au mépris le l'ordre chronologique.

D'autre part, l'époque de Didyme doit être fixée autrement que nous ne l'avons fait. Il s'agit sans doute du grammairien et musi-ien, fils d'Héraclide Pontique, et que Suidas fait vivre sous Néron, ssertion vérifiée d'ailleurs ([2]). Si donc on voulait maintenir l'ordre hronologique, il faudrait rejeter Diophante au temps de Claude et Nicomaque au temps de Caligula, ce qui, au reste, est possible à a rigueur en ce qui concerne ce dernier auteur ([3]).

Dans l'incertitude où l'on se trouve en fin de compte, et eu égard à la fragilité de toutes les hypothèses que l'on peut faire, on loit accueillir sur le même pied que les autres tout nouvel élément le discussion, si mince qu'il puisse paraître. Nous laisserons au ecteur à apprécier la valeur de celui que nous allons introduire.

De tous les problèmes que traite Diophante, il n'en est qu'un

---

([1]) Nous nous contenterons de rapporter celles de Nicomaque et de Diophante : κατὰ δὲ Νικόμαχον, χρόνων εὔτακτος σύνθεσις· κατὰ δὲ Διόφαντον, χρόνων σύνθεσις κατὰ ἀναλογίαν τε καὶ συμμετρίαν πρὸς ἑαυτούς (Suivant Nicomaque, une composition régulière des temps; suivant Diophante, une composition des temps par proportion et commune mesure entre eux).

([2]) Il ne faut pas confondre, comme l'a fait M. Hœfer (*Hist. des Math.*, p. 281), ce Didyme avec Didyme Chalcenterus, maître du grammairien Héraclide Pontique, et qui ne paraît nullement s'être occupé de Musique. J'ignore, au reste, par quelle autre méprise M. Hœfer fait vivre au VIe ou VIIe siècle après J.-C. ce Chalcenterus, dont l'âge (au commencement de l'ère chrétienne) est bien connu.

([3]) La tendance ordinaire à le placer plus bas vient de ce qu'on l'a longtemps confondu avec un autre néo-pythagoricien du même nom, qui avait écrit une *Vie d'Apollonius de Tyane*.

seul (V, 33) dont l'énoncé renferme des nombres concrets. Cet énoncé est en vers, sous la forme d'une épigramme, que Bachet soupçonne, peut-être à bon droit, composée par notre auteur lui-même. En tout cas, il y est parlé d'un maître de maison qui mélange, pour la boisson de ses serviteurs, du vin à 5 drachmes et du vin à 8 drachmes le conge.

Si l'on admet que la nécessité de la forme versifiée n'a pas obligé à poser des prix tout à fait arbitraires (ce qui est au moins aussi improbable pour des vers grecs que ce le serait pour des vers français), il est d'ailleurs facile de se rendre compte que ces prix n'ont pas été choisis en vue de la solution; on doit donc supposer qu'ils sont réels. Or ce sont évidemment, pour des vins de basse qualité, des prix de famine.

Le conge valait 6 *sextarii;* la drachme égyptienne, à son poids le plus bas, était le sixième du denier d'argent romain; or, dans le célèbre édit du maximum de Dioclétien, on trouve une échelle des prix du *sextarius* en deniers de bronze (valant le centième du denier d'argent). On peut transformer comme suit cette échelle en conges et drachmes:

		Prix du conge en drachmes.	Prix du litre en monnaies françaises (d'après M. Waddington).
		dr	fr
Piquette		2,88	0,94
Vin de garde	2e qualité	5,76	1,87
	1re qualité	7,20	2,34
Vin de choix	2e qualité	8,64	2,81
	1re qualité	10,80	3,51

On voit comment les prix de Diophante, 5 et 8 drachmes le conge, se rapportent à cette échelle; quant à la quantité d'eau que son maître de maison devait sans doute surajouter plus tard, il n'a pas pensé à la faire connaître à la postérité.

Pour se rendre compte combien ces prix étaient exagérés, par rapport à ceux des époques antérieures, il suffit de savoir qu'au temps de Néron, par exemple, d'après les renseignements fournis par Columelle, le vin de plus basse qualité ne coûtait que $0^{dr},47$ le conge, ce qui, même en comptant la drachme au poids du temps de Tibère, pour le quart du denier d'argent au lieu du sixième, fait huit fois moins.

Les diverses données que l'on possède pour le prix de cette denrée sous l'Empire romain montrent d'ailleurs que la cherté ne commença à s'accuser qu'après les Antonins; ce n'est guère que vers le milieu du IIIe siècle, à l'époque dite des Trente Tyrans, que l'on peut supposer que les cours s'élevèrent au taux indiqué. L'Égypte ne produisant pas de vin, la gêne apportée par les guerres civiles aux relations commerciales dut d'ailleurs s'y faire sentir immédiatement. La prolongation de ces guerres, la misère qui en résulta mirent à nu les vices du système social de l'antiquité romaine et étendirent à tout l'empire la crise que Dioclétien essaya de conjurer.

Si cette conjecture est exacte et s'il en est de même de la détermination relative au Métrodore auteur de l'épigramme sur Diophante, ce dernier doit être placé sans conteste vers la seconde moitié du IIIe siècle; il redevient ainsi contemporain de Pappus et antérieur d'un siècle environ à Théon d'Alexandrie et à Hypatia.

Le IIIe siècle avait au reste déjà été proposé pour Diophante; il est admis, par exemple, par d'Alembert dans l'*Encyclopédie;* mais je n'ai pu trouver trace d'arguments historiques déjà développés à l'appui de cette assertion.

EXTRAIT D'UNE LETTRE A M. HERMITE;

PAR M. G. MITTAG-LEFFLER.

Voici les théorèmes que j'ai démontrés dans mon premier Mémoire en allemand, *Arithmetische Darstellung eindeutiger analytischer Functionen einer Veränderlichen,* qui est maintenant dans les mains de M. Weierstrass.

THÉORÈME I. — *Si une suite infinie de quantités données* x_1, x_2, x_3, ..., x_ν, ... *satisfait à la condition*

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \infty,$$

et que m_1, m_2, m_3, ..., m_ν, ... *soient des nombres donnés en-*

tiers et positifs, on peut alors, dans l'expression

$$(A) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (x - x_\nu)^{-m_\nu} G_{m_\nu - 1}(x - x_\nu) \left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\mu_\nu} \cdots,$$

déterminer, de plusieurs manières, les nombres entiers non négatifs $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_\nu, \ldots$ *et les expressions entières et rationnelles* $G_{m_1-1}, G_{m_2-1}, G_{m_3-1}, \ldots, G_{m_\nu-1}, \ldots$ *des degrés respectifs* $m_1 - 1$, $m_2 - 1$, $m_3 - 1$, $\ldots$, $m_\nu - 1$, $\ldots$, *de telle sorte que l'expression* (A) *devienne une fonction analytique de la variable* x, *jouissant des propriétés générales suivantes :*

La fonction sera uniforme; elle n'aura que le seul point singulier essentiel $x = \frac{1}{0}$, *et que les points singuliers non essentiels* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$, *et, pour des valeurs données arbitrairement de*

$$\begin{array}{lllll}
c_{1,-m_1}, & c_{1,-(m_1-1)}, & c_{1,-(m_1-2)}, & \ldots, & c_{1,-1},\\
c_{2,-m_2}, & c_{2,-(m_2-1)}, & c_{2,-(m_2-2)}, & \ldots, & c_{2,-1},\\
c_{3,-m_3}, & c_{3,-(m_3-1)}, & c_{3,-(m_3-2)}, & \ldots, & c_{3,-1},\\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots,\\
c_{\nu,-m_\nu}, & c_{\nu,-(m_\nu-1)}, & c_{\nu,-(m_\nu-2)}, & \ldots, & c_{\nu,-1},\\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots & \ldots
\end{array}$$

et des valeurs suffisamment petites de $|x - x_\nu|$, *elle sera développable sous la forme*

$$c_{\nu,-m_\nu}(x - x_\nu)^{-m_\nu} + c_{\nu,-(m_\nu-1)}(x - x_\nu)^{-(m_\nu-1)} + \ldots$$
$$+ c_{\nu,-1}(x - x_\nu)^{-1} + \mathfrak{P}(x - x_\nu) \;(^1).$$

Si l'on ajoute à (A) *une fonction entière* (²) *quelconque de la variable* x, *on obtient ainsi la représentation de toutes les fonctions, qui jouissent des propriétés énoncées ci-dessus.*

Théorème II. — *Si une suite infinie de grandeurs données* x_1,

---

(¹) Pour la signification de $\mathfrak{P}(x - x_\nu)$ voir Weierstrass, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen*, p. 26, la note.

(²) Pour la signification du terme *fonction entière*, voir Weierstrass, *Zur Theorie*, etc., p. 17.

$x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$ *est telle que l'on ait*

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \infty,$$

et que $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\nu, \ldots; n_1, n_2, n_3, \ldots, n_\nu, \ldots$ *soient des nombres entiers non négatifs donnés, alors, dans l'expression*

$$(\mathrm{B}) \qquad \Pi(x) \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (x - x_\nu)^{-(m_\nu+n_\nu+1)} G_{m_\nu+n_\nu}(x - x_\nu) \left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\mu_\nu},$$

on pourra de plusieurs manières déterminer la fonction entière $\Pi(x)$, *les nombres entiers non négatifs* $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_\nu, \ldots$ *et les expressions rationnelles et entières* $G_{m_1+n_1}, G_{m_2+n_2}, G_{m_3+n_3}, \ldots, G_{m_\nu+n_\nu}, \ldots$ *des degrés respectifs* $m_1+n_1, m_2+n_2, m_3+n_3, \ldots, m_\nu+n_\nu, \ldots$, *de telle sorte que l'expression* (B) *devienne une fonction analytique de la variable* x, *jouissant des propriétés générales suivantes :*

La fonction sera uniforme, elle aura le seul point singulier essentiel $x = \frac{1}{0}$, *et, pour les seuls points donnés* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$, *elle aura des points singuliers non essentiels, et enfin, pour des valeurs choisies arbitrairement des quantités*

$$\begin{array}{llllllll}
c_{1,-m_1}, & c_{1,-(m_1-1)}, & c_{1,-(m_1-2)}, & \ldots, & c_{1,-1}, & c_{10}, & c_{11}, & \ldots, & c_{1n_1}, \\
c_{2,-m_2}, & c_{2,-(m_2-1)}, & c_{2,-(m_2-2)}, & \ldots, & c_{2,-1}, & c_{20}, & c_{21}, & \ldots, & c_{2n_2}, \\
c_{3,-m_3}, & c_{3,-(m_3-1)}, & c_{3,-(m_3-2)}, & \ldots, & c_{3,-1}, & c_{30}, & c_{31}, & \ldots, & c_{3n_3}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
c_{\nu,-m_\nu}, & c_{\nu,-(m_\nu-1)}, & c_{\nu,-(m_\nu-2)}, & \ldots, & c_{\nu,-1}, & c_{\nu0}, & c_{\nu1}, & \ldots, & c_{\nu n_\nu}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

et pour des valeurs assez petites de $|x - x_\nu|$, *elle sera développable sous la forme*

$$c_{\nu,-m_\nu}(x - x_\nu)^{-m_\nu} + c_{\nu,-(m_\nu-1)}(x - x_\nu)^{-(m_\nu-1)} + \ldots + c_{\nu,-1}(x - x_\nu)^{-1}$$
$$+ c_{\nu0} + c_{\nu1}(x - x_\nu) + \ldots + c_{\nu n_\nu}(x - x_\nu)^{n_\nu} + (x - x_\nu)^{n_\nu+1} \mathfrak{P}(x - x_\nu).$$

Si à (B) *on ajoute encore*

$$\Pi(x)\,\overline{G}(x)$$

où $\overline{G}(x)$ *désigne une fonction entière quelconque de la variable* x,

on obtient ainsi la représentation de toutes les fonctions qui possèdent les propriétés en question.

La fonction $\Pi(x)$ est déterminée par l'équation suivante :

$$\text{(C)} \qquad \Pi(x) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\left(1 - \frac{x}{x_\nu}\right) e^{\frac{x}{x_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda_\nu}\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\lambda_\nu}} \right]^{n_\nu+1}.$$

Par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$, j'entends ici des nombres entiers non négatifs, soumis à la seule condition que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{n_\nu + 1}{x_\nu} \left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\lambda_\nu}$$

représente une suite convergente pour toute valeur de x.

La formule (A) contient aussi le cas où une des quantités x_1, $x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$, par exemple x_1, est nulle, pourvu que l'on remplace $\frac{x}{x_1}$ par 1. La formule (B) contient aussi ce cas où l'on pose x égal à

$$\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) e^{\frac{x}{x_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\lambda_1}}$$

et où l'on remplace, de plus, $\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\mu_1}$ par l'unité.

Théorème III. — *Si une suite infinie des quantités données x_1, $x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$ est telle que*

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \infty,$$

et si $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_\nu, \ldots$ sont des nombres donnés entiers et non négatifs, on peut de diverses manières représenter arithmétiquement une fonction de la variable x, jouissant des propriétés générales suivantes :

La fonction sera une fonction uniforme et entière, pour laquelle les valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$ comprennent tous les zéros de la fonction, et pour laquelle étant données arbitrairement

les quantités

$$\begin{array}{lllll} c_{1p_1}, & c_{1p_1+1}, & c_{1p_1+2}, & \ldots, & c_{1p_1+n_1}, \\ c_{2p_2}, & c_{2p_2+1}, & c_{2p_2+2}, & \ldots, & c_{2p_2+n_2}, \\ c_{3p_3}, & c_{3p_3+1}, & c_{3p_3+2}, & \ldots, & c_{3p_3+n_3}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ c_{\nu p_\nu}, & c_{\nu p_\nu+1}, & c_{\nu p_\nu+2}, & \ldots, & c_{\nu p_\nu+n_\nu}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

parmi lesquelles aucune des suivantes $c_{1p_1}, c_{2p_2}, c_{3p_3}, \ldots, c_{\nu p_\nu}, \ldots,$ *ne doit avoir pour valeur zéro, le développement a lieu, dans le voisinage de toute valeur donnée* x_ν, *sous la forme*

$$c_{\nu p_\nu}(x - x_\nu)^{p_\nu} + c_{\nu p_\nu+1}(x - x_\nu)^{p_\nu+1} + \ldots + c_{\nu p_\nu+n_\nu}(x - x_\nu)^{p_\nu+n_\nu}$$
$$+ (x - x_\nu)^{p_\nu+n_\nu+1}\, \mathfrak{P}(x - x_\nu).$$

On peut aussi former une série, procédant suivant les puissances entières et positives de x *et constamment convergente, qui comprend toutes les fonctions jouissant des propriétés ci-dessus énoncées.*

Ce qu'il y a de nouveau dans le problème contenu dans ce théorème est ainsi de former une fonction qui n'ait pas d'autres zéros que les zéros donnés ci-dessus. Sans cette condition, le problème serait déjà résolu par mon théorème II.

Théorème IV. — *Étant donnée une suite infinie de quantités* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots,$ *telles que l'on ait*

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \infty,$$

et $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\nu, \ldots$ *étant des nombres donnés entiers et non négatifs satisfaisant à la condition que, pour chaque valeur du nombre entier et positif* ν, *l'un au moins des nombres* p_ν, q_ν *soit toujours égal à zéro, et enfin* $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_\nu, \ldots$ *étant des nombres entiers et non négatifs donnés arbitrairement, on peut de diverses manières déterminer deux fonctions entières, de manière que ces deux fonctions ne deviennent jamais nulles à la fois, et que leur quotient soit une fonction de la variable* x, *jouissant des propriétés générales suivantes :*

La fonction est une fonction uniforme, ne présentant que le seul point singulier essentiel $x = \frac{1}{0}$, *pour laquelle, de plus, les valeurs données* $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu, \ldots$ *comprennent tous les points singuliers non essentiels, ou tous les zéros, ou encore tous les points singuliers non essentiels en même temps que tous les zéros; et pour laquelle enfin, pour des quantités données arbitrairement*

$$\begin{array}{lllll}
c_{1p_1}, & c_{1p_1+1}, & c_{1p_1+2}, & \ldots, & c_{1p_1+n_1}, \\
c'_{1q_1}, & c'_{1q_1+1}, & c'_{1q_1+2}, & \ldots, & c'_{1q_1+n_1}, \\
c_{2p_2}, & c_{2p_2+1}, & c_{2p_2+2}, & \ldots, & c_{2p_2+n_2}, \\
c'_{2q^2}, & c'_{2q^2+1}, & c'_{2q_2+2}, & \ldots, & c'_{2q_2+n_2}, \\
c_{3p_3}, & c_{3p_3+1}, & c_{3p_8+2}, & \ldots, & c_{3p_3+n_3}, \\
c'_{3q_3}, & c'_{3q_3+1}, & c'_{3q_3+2}, & \ldots, & c'_{3q_3+n_3}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
c_{\nu p_\nu}, & c_{\nu p_\nu+1}, & c_{\nu p_\nu+2}, & \ldots, & c_{\nu p_\nu+n_\nu}, \\
c'_{\nu q_\nu}, & c'_{\nu q_\nu+1}, & c'_{\nu q_\nu+2}, & \ldots, & c'_{\nu q_\nu+n_\nu}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

parmi lesquelles aucune des premières

$$\begin{array}{ll}
c_{1p_1}, & c'_{1q_1}, \\
c_{2p_2}, & c'_{2q_2}, \\
\ldots & \ldots \\
c_{\nu p_\nu}, & c'_{\nu q_\nu}, \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

ne doit avoir la valeur zéro, et pour des valeurs suffisamment petites de $|x - x_\nu|$, *le développement*

$$\frac{c_{\nu p_\nu}(x - x_\nu)^{p_\nu} + c_{\nu p_\nu+1}(x - x_\nu)^{p_\nu+1} + \ldots + c_{\nu p_\nu+n_\nu}(x - x_\nu)^{p_\nu+n_\nu} + (x - x_\nu)^{p_\nu+n_\nu+1}\mathfrak{P}(}{c'_{\nu q_\nu}(x - x_\nu)^{q_\nu} + c_{\nu q_\nu+1}(x - x_\nu)^{q_\nu+1} + \ldots + c'_{\nu q_\nu+n_\nu}(x - x_\nu)^{q_\nu+n_\nu} + (x - x_\nu)^{q_\nu+n_\nu+1}\mathfrak{P}(}$$

est possible.

On peut aussi former une expression qui se présente comme le quotient de deux séries procédant suivant les puissances entières et positives de x, *constamment convergentes et ne s'annulant jamais toutes les deux à la fois, et qui comprend toutes les fonctions jouissant des propriétés énoncées plus haut.*

Je travaille en ce moment à un nouveau Mémoire en langue allemande, qui va contenir d'autres théorèmes dans le même genre que mes quatre théorèmes précédents, et où je veux donner une représentation arithmétique générale de fonctions uniformes, qui aient une infinité multiple de points singuliers essentiels.

Dans ces derniers temps, en m'appuyant sur votre travail : *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, que vous avez eu la bonté de m'envoyer, je me suis occupé d'une autre application des remarquables théorèmes que M. Weierstrass a fait connaître dans son célèbre Mémoire *Sur la théorie des fonctions analytiques uniformes*.

Je cherche la condition à laquelle doivent être assujetties les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., $f_n(x)$, ..., pour que chaque intégrale de l'équation différentielle

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + f_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + f_n(x)y,$$

soit une fonction uniforme de la variable x qui n'ait pas d'autre point singulier essentiel que $x = \frac{1}{0}$.

Depuis que j'ai obtenu cette condition, je puis, toutes les fois qu'elle est remplie, former, pour l'équation différentielle (D), un système fondamental d'intégrales particulières, chaque intégrale étant le quotient de deux séries de puissances entières et positives de la variable x, et qui convergent pour une valeur quelconque de cette variable.

Je prends la liberté de vous envoyer un opuscule en langue suédoise ([1]) qui contient une généralisation de la formule d'interpolation que vous avez communiquée à M. Borchardt dans une Lettre du 5 juillet 1877.

J'admets que, dans le théorème I, les points singuliers non essentiels x_1, x_2, x_3, ..., x_ν, ... (parmi lesquels le point $x = 0$, s'il est une singularité non essentielle, ne doit cependant être compté),

---

([1]) *En ny serientveckling för funktioner af rationel karakter* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XI).

les nombres entiers $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\nu, \ldots$ et les constantes

$$\begin{array}{l}
c_{1,-m_1},\ c_{1,-(m_1-1)},\ c_{1,-(m_1-2)},\ \ldots,\ c_{1,-1},\\
c_{2,-m_2},\ c_{2,-(m_2-1)},\ c_{2,-(m_2-2)},\ \ldots,\ c_{2,-1},\\
c_{3,-m_3},\ c_{3,-(m\ -1)},\ c_{3,-(m_3-2)},\ \ldots,\ c_{3,-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
c_{\nu,-m_\nu},\ c_{\nu,-(m_\nu-1)},\ c_{\nu,-(m_\nu-2)},\ \ldots,\ c_{\nu,-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

appartiennent à une fonction uniforme connue $F(x)$, qui n'a aucun point singulier essentiel autre que $x = \frac{1}{0}$.

J'obtiens alors

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{array}{l}
F(x) = \overline{G}(x) + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (x - x_\nu)^{-m_\nu}\, G_{m_\nu-1}(x - x_\nu)\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^\mu\\
\qquad + \displaystyle\int^{S} \frac{F(z)}{z - x}\left(\frac{x}{z}\right)^\mu dz.
\end{array}\right.$$

Par μ, je désigne un nombre entier positif. On suppose l'intégration effectuée le long d'une ligne fermée S, formant la limite d'une aire simplement connexe, à l'intérieur de laquelle sont situés x_1, $x_2, x_3, \ldots, x_n$, et extérieurement à laquelle sont situés x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots$.

Le point x est supposé ne coïncider avec aucun des points x_1, $x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$.

En outre, on a

$$\begin{array}{l}
\overline{G}(x) = c_{0,-m_0}x^{-m_0} + c_{0,-(m_0-1)}x^{-(m_0-1)} + \ldots + c_{0,-1}x^{-1}\\
\qquad + c_{00} + c_{01}x + c_{02}x^2 + \ldots + c_{0\mu-1}x^{\mu-1},
\end{array}$$

où les coefficients

$$c_{0,-m_0},\ c_{0,-(m_0-1)},\ \ldots,\ c_{0,-1},\ c_{00},\ c_{01},\ c_{02},\ \ldots,\ c_{0\mu-1}$$

sont définis par l'égalité

$$\begin{array}{l}
F(x) = c_{0,-m_0}x^{-m_0} + c_{0,-(m_0-1)}x^{-(m_0-1)} + \ldots + c_{0,-1}x^{-1}\\
\qquad + c_{00} + c_{01}x + c_{02}x^2 + \ldots + c_{0\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots.
\end{array}$$

J'imagine maintenant que les dimensions de la ligne S croissent

suivant une loi telle que chaque S embrasse le S précédent et que, de plus pour chaque point singulier de $F(x)$, situé à distance finie, il se trouve toujours une ligne S correspondante, qui entoure ce point. Si alors la fonction $F(x)$ est de telle nature qu'à cette fonction correspondent un nombre entier μ et une ligne S telle que l'on ait

$$\lim_{S=\infty} \int^{S} \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{\mu} dz = 0,$$

on conclura alors de (E)

$$\text{(F)} \qquad F(x) = \overline{G}(x) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (x-x_\nu)^{-m_\nu} G_{m_\nu - 1}(x-x_\nu)\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\mu}.$$

Je suppose maintenant, de plus, que, dans le théorème II, les points singuliers non essentiels $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$, les nombres entiers $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\nu, \ldots, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_\nu, \ldots$, et les constantes

$$\begin{array}{llllllllll}
c_{1,-m_1}, & c_{1,-(m_1-1)}, & c_{1,-(m_1-2)}, & \ldots, & c_{1,-1}, & c_{10}, & c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n_1}, \\
c_{2,-m_2}, & c_{2,-(m_2-1)}, & c_{2,-(m_2-2)}, & \ldots, & c_{2,-1}, & c_{20}, & c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2n_2}, \\
c_{3,-m_3}, & c_{3,-(m_3-1)}, & c_{3,-(m_3-2)}, & \ldots, & c_{3,-1}, & c_{30}, & c_{31}, & c_{32}, & \ldots, & c_{3n_3}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
c_{\nu,-m_\nu}, & c_{\nu,-(m_\nu-1)}, & c_{\nu,-(m_\nu-2)}, & \ldots, & c_{\nu,-1}, & c_{\nu 0}, & c_{\nu 1}, & c_{\nu 2}, & \ldots, & c_{\nu n_\nu}, \\
\ldots & & & & & & & & &
\end{array}$$

appartiennent à la fonction connue $F(x)$. Je trouve alors

$$\text{(G)} \quad \left\{\begin{aligned} F(x) = \Pi(x)\overline{G}(x) + \Pi(x)\sum_{\nu=1}^{\nu=n}(x-x_\nu)^{-(m_\nu-n_\nu+1)} G_{m_\nu+n_\nu}(x-x_\nu)\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{\mu} \\ + \int^{S}\frac{F(z)}{z-x}\,\frac{\Pi(x)}{\Pi(z)}\left(\frac{x}{z}\right)^{\mu} dz. \end{aligned}\right.$$

La fonction $\Pi(x)$ est définie par la formule (C). Par $\overline{G}(x)$ je désigne la fonction

$$\begin{aligned} \overline{G}(x) = k_{0,-m_0}x^{-m_0} + k_{0,-(m_0-1)}x^{-(m_0-1)} + \ldots + k_{0,-1}x^{-1} \\ + k_{00} + k_{01}x + k_{02}x^2 + \ldots + k_{0\mu-1}x^{\mu-1}, \end{aligned}$$

où les coefficients

$$k_{0,-m_0},\ k_{0,-(m_0-1)},\ \ldots,\ k_{0,-1},\ k_{00},\ k_{01},\ k_{02},\ \ldots,\ k_{0\mu-1}$$

sont définis par l'équation

$$\frac{F(x)}{\Pi(x)} = k_{0,-m_0}x^{-m_0} + k_{0,-(m_0-1)}x^{-(m_0-1)} + \ldots + k_{0,-1}x^{-1}$$
$$+ k_{00} + k_{01}x + k_{02}x^2 + \ldots + k_{0\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots.$$

Si maintenant la fonction $F(x)$ est de telle nature qu'à cette fonction correspondent un nombre entier μ, une fonction $\Pi(x)$ et une ligne S, de sorte qu'on ait

$$\lim_{S=\infty} \int^S \frac{F(z)}{z-x} \frac{\Pi(x)}{\Pi(z)} \left(\frac{x}{z}\right)^\mu dz = 0$$

on conclut alors de (G)

$$\text{(H)}\quad F(x) = \Pi(x)\overline{G}(x) + \Pi(x)\sum_{\nu=1}^{\nu=\lambda}(x-x_\nu)^{-(m_\nu+n_\nu+1)}G_{m_\nu+n_\nu}(x-x_\nu)\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^\mu.$$

FONDEMENTS D'UNE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE CARTÉSIENNE (1872) ET ÉLÉMENTS D'UNE THÉORIE DES FAISCEAUX (1878) [1];

Par M. F. FOLIE.

Analyse faite par l'auteur.

Dans ces deux Ouvrages, nous sommes parvenu à étendre aux courbes planes et aux surfaces supérieures la plupart des théorèmes fondamentaux, qui n'étaient connus jusqu'alors que pour les coniques.

§ I. — Des courbes planes.

Dans les courbes planes, ces théorèmes sont *généralement* applicables jusqu'au cinquième degré ; dans les surfaces, jusqu'au troisième seulement. Ils n'existent, au delà de ces degrés, que pour des courbes et des surfaces particulières.

---

[1] Liège, A. Decq, libraire. Paris, Gauthier-Villars.

En outre, dans la théorie même des coniques, nous avons découvert une couple de propriétés nouvelles, de même que dans celle des polygones conjugués entre eux.

Nous nous bornerons, dans les lignes qui suivent, à donner les énoncés de ces théorèmes fondamentaux, en renvoyant, pour les définitions comme pour les démonstrations, aux deux Ouvrages mentionnés ci-dessus.

En ce qui concerne les courbes planes, nous prendrons pour exemple le troisième degré, en faisant remarquer que nos théorèmes généraux s'étendent jusqu'au cinquième.

Courbes du troisième ordre.

Si deux trilatères a, b, c et a', b', c' sont conjugués à une courbe du troisième ordre :

1°, I. Le rapport anharmonique du faisceau que l'on obtient, en joignant un point quelconque de la courbe aux sommets ab', bc', ca', $a'b$, $b'c$, $c'a$ de ces trilatères, est constant, quel que soit ce point; c'est-à-dire que, si l'on désigne par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six rayons de ce faisceau, par $(1,2)$, ... le sinus de l'angle compris entre les rayons 1 et 2, ..., on aura

$$(1,2,3,4,5,6) = \frac{(1,2).(3,4).(5,6)}{(6,1).(2,3).(4,5)} = \text{const.}$$

2°, II. Les produits des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux ternes de côtés a, b, c et a', b', c' sont entre eux dans un rapport constant.

Courbes de la troisième classe.

Si deux trigones A, B, C et A′, B′, C′ sont conjugués à une courbe de la troisième classe :

1°, I. Le rapport anharmonique de la chaîne que l'on obtient, en coupant, par une tangente quelconque à la courbe, les côtés AB′, BC′, CA′, A′B, B′C, C′A de ces trigones, est constant, quelle que soit cette tangente; c'est-à-dire que, si l'on désigne par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six points de cette chaîne, par $|1, 2|$, ... la distance entre les points 1 et 2, ..., on aura

$$|1,2,3,4,5,6| = \frac{|1,2|.|3,4|.|5,6|}{|6,1|.|2,3|.|4,5|} = \text{const.}$$

2°, II. Les produits des distances d'une tangente quelconque à la courbe, aux deux ternes de sommets A, B, C et A′, B′, C′, sont entre eux dans un rapport constant.

3°, III. Une transversale rencontre ces deux ternes de côtés et la courbe en trois ternes de points en involution.

IV. Expressions analytiques de cette involution :

$$\sum_1^3 \lambda_1 (x - x'_1)(x - x''_1)(x - x'''_1) \equiv 0,$$

$$(1, 1', 2, 1'').(1, 2', 2, 2'') \times (1, 3', 2, 3'') = 1, \ldots,$$

$$(1, 1', 2, 1'', 3, 1''').(1, 2', 2, 2'' 3, 2''') \times (1, 3', 2, 3'', 3, 3''') = -1, \ldots.$$

V. Si deux quadrilatères a, b, c, d et a', b', c', d' sont conjugués à une courbe du troisième ordre, leurs côtés opposés a et a', b et b', c et c', d et d' se coupent en quatre points situés en ligne droite.

VI. Expression analytique de ce théorème :

$$a.b.c.d - k a'.b'.c'd' \equiv C_3.\Delta.$$

VII. Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de côtés opposés de deux quadrilatères conjugués à une courbe du troisième ordre, on obtient un hexagone inscrit à une conique.

D'où l'on conclut que, de l'identité qui précède, on peut déduire

3°, III. Les trois tangentes menées d'un point quelconque du plan à la courbe, et les deux ternes de droites menées de ce point aux sommets A, B, C et A', B', C' forment un faisceau en involution.

IV. Comme ci-contre.

V. Si deux tétragones A, B, C, D et A', B', C', D' sont conjugués à une courbe de la troisième classe, les droites qui unissent leurs sommets opposés A et A', B et B', C et C', D et D' concourent en un même point.

VI. Comme ci-contre.

VII. Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de sommets opposés de deux tétragones conjugués à une courbe de la troisième classe, on obtient un hexagone circonscrit à une conique.

es suivantes :

$$a.b.c - k'\ a'.b'.c' \equiv C'_2 . \Delta,$$
$$a.b.d - k''\ a'.b'.d' \equiv C''_2 . \Delta,$$
$$a.c.d - k'''\ a'.c'.d' \equiv C'''_2 . \Delta,$$
$$b.c.d - k^{\text{IV}}\ b'.c'.d' \equiv C^{\text{IV}}_2 . \Delta.$$

Comme ci-contre.

Nous pourrions énoncer encore d'autres théorèmes nouveaux, elatifs aux polygones conjugués entre eux; mais, comme ils sont noins généraux, par le fait même qu'il n'y est plus question de ourbes, nous nous bornerons, pour ceux-ci, à renvoyer le lecteur nos *Éléments d'une théorie des faisceaux*.

Il en est deux autres sur lesquels nous appellerons encore son ttention, parce qu'ils sont neufs, même dans cette théorie, tant ultivée, des coniques.

Le premier de ceux-ci offre de l'analogie, en coordonnées ponc-uelles, avec le corrélatif de celui de Carnot, en coordonnées tan-entielles, avec le théorème même de ce géomètre, ce qui permet le combiner nos théorèmes avec ces derniers.

Le second introduit une notion toute nouvelle, que, à cause de son xpression analytique, fort semblable à celle de l'involution, nous vons appelée *évolution*, et dont voici la définition :

Trois couples de points en ligne droite, 1 et 1′, 2 et 2′, 3 et 3′, ont en *évolution*, lorsqu'il existe entre leurs distances mutuelles a relation

$$1,2'.2,3'.3,1' = 1',2.2',3.3',1 \quad \text{ou} \quad |1,1',2,3'| = -|1',1,2',3|.$$

Nous énoncerons ces deux théorèmes, en coordonnées ponctuelles eulement, pour le second et le troisième ordre. Le premier est mmédiatement généralisable, et leurs corrélatifs (en coordonnées angentielles) sont très-aisés à exprimer.

VIII. Si une conique est con-uguée à deux bilatères a, b et a', b', et qu'on joigne les sommets le ceux-ci à un point quelconque le la courbe, le rapport du pro-luit des sinus des angles, comp-

Si une courbe du troisième ordre est conjuguée à deux tri-latères a, b, c et a', b', c', et qu'on joigne les sommets de ceux-ci à un point quelconque de la courbe, le rapport du produit

tés, dans le premier bilatère, depuis les côtés de celui-ci jusqu'aux rayons aboutissant à leurs extrémités, à celui des sinus des angles, comptés de même dans le second, est constant, quel que soit ce point.

IX. Si, par trois points pris sur une conique, on lui inscrit et circonscrit un triangle, une transversale quelconque coupe les côtés opposés de ces deux triangles en trois couples de points en *évolution*.

des sinus des angles, comptés, dans le premier trilatère, depuis les côtés de celui-ci jusqu'aux rayons aboutissant à leurs extrémités, à celui des sinus des angles, comptés de même dans le second, est constant, quel que soit ce point.

Si un quadrilatère est complétement inscrit à une courbe du troisième ordre, et qu'on mène en trois de ses sommets, des tangentes à la courbe, les côtés des deux triangles, déterminés par ces sommets et par ces tangentes, sont coupés par une transversale en trois couples de points en *évolution*.

Outre ces théorèmes, j'énonce également un principe qui me semble tout à fait capital. La découverte de ce principe est une conséquence de celle du rapport anharmonique du $n^{\text{ième}}$ ordre. Je l'ai nommé *principe de la théorie des faisceaux* (¹). Le voici, borné également au cas du troisième ordre seulement :

Principe. — *Si l'on a trois courbes variables en vertu des paramètres* α, β, γ,

$$\varphi(x,y,\alpha,\beta,\gamma)=0,\quad \chi(x,y,\alpha,\beta,\gamma)=0,\quad \psi(x,y,\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

et qu'il existe entre ces paramètres une relation $f(\alpha,\beta,\gamma)=0$ [*ou bien si l'on a trois courbes variables en vertu des paramètres* α *et* β : $\varphi(x,y,\alpha,\beta)=0$, $\chi=0$, $\psi=0$], *l'équation* $F(x,y)=0$,

(¹) Je crois neuf ce principe, auquel mon collègue M. Le Paige a collaboré avec moi. M. Em. Weyr, à Vienne, m'a déclaré ne pas le connaître. M. Klein, à Munich, m'a dit qu'il n'en connaissait qu'un cas particulier, celui de la recherche du jacobien; enfin, je ne l'ai vu énoncé dans aucun des Traités les plus modernes.

Si un géomètre croyait avoir des droits à la priorité de cette découverte, je serais heureux qu'il voulût bien me les signaler.

ésultant de l'élimination des paramètres variables, représente ne courbe passant par les points triples *d'intersection des ourbes* φ, χ, ψ.

Ce principe est évidemment susceptible de la plus complète gé-éralisation dans le plan et dans l'espace.

Application. — *Chercher le lieu des points triples des rayons omologues de trois faisceaux homographiques.*

Prenons les centres de ces trois faisceaux pour sommets d'un riangle $\alpha.\beta.\gamma = 0$. Les équations des rayons de chacun de ces aisceaux seront

1 $$\alpha + \lambda\beta = 0,$$

2 $$\beta + \mu\gamma = 0,$$

3) $$\gamma + \nu\alpha = 0.$$

t la condition d'homographie s'écrira

4) $$a_{12}\lambda\mu + a_{23}\mu\nu + a_{31}\nu\lambda + a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu + 1 = 0.$$

Éliminant λ, μ, ν entre les équations (1), (2), (3) et (4), on a celle u lieu cherché :

$$a_{12}\alpha^2\beta + a_{23}\beta^2\gamma + a_{31}\gamma^2\alpha - a_1\alpha^2\gamma - a_2\beta^2\alpha - a_3\gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma = 0.$$

Ce lieu est une courbe générale du troisième ordre passant par les entres des trois faisceaux.

§ II. — Des surfaces.

Si nous ne sommes pas arrivé à étendre tous les théorèmes qui précèdent aux surfaces du second et du troisième degré (les seules uxquelles quelques-uns d'entre eux soient généralement appli-ables), nous avons du moins, ici encore, tracé la voie, et démontré que le fameux théorème de Pascal avait été trouvé, dès 1826, de nême que celui de Brianchon, pour les surfaces du second degré, par notre compatriote Dandelin, quoiqu'il eût lui-même mis la question au concours à l'Académie de Bruxelles. On le verra par

l'analogue que nous donnerons de chacun de ces théorèmes pour le troisième degré.

Nous nous bornerons, dans le second degré, à l'énoncé de nos théorèmes; nous entrerons dans un peu plus de détails relativement aux surfaces de la troisième classe, dont nous avons le premier fait connaître les vingt-sept droites et les propriétés capitales, que nous énoncerons en regard de celles des surfaces du troisième ordre.

Comme beaucoup de ces dernières ont été découvertes par Salmon, Cayley, Steiner, Cremona, Sturm, etc., nous ferons remarquer au lecteur que nous avons guillemeté celles que nous leur empruntons, et numéroté celles qui nous sont dues, en conservant les numéros mêmes des énoncés précédents auxquelles elles correspondent; dans la troisième classe, au contraire, tout peut-être nous appartient (¹).

Surfaces du second degré.

Si deux dièdres a, b et a', b' sont conjugués à une surface du second degré :

1°, I. ? (²)

2°, II. Les produits des distances d'un point quelconque de la surface aux deux couples de faces a, b et a', b' sont entre eux dans un rapport constant, quel que soit ce point.

3°, III. Une transversale quelconque rencontre ces deux couples de faces, et la surface, en trois couples de points en involution.

Si deux digones A, B et A′, B′ sont conjugués à une surface du second degré :

1°, I. ? (²)

2°, II. Les produits des distances d'un plan tangent quelconque aux deux couples de sommets A, B et A′, B′ sont entre eux dans un rapport constant, quel que soit ce plan.

3°, III. Le couple de plans, menés par une droite tangentiellement à la surface, et les deux couples de plans, menés par cette droite et par les deux couples de

(¹) Mes théorèmes sur ces surfaces ont été présentés à l'Académie de Belgique le 3 décembre 1870.

(²) *Voir*, au sujet de ces énoncés, une Note que j'ai publiée, en collaboration avec M. Le Paige, dans le t. XLVIII des *Bulletins de l'Académie de Belgique*, p. 41 et suiv.

V. Si deux trièdres a, b, c et a', b', c' sont conjugués à une surface du second degré, leurs faces opposées a et a', b et b', c et c' se coupent suivant trois droites situées dans un même plan, ce qui s'exprime analytiquement par

VI. $a.b.c - ka'.b'.c' \equiv S_2.P.$

Surfaces du troisième ordre.

Si, entre les paramètres des trois faisceaux de plans $a = \alpha a'$, $b = \beta b'$, $c = \gamma c'$, il existe la relation $\alpha\beta\gamma = k$, l'équation

$$s_3 \equiv abc - ka'b'c' = 0$$

lu lieu des points d'intersection les faces homologues de ces trois aisceaux représente une surace générale du troisième ordre passant par les axes de ces faisceaux.

Les deux trièdres a, b, c; a', b', c' sont dits conjugués à s_3.

Chaque face de l'un passe par rois génératrices appartenant respectivement aux trois faces le l'autre.

De là neuf génératrices primiives, formant six systèmes de rois génératrices non situées leux à deux dans un même plan.

« Un hyperboloïde qui a trois génératrices d'un même mode communes avec S_3 en a trois de

sommets A, B et A′, B′ forment un faisceau en involution.

V. Si deux trigones A, B, C et A′, B′, C′ sont conjugués à une surface du second degré, les droites qui unissent les sommets opposés A et A′, B et B′, C et C′ concourent en un même point.

VI. Comme ci-contre.

Surfaces de la troisième classe.

Si, entre les paramètres des trois chaînes de points $A = \alpha A'$, $B = \beta B'$, $C = \gamma C'$, il existe la relation $\alpha\beta\gamma = k$, l'équation

$$S_3 \equiv A.B.C - kA'.B'.C' = 0$$

de l'enveloppe des plans, déterminés par les points homologues de ces trois chaînes, représente une surface générale de la troisième classe passant par les axes de ces chaînes.

Les deux trigones A, B, C, A′, B′, C′ sont dits conjugués à S_3.

Chaque sommet de l'un est le point de concours de trois génératrices passant respectivement par les trois sommets de l'autre.

De là neuf génératrices primitives, formant six systèmes de trois génératrices non concourantes deux à deux.

Comme ci-contre.

l'autre mode également communes. »

On en conclut que chacun des six hyperboloïdes, déterminés par l'un des six systèmes de génératrices primitives, coupe s_3 suivant trois génératrices distinctes des neuf primitives et distinctes entre elles, et, par suite, qu'il existe vingt-sept génératrices sur s_3.

« Chacune d'elles est dans un même plan avec cinq couples des autres, et forme, avec ces couples, cinq triangles tritangents, ce qui détermine quarante-cinq de ces triangles.

» Si deux triangles tritangents n'ont aucun côté commun, leurs côtés se coupent deux à deux. » (Steiner, Cremona, Sturm, etc.)

Deux triangles tritangents suffisent donc pour déterminer un système de trièdres conjugués.

Deux systèmes de trièdres conjugués ayant deux faces communes, tels que *abe* et *c'd'f*, *cdf* et *a'b'e*, forment, par la suppression de ces faces, un système de tétraèdres conjugués *a*, *b*, *c*, *d* et *a'*, *b'*, *c'*, *d'*.

Ceux-ci sont tels que chaque face de l'un passe par trois génératrices appartenant respectivement à trois des faces de l'autre.

Les faces de chaque tétraèdre,

On en conclut que chacun des six hyperboloïdes, déterminés par l'un des six systèmes de génératrices primitives, se raccorde avec S_3 suivant trois génératrices distinctes des neuf primitives et distinctes entre elles, et, par suite, qu'il existe vingt-sept génératrices sur S_3.

Chacune d'elles concourt avec cinq couples des autres, et forme, en ces concours, cinq sommets tritangents (c'est-à-dire de triple contact), ce qui détermine quarante-cinq de ces sommets.

Si deux sommets tritangents ne sont pas situés sur une même génératrice, les génératrices qui concourent en ces sommets se coupent deux à deux.

Deux sommets tritangents suffisent donc pour déterminer un système de trigones conjugués.

Deux systèmes de trigones conjugués ayant deux sommets communs, tels que ABE et C'D'F, CDF et A'B'E, forment, par la suppression de ces sommets, un système de tétragones conjugués A, B, C, D et A', B', C', D'.

Ceux-ci sont tels que chaque sommet de l'un est le point de concours de trois génératrices passant respectivement par trois des sommets de l'autre.

Les sommets de chaque tétra-

qui n'ont pas une génératrice commune, sont opposées.

Si deux trièdres a, b, c et a', b', c' sont conjugués à une surface du troisième ordre :

1°, I. ? [1]

2°, II. Les produits des distances d'un point quelconque de la surface aux deux ternes de faces a, b, c et a', b', c' sont entre eux dans un rapport constant.

3°, III. Une transversale quelconque rencontre ces deux ternes de faces, et la surface, en trois ternes de points en involution.

IV. Comme plus haut.

V. Si deux tétraèdres a, b, c, d et a', b', c', d' sont conjugués à une surface du troisième ordre, leurs faces opposées a et a', b et b', c et c', d et d' se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan.

VI. Expression analytique de ce théorème :

$$a.b.c.d - k\,a'.b'.c'.d' \equiv s_3.P.$$

VII. Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de faces opposées de deux tétraèdres conjugués à une

gone, qui ne sont pas sur une même génératrice, sont opposés.

Si deux trigones A, B, C et A', B', C' sont conjugués à une surface de la troisième classe :

1°, I. ? [1]

2°, II. Les produits des distances d'un plan tangent quelconque aux deux ternes de sommets A, B, C et A', B', C' sont entre eux dans un rapport constant.

3°, III. Les deux ternes de plans, menés par une droite et par les sommets de ces trigones, et le terne de plans, menés par cette droite tangentiellement à la surface, forment un faisceau en involution.

IV. Comme plus haut.

V. Si deux tétragones A, B, C, D et A', B', C', D' sont conjugués à une surface de la troisième classe, les droites qui unissent leurs sommets opposés A et A', B et B', C et C', D et D' concourent en un même point.

VI. Expression analytique de ce théorème :

$$A.B.C.D - k\,A'.B'.C'.D' \equiv S_3.\Pi.$$

VII. Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de sommets opposés de deux tétragones conjugués à

---

[1] *Voir* la note précédente.

surface du troisième ordre, on obtient un système de trièdres conjugués à un hyperboloïde, c'est-à-dire que, de l'identité ci-dessus, on peut déduire les suivantes :

$$a\ b.c - k'a'.b'.c' \equiv s'_2.\mathrm{P}, \ldots$$

une surface de la troisième classe, on obtient un système de deux trigones conjugués à un hyperboloïde, c'est-à-dire que, de l'identité ci-dessus, on peut déduire les suivantes :

$$\mathrm{A.B.C} - k\,\mathrm{A'.B'.C'}. \equiv \mathrm{S}'_2.\Pi, \ldots$$

Nous ferons remarquer enfin que ces théorèmes, et particulièrement les théorèmes III et V, s'étendent aisément aux courbes gauches, et ce dernier même à des courbes tracées sur une surface quelconque. Il nous paraît superflu de donner ici les énoncés de ces propriétés, ainsi que de plusieurs autres propriétés générales des courbes et des surfaces consignées ailleurs. Le lecteur pourra consulter, à ce sujet, outre les Ouvrages cités, les *Bulletins de l'Académie de Belgique,* à partir du tome XXXVI.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FLOQUET (G.). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. — In-4° de 132 pages. Paris, 1879.

La première Thèse de M. Floquet contient, sous une forme simple et claire, le résumé des importants travaux de M. Thomé et de M. Frobenius sur la théorie des équations différentielles linéaires; elle rendra le plus grand service aux mathématiciens français qui voudront se rendre compte des progrès accomplis depuis quelques années dans la voie ouverte par M. Fuchs. En outre, les recherches personnelles de M. Floquet sur la décomposition du premier membre d'une équation différentielle linéaire en facteurs premiers symboliques jettent beaucoup de jour sur plusieurs points de la théorie de ces équations.

L'auteur a divisé son travail en sept Parties.

La première est consacrée à rappeler la définition précise des fonctions qui satisfont à une équation différentielle linéaire à coefficients holomorphes dans une portion du plan, et leur forme analytique dans le domaine d'un point singulier. Ces intégrales, en supposant le point singulier à l'origine, sont des agrégats d'expressions de la forme

$$F = x^{\alpha}[\psi_0 + \psi_1 \log x + \ldots + \psi_n (\log x)^n]$$

où les ψ sont des fonctions uniformes de x; lorsque ces fonctions sont, pour $x = 0$, infinies d'un ordre fini, l'intégrale est dite *régulière;* on peut d'ailleurs supposer alors, en modifiant α, qu'elles restent finies pour $x = 0$ et qu'elles ne sont pas toutes nulles : s'il en est ainsi, on dit que la fonction F appartient à l'exposant α.

La deuxième Partie concerne l'étude de ces intégrales régulières et la détermination, par la méthode de M. Thomé, d'une limite supérieure de leur nombre pour une équation différentielle linéaire donnée. La même question se trouve résolue dans la Partie suivante au moyen de la fonction déterminante.

L'équation différentielle étant mise sous la forme *normale*

$$A(y) = a_0 x^m \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 x^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + a_m y = 0,$$

où l'on suppose que les a sont des fonctions holomorphes de x dans le voisinage du point o et qui ne s'annulent pas toutes simultanément en ce point, la fonction de x et de ρ, $\mathrm{A}(x^\rho)$, obtenue en substituant x^ρ à y dans le premier membre de l'équation, est dite la *fonction caractéristique* de ce premier membre, et le terme *constant* indépendant de x dans l'expression $x^{-\rho}\mathrm{A}(x^\rho)$ est la *fonction déterminante*. Son degré est égal ou supérieur au nombre des intégrales régulières, qui appartiennent toutes à des exposants pris parmi les racines de l'équation en ρ obtenue en l'égalant à zéro. M. Fuchs a fait une étude particulière du cas où ce degré est égal à m : toutes les intégrales sont alors régulières.

Si, en général, $\mathrm{A}(y)$, $\mathrm{B}(y)$ sont des fonctions linéaires de y et de ses dérivées, on entend par AB l'expression de même forme obtenue en substituant, dans $\mathrm{A}(y)$, B, $\frac{d\mathrm{B}}{dx}$, $\frac{d^2\mathrm{B}}{dx^2}$, ... à la place de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... Il est clair que, si y est une intégrale de l'équation $\mathrm{B}=0$, la même fonction annulera l'expression composée AB. On peut, au moyen de cette notation symbolique, effectuer sur les deux premiers membres de deux équations différentielles linéaires une suite d'opérations analogues à celles du plus grand commun diviseur et déterminer, s'il y a lieu, leurs intégrales communes. Il est aisé de voir que, si les expressions A, B ont été mises sous la forme normale, l'expression AB sera aussi sous cette forme, et que la fonction déterminante de cette dernière expression sera le produit des fonctions déterminantes des deux premières. Si l'expression $\mathrm{A}(y)$ à coefficients holomorphes est susceptible d'être décomposée en facteurs symboliques à coefficients aussi holomorphes, elle est *réductible*; dans le cas contraire, elle est irréductible. Une équation qui admet des intégrales régulières est évidemment réductible. L'équation composée $\mathrm{AB}=0$ admet au plus autant d'intégrales régulières que les deux équations $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$ en admettent ensemble; si $\mathrm{A}=0$ est irréductible, les seules intégrales régulières de $\mathrm{AB}=0$ seront celles de $\mathrm{B}=0$; enfin la condition pour que l'équation $\mathrm{P}=0$, d'ordre m et dont la fonction déterminante est de degré γ, admette γ intégrales régulières indépendantes consiste en ce que P puisse se mettre sous la forme AB, où A est d'ordre $m-\gamma$ et a pour fonction déterminante une constante.

La cinquième Partie se rapporte à l'équation *adjointe* d'une équation différentielle linéaire $A(y) = 0$. L'auteur commence par montrer comment à un système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$ d'intégrales mis sous la forme

$$y_1 = v_1, \quad y_2 = v_1 \int v_2 \, dx, \quad y_3 = v_1 \int v_2 \, dx \int v_3 \, dx$$

correspond une décomposition de $A(y)$ en facteurs *premiers* symboliques A_i, de la forme

$$A_i = \frac{dy}{dx} - K_i y,$$

où

$$K_i = (v_1 v_2 \ldots v_i)^{-1} \frac{d(v_1 v_2 \ldots v_i)}{dx}.$$

L'équation

$$A_m A_{m-1} \ldots A_2 A_1 = 0$$

admet en effet le même système fondamental d'intégrales que l'équation $A = 0$; on en conclut aisément que l'expression $(v_1 v_2 \ldots v_m)^{-1}$ est un facteur intégrant de cette équation; l'équation différentielle adjointe à laquelle satisfait ce facteur étant ainsi introduite, cette proposition si élégante, savoir, que l'adjointe de l'expression composée AB est $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont respectivement les adjointes de A et B, trouve naturellement sa place, ainsi que les relations entre les intégrales de deux équations différentielles linéaires adjointes et les relations entre les racines de leurs fonctions déterminantes.

Dans la Partie suivante, l'auteur fait la théorie complète de ces facteurs premiers symboliques qu'il a déjà introduits et de la décomposition corrélative à tout système fondamental d'intégrales; il donne les relations entre les coefficients de l'équation différentielle et les coefficients de ses facteurs premiers; il est ainsi conduit à un grand nombre d'analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations entières; il examine le cas des facteurs symboliques égaux qui correspondent à des intégrales en progression géométrique de raison x; il montre comment, pour que dans une expression différentielle composée de facteurs premiers symboliques ces facteurs soient commutatifs, il faut et il suffit que les différences de leurs coefficients pris deux à deux soient des constantes,

et enfin il donne diverses applications de ces résultats généraux.

Dans la septième et dernière Partie, M. Floquet montre quel parti on peut tirer de la même décomposition pour établir la théorie des intégrales régulières. Il est aisé de voir que cette décomposition peut s'effectuer suivant des facteurs à coefficients uniformes; les facteurs de forme

$$\frac{dy}{dx} - \frac{a}{x}y,$$

où a est une fonction holomorphe différente de zéro pour $x = 0$, sont dits *réguliers*. Le degré de la fonction déterminante est égal au nombre des facteurs réguliers qui entrent dans une même décomposition en facteurs premiers symboliques à coefficient uniforme, et le nombre des intégrales régulières linéairement indépendantes est égal au plus grand nombre de facteurs réguliers consécutifs susceptibles de terminer une même décomposition de la même nature.

GÜNTHER (S.). — STUDIEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN GEOGRAPHIE. IV. Heft. — *Analyse de Codex cosmographiques de la Bibliothèque Grand-Ducale de Munich* (p. 217-275, 4 fig.).

Au nombre des précieux Manuscrits latins que renferme la riche bibliothèque de Munich, il s'en trouve deux, en particulier, qui se rapportent au sujet de la présente étude.

Le premier fait partie d'une Encyclopédie historique, médicale et théologique; il est dédié à l'empereur Louis de Bavière et paraît devoir remonter au XIVe ou au XVe siècle.

Le second Manuscrit latin date de 1445 et 1450. L'auteur, Dietrich Ruffi, moine de l'ordre des Frères mineurs, y a discuté trente-deux questions d'Astrologie, de Météorologie, de Géographie, de Géodésie, etc.

Il est terminé par une sorte de supplément qui était primitivement destiné à un autre Ouvrage, et qui a pour titre : *Cette figure démontre la création de toutes choses, supérieures ou inférieures, et la situation de chacune d'elles en raison de son mérite ou de son démérite.*

Un rapide aperçu des subdivisions de l'Ouvrage fait reconnaître

qu'il ne faut pas exagérer l'importance ou la nouveauté des résultats qu'il renferme. Cantor et Mädler ont constaté que, parmi les trente-deux Chapitres, plusieurs ont été discutés et traités par Petrus de Dacie, Wendelin, Campanus, Maxime Planude, Fibonacci, Robert de Lincoln.

M. Günther n'a eu recours aux citations textuelles que lorsque l'intérêt de la vérité l'a exigé. En général, il a cherché à rendre fidèlement la pensée de l'auteur.

Le quatrième fascicule de cette Histoire de la Géographie a pour objet plus spécial l'analyse de trois Manuscrits cosmographiques dont voici les titres :

1° *De quatuor ventis cardinalibus,* etc.

2° *De distantis civitatum,* etc.

3° Un Chapitre intercalé dans ce même écrit, mais dans un but essentiellement différent : *Ista figura demonstrat,* etc. (*voir* ci-dessus la traduction du titre).

Ces divers Ouvrages renferment de précieuses indications pour l'histoire des notions géographiques. Nous allons indiquer rapidement les plus intéressantes.

Le premier Manuscrit traite « des quatre vents cardinaux, des planètes, de la Terre, des signes célestes, des zones et de la figure du monde, etc. ».

L'auteur inconnu explique les vents par des génies qui président à chacun d'eux. Il divise les vents en deux catégories, les quatre vents cardinaux et les huit vents collatéraux, qui sont associés deux à deux aux premiers.

Chacun de ces vents a la propriété de modifier l'état du temps d'une manière déterminée, qui permet de formuler de véritables prévisions météorologiques. Détail curieux, l'arc-en-ciel y est qualifié de *quadricolor,* comme au temps d'Aristote, qui admettait trois couleurs principales, avec une quatrième teinte entre le rouge et le vert.

L'auteur admet la théorie des quatre éléments et leur perpétuel échange les uns avec les autres.

Un paragraphe de l'analyse de M. Günther est consacré à un examen comparatif de la nomenclature des vents, d'après la monographie d'Avézac. Il rappelle à ce propos les progrès et variations de cette nomenclature dans Aristote, Pline, l'Arabe El Kazouini,

Honorius d'Autun, Isidore de Séville, Guillaume de Tripoli et Albert le Grand. On trouverait aussi dans Kepler une étude très-détaillée de la même question (*Epitomes Astronomiæ* lib. II).

La partie astronomique commence par un tableau des distances des diverses planètes entre elles. Malheureusement, il est impossible de saisir le sens des abréviations et des chiffres romains donnés par l'auteur. Il est mieux inspiré dans la comparaison qu'il imagine pour le double mouvement des planètes et pour expliquer les variations qu'éprouve ce mouvement. On reconnaît les idées exposées déjà par Pline l'Ancien, et que, deux siècles plus tard, Tycho Brahe résumait en ces termes dans une Lettre à Pratensis : « Nous ne pouvons supposer que les rayons du Soleil soient réunis comme par une chaîne ou par tout autre lien avec les planètes pour les mouvoir çà et là, les pousser ou les retirer, et il nous faut imaginer une certaine force magnétique qui réside en elles..., comme Pline en a déjà exposé la théorie. »

L'auteur du manuscrit passe ensuite à la description des diverses planètes. Il compare la Lune à un miroir qui réfléchit les rayons solaires. Son nom *Luna* doit être rapproché de *Lucinia*, qui veut dire *a Luce nata*. Sa nature participe par moitié à celle du feu et à celle de l'eau, sans doute à cause de son éclat et du reflet qu'elle donne à la lumière du Soleil.

Mercure, ou Stilbon, vient ensuite. Il est sphérique, plus gros que la Lune. La planète Vénus est animée d'un mouvement analogue à celui de Mercure et devient alternativement l'étoile du matin et du soir. On la voit même briller en plein jour, seul témoignage, sans doute, à l'appui d'une tradition suivant laquelle Énée aurait vu la planète dans ces conditions.

L'auteur termine par la description de Mars, de Jupiter et de Saturne. Il passe ensuite à la division du Zodiaque, et traite aussi de l'harmonie musicale des mouvements des sphères et de l'origine mythologique des douze signes.

L'Astromythologie de l'Ouvrage lui est entièrement spéciale. Elle renferme les fables classiques d'Aratus, d'Ovide, de Manilius, que Lalande a si bien détaillées dans son *Astronomie*.

L'auteur expose des idées nouvelles quant à l'origine de certaines constellations. Il définit l'horizon comme séparation des deux hémisphères célestes, l'un visible, l'autre invisible. L'ho-

rizon embrasse une circonférence entière, dont l'œil ne peut voir qu'une seule moitié.

Il est question aussi des deux genres d'éclipses qui se produisent suivant que la Lune est en conjonction ou en opposition sur la ligne des centres de la Terre et du Soleil.

Les développements astronomiques se rapportent à l'étude d'ensemble de l'univers en général. Le monde a une forme sphéroïdale, et les quatre éléments y sont distribués dans l'ordre de leurs poids. Cette comparaison était familière aux cosmographes arabes; on l'observe, de même, chez Omons et Honorius d'Autun.

Une figure toute géométrique résume très-exactement les idées de l'auteur. Au centre commun d'une série de cercles se trouve l'homme, dont l'existence se déroule dans le temps (année) et l'espace (monde). Cette unité trilogique ressent l'influence de quatre prédispositions physiologiques, des quatre saisons de l'année, des quatre éléments, doués chacun de deux propriétés caractéristiques, nourrissant chacun un animal particulier.

L'auteur admet, dans la création universelle, cinq grandes phases principales qui se résument ainsi qu'il suit : l'esprit de Dieu, le chaos, les six jours, la dérivation des êtres et l'harmonie des quatre éléments. Il attribue à la Terre une forme sphérique, de 380000 stades ou 12000 milles de tour. Mais ces nombres sont inexacts pour un tiers au moins, car la valeur d'un degré du méridien oscille entre 50 et 60 milles.

L'auteur adopte la division de la Terre en cinq zones, délimitées par les tropiques et les cercles polaires. Il divise l'hémisphère boréal en trois parties, l'Europe, l'Asie et l'Afrique. « L'Asie », dit-il, « s'étend du nord, par l'orient, jusqu'au milieu de l'orient; l'Europe, de l'occident jusqu'au nord; l'Afrique, du nord jusqu'à l'occident ». Les divisions doivent provenir de la représentation des Cartes arabes, sur lesquelles l'axe du continent asiatique, allant de Péluse à la Bactriane, avait une direction nord-est, et celui du continent africain, allant de l'Éthiopie aux portes d'Hercule, avait une direction nord-ouest.

Au témoignage de Peschel, on assura de bonne heure une place au Paradis terrestre aux dernières limites de l'Asie orientale. L'extravagant Cosmas, surnommé le Voyageur aux Indes (Indicopleustes), le plaçait dans une région située plus loin que la Chine,

et qu'il regardait comme inaccessible aux autres mortels. Le Manuscrit dont nous parlons ici nous fera connaître quelle était cette région. « Ce Paradis, ou séjour des bienheureux, est inaccessible aux hommes, parce qu'une ceinture de feu s'élevant jusqu'au ciel l'entoure complétement. Là se trouve l'arbre de vie, dont les fruits assurent l'immortalité; au centre du Paradis on rencontre une source, qui bientôt se répand suivant quatre directions pour former quatre fleuves qui se dirigent vers les continents les plus éloignés. » Cette doctrine de quatre grands fleuves prenant leur source dans le Paradis terrestre se trouve reproduite par plusieurs théologiens et même par des naturalistes. D'après Santarem, ce sont les quatre fleuves qu'Andreas Bianco fait descendre de la haute montagne d'Eden et qu'il dirige vers les quatre points cardinaux. Ces quatre fleuves sont le Physon ou le Gange, le Geon ou le Nil, le Tigre et l'Euphrate. Le premier coule vers l'est et se jette dans l'Océan; le second apparaît dans le voisinage des montagnes de l'Atlas, disparait bientòt sous la terre, pour se montrer de nouveau près des còtes de la mer Rouge, où il féconde l'Éthiopie et l'Égypte, et se jette dans la Méditerranée par sept embouchures. Quant au Tigre et à l'Euphrate, ils traversent les montagnes de l'Arménie, puis coulent parallèlement pour se jeter aussi dans la Méditerranée. Ils ne traversent que des pays incultes et peuplés de bêtes féroces.

Les théories hydrographiques dont il s'agit offrent encore un autre intérêt lorsqu'on cherche à les figurer sur une Carte.

Le cours du Gange est assez exactement dirigé vers l'est de l'Asie: mais il est incompréhensible que le golfe Persique, où se jettent le Tigre et l'Euphrate, ait été confondu avec la Méditerranée. L'auteur inconnu a aussi attribué au fleuve du Nil un cours extrêmement original, qui paraît devoir s'expliquer ainsi : le Nil se dirige de l'est vers l'ouest en Europe, traverse le détroit de Gibraltar, et ce n'est qu'après lui avoir fait parcourir la Mauritanie et le Sahara que l'auteur le signale enfin dans les contrées où l'on a reconnu son existence dès les temps les plus reculés. On pourrait remarquer, dans cette hypothèse fantastique du cours du Nil, le souvenir de légendes arabes. Voici, en effet, comment l'explique Peschel : « Les Arabes ont été particulièrement ingénieux dans l'explication qu'ils ont donnée de la bifurcation surnaturelle des fleuves. Pour les fleuves d'Afrique, ils imaginèrent la supposition

fausse que tous devaient recevoir le nom de Nil. Une conséquence presque inévitable de cette dénomination irréfléchie, c'est qu'elle a donné lieu à l'erreur que tous les fleuves de l'Afrique devaient être les rayonnements d'un même système hydrographique. » La même source envoyait un bras vers l'est dans l'océan Indien, comme le dit aussi Masudi, et vers l'ouest un autre fleuve dans lequel on peut voir l'hypothèse du Niger, dont le cosmographe allemand paraît avoir eu aussi connaissance; mais, comme il ne pouvait expliquer pourquoi un tel fleuve provenait de l'Asie orientale, il ne lui resta plus que de changer le sens de son cours. Il est fort probable aussi que la substance de ce Chapitre a été puisée dans des textes arabes ou dans des cartes arabes, par exemple dans les cartes du géographe Edrisi. Les cartes géographiques du Vénitien Marino Sanuto, bien supérieures à celles-ci, ont pu emprunter leurs données inexactes à notre Manuscrit, parce que les cartes arabes ne fournissaient encore que des renseignements très-imparfaits au sujet de l'intérieur de l'Afrique.

L'auteur a supposé que la Terre est située au milieu de l'atmosphère et qu'elle contient, à son tour, l'Enfer, dans lequel on ne trouve que du soufre et du feu, où doivent s'arrêter les âmes des trépassés. Dante Alighieri a largement étendu cette doctrine, qui appartient spécialement au moyen âge.

Les règles suivies pour la mesure et la subdivison du temps nous offrent le sujet de quelques remarques. L'année, dit l'auteur du Manuscrit, se compose sensiblement de douze mois, le mois de quatre semaines, et la semaine comprend exactement sept jours. Le jour lui-même est subdivisé en quatre parties, nommées *quadrans,* qui renferment six heures. « Les Juifs et les Romains », dit Littrow, « divisaient le jour naturel en quatre durées égales, qu'ils appelaient *primæ, tertiæ, sextæ* et *nonæ*. Le Bréviaire de l'Église romaine a conservé jusqu'à nos jours ces dénominations. » Il n'est donc pas étonnant que le moine écrivain ait adopté les mêmes principes pour la subdivision de l'heure. Il la compose en effet de quatre points ; le point lui-même vaut dix moments, le moment douze onces, l'once sept atomes. L'atome de temps, qu'il considère enfin comme indivisible, est cependant supérieur, comme on peut s'en assurer, à la seconde sexagésimale adoptée dans le système usuel de division du temps.

Il fait correspondre les douze mois aux douze signes du Zodiaque, et à chaque mois trente jours, avec trente *terties horas* et trente *bisse momenta*. Le mot *bisse*, employé par le cosmographe, désigne ici l'étymologie ou plutôt l'abréviation de *bissextus*, adoptée déjà par les Romains dans leur calendrier.

Le Traité se termine par un aperçu cosmographique et par un résumé anthropologique et ethnologique.

Nous avons dit que l'Ouvrage débutait par la description d'un instrument particulier pour la détermination des distances des villes et des royaumes. Si l'on en juge par la description assez peu compréhensible que renferme le Manuscrit, l'instrument dont il s'agit doit se composer d'un cercle divisé en 180 degrés, qui représente l'équateur, et d'un quart de cercle concentrique et normal au premier, et divisé en 90 degrés, qui représente le méridien. Ainsi la position de chaque point du globe se trouvera définie sur la Carte par ses coordonnées géographiques, longitude et latitude. Quant à la réduction des distances, elle est basée sur 16 milles au degré du méridien. L'unité de mesures ne paraît pas avoir été nettement fixée; l'auteur la rapporte à la fois aux Allemands, aux Italiens et aux Français. Une certaine confusion semble régner à ce sujet dans son esprit; mais il est intéressant et curieux de signaler chez lui un essai d'adoption de la division centésimale du grade et de la minute. R. Wolf en a attribué l'idée première à Henry Gellibrand ([1]), tandis que nous donnons la preuve de son invention deux siècles plus tôt.

Nous arrivons actuellement à parler d'une carte plane, spécimen dont le moyen âge ne fournit pas d'exemples nombreux. Depuis longtemps Ptolémée en avait indiqué la méthode et le principe de construction; il dit, en effet, que l'on ne commettra pas grande

---

([1]) Une des erreurs bibliographiques les plus surprenantes est celle qui attribue à Gellibrand l'œuvre colossale de Briggs, les Tables de la *Trigonometria Britannica*, dont Gellibrand n'a fait autre chose que surveiller l'impression et compléter la Préface par un assez médiocre *Traité de Trigonométrie*. Cette erreur, que nous avons déjà plusieurs fois signalée, a évidemment sa source dans une mauvaise disposition typographique du titre, où le nom de l'auteur est moins en vue que celui de l'éditeur. Telle est, du reste, l'opinion actuelle de M. Wolf (*Gesch. d. Astr.*, p. 352) : « ... wo Briggs in Ausführung einer Idee von Vieta das Interval 0°,01 wählte, ... Gellibrand dagegen nur Untergeordnetes leistete ». J. H.

rreur si l'on adopte des lignes droites pour les cercles parallèles ussi bien que pour les cercles méridiens. Seulement cette pré- aution n'a pas été généralement observée. « Des copistes outre- uidants », nous dit d'Avézac, « avaient dès le XIVe siècle, à ce u'il semble, substitué de leur chef, au parallélisme des méridiens dopté par l'auteur grec, la convergence sollicitée par l'inégalité e valeur des degrés de longitude sur les deux parallèles extrêmes, ɔut en maintenant d'ailleurs en lignes droites et les méridiens et ɛs parallèles. Et c'est exclusivement en cette forme altérée (desti- ée à devenir bientôt la plus usuelle de toutes) que parurent, dans ɛs éditions imprimées, les cartes de détail du géographe alexan- rin. » Dans le cas actuel, la projection adoptée se rapproche beau- ɔup de celle de Mercator; mais elle ne s'étend pas à l'univers entier, t, au lieu de modifier les degrés de latitude, l'auteur les a laissés e même intervalle, ce qui n'entraîne pas à des erreurs bien graves.

L'Ouvrage contient un Tableau de positions géographiques éva- iées en degrés et minutes de longitude et de latitude. Le zéro lopté comme point de départ est le Paradis terrestre ou Éden. eux colonnes renferment, en outre, l'indication de la durée du lus long jour dans chaque localité, en heures et minutes. Il est à bserver que l'auteur suppose le jour constamment de douze heures ans l'Éden, ce qui n'est guère compatible avec la situation géo- raphique de ce lieu, par rapport à l'Europe par exemple. L'Éden ɔu Arin) est figuré sur la carte en un point qui correspondrait, ır nos cartes modernes, à la Tartarie ou au Thibet. Le Gange y rend sa source, et l'auteur en fait descendre, à tort, les deux euves du Tigre et de l'Euphrate. Sans accorder à ces erreurs plus 'attention qu'elles n'en méritent, il sera curieux de rapporter appréciation de Ristoro : « Ils sont comme ceux qui auraient deux ɔis l'année l'été et deux fois le printemps, et récoltent deux fois année le blé et les fruits, et ceux-ci habitent sur le cercle de équateur; et dans ce lieu ils ont fondé une cité, qu'ils ont appelée rin; et ce lieu est tempéré, parce que le Soleil passe toujours utant sous la Terre que sur la Terre, de sorte que les jours y sont ɔnstamment égaux aux nuits. »

Ceci expliquerait, au moins, pourquoi la latitude a été supposée ulle.

Le méridien de Jérusalem est juste à 90 degrés de celui du Pa-

radis. Enfin le Tableau renferme en tout quatre-vingt-six positions géographiques. Le report de ces nombres sur une carte usuelle conduirait à un assemblage incohérent de résultats exacts et de résultats inadmissibles. Wolf attribue les erreurs de ce genre qui se rencontrent dans d'autres recueils géographiques à ce que la détermination de la hauteur du pôle se faisait au gnomon, dans le cours du XVI[e] siècle et même du XVII[e], ce qui explique pourquoi la plupart des latitudes étaient trop faibles, comme on peut le reconnaître dans Apian.

M. Günther a construit, d'après la Table, le planisphère de l'Europe et de la Méditerranée, et vérifié les erreurs qui affectent en particulier le contour de la Péninsule Ibérique. La côte de Portugal y dessine le côté nord. Cependant la forme générale est quadrangulaire, au lieu d'être triangulaire comme on l'observait dans les cartes d'Edrisi. Mais l'analogie devient plus manifeste dans le dessin des contrées orientales, ce qui donnerait lieu de supposer que notre cartographe a éprouvé l'influence arabe.

Le Tableau des positions géographiques renferme également l'indication de la longueur des jours, donnée en heures et minutes. Il offre, au point de vue mathématique, une particularité digne de remarque. Partout, dans ce Tableau, les nombres sont disposés avec méthode, les unités de même ordre les unes sous les autres. Cependant, lorsque le nombre des minutes est compris entre 0 et 10, il est quelquefois écrit correctement, mais souvent encore précédé d'un zéro qui supplée ainsi aux dizaines.

Le Tableau est suivi, dans le Traité de Cosmographie, d'un document dont il y a lieu de signaler le but. L'ensemble dont il s'agit contient les règles à suivre pour déterminer les centres du Soleil et de la Lune. Les éphémérides des mouvements se rapportent, dans les Tables Alphonsines, au méridien de Tolède; pour les appliquer à d'autres localités, il faut tenir compte de la différence de longitude avec celle de Tolède. Dans l'exemple choisi pour l'explication de la règle, il est question de la ville de Cologne (Köln), et l'on trouve une différence de longitude de $16^\circ 30'$, que l'on évalue en temps, en faisant correspondre 1 degré à 4 minutes, une minute d'arc à 4 secondes, etc. Même problème et même manière d'opérer pour les éphémérides des planètes.

Le passage du système décimal au système duodécimal est très-

clairement et très-exactement indiqué dans le cours de ce Traité.

Il est intéressant de noter, pour l'histoire de la Science, qu'une conversion du procédé décrit nous donne une idée de la méthode employée en ce temps-là pour la détermination des longitudes. Les œuvres classiques des anciens offrent un point commun pour cette importante opération, que Ptolémée et Hipparque avaient presque exclusivement fondée sur les éclipses de Lune, malheureusement trop rares; il ne restait plus qu'à faire une évaluation directe de l'heure. Ce procédé primitif exigeait essentiellement la présence d'un même observateur aux deux points, de grands déplacements, des horloges bien réglées, et, mieux encore que l'observation d'éclipses de Soleil et de Lune, la fondation des théories de Tables astronomiques exactes. On songea d'abord à déterminer d'avance l'instant de ces phénomènes pour un lieu donné : un coup d'œil sur l'Almanach évitait la peine du voyage de l'observateur. Tel fut le sens des propositions d'Oronce Finée et des mesures de Baffin; mais ces procédés se ressentaient encore de l'influence ancienne, tout en tenant compte des améliorations réalisées dans la méthode des chronomètres portatifs de Gemma et des distances lunaires de Werner.

Pour compléter le plan de ce Mémoire, il y aurait encore à parler d'un document écrit en allemand, le seul de cette langue qui fasse partie de cette volumineuse compilation. Il semble avoir été écrit par une autre main que celle du moine Dietrich Ruffi. Il doit remonter au XVe siècle, et paraît avoir été un cahier de notes et de renseignements recueillis par les soins d'un autre moine pour suppléer à un certain nombre de livres. Près des trois quarts de ce Manuscrit renferment la description du séjour des bienheureux. Le point de vue auquel s'est placé l'auteur pour représenter le système de l'univers est encore si primitif, ou pour mieux dire si naïf, que, si nous n'avions affaire à un obscur compilateur, cloîtré dans un couvent quelconque de l'Allemagne, nous n'oserions même en parler. Il n'en sera point question davantage; par contre, il faudra signaler un écrivain qui attire l'attention par la simplicité et la naïveté de son Ouvrage sur les trente-quatre subdivisions du système de l'univers : nous voulons parler du savant magister allemand Johann de Gmunden (1380-1442).

Le Traité débute par le titre que voici, écrit en lettres rouges :

Ista figura, etc., c'est-à-dire « cette figure démontre la création de toutes choses, tant supérieures qu'inférieures, et la situation de chacune d'elles suivant les exigences de son mérite ou de son démérite ». Ceci nous donnerait lieu de supposer que le texte n'était qu'un commentaire d'une représentation graphique de l'univers, que le moine copiste avait sans doute sous les yeux, mais qu'il n'a pu joindre à son travail. On peut d'ailleurs y suppléer par la description donnée, quelques lignes plus loin, en un vieux dialecte allemand qu'il est assez facile de reconstruire en langage moderne. Nous croyons pouvoir en donner quelques extraits : « La figure précitée montre toutes les œuvres du Créateur au milieu de la nature terrestre. La Terre se trouve environnée de l'atmosphère et profondément plongée sous la mer. Elle est naturellement pesante. Le tiers de sa surface a été donné comme séjour à l'homme. Elle occupe le centre du firmament... Après la sphère de feu se trouvent les sphères des sept planètes avec leurs excentriques et leurs épicycles : la première, à la Lune; la deuxième, à Mercure; la troisième, à Vénus; la quatrième, au Soleil; la cinquième, à Mars; la sixième, à Jupiter; la septième, à Saturne; puis le firmament, avec l'immense profusion des étoiles fixes. Les deux sphères de cristal : l'une d'elles a reçu la désignation de premier mobile ; la seconde est le ciel empyrée, où résident Dieu le Père, Dieu le Fils et le Saint-Esprit, ainsi que sainte Marie, mère de Dieu; puis les chœurs des saints Anges, disposés en ordre de chaque côté », c'est-à-dire, dans l'acception des théosophes scolastiques, d'après la subdivision suivante : patriarches, prophètes, évangélistes, martyrs, papes, moines et nonnes, et bienheureux.

A la fin du Traité se trouve le nom de l'auteur : Jean de Gmunden, de Vienne.

La ressemblance de ces visions avec les descriptions fantastiques du moyen âge est un fait digne de remarque. On y trouve une analogie avec les fictions de Suso, de Taulen, d'Ezzo et la *Divine Comédie* de Dante.

Nous n'avons plus rien d'extraordinaire ou de bien original qui mérite de fixer l'attention de l'historien : tout ce que renferme ce fragment est déjà connu par avance. Mais celui qui est bien au courant de la Cosmographie scolastique ne doit pas voir sans intérêt un des derniers chefs de cette doctrine réduire à si peu de

chose ce qui lui semblait être la partie la plus importante de sa science. Et, en effet, le point capital auquel on reconnaît la doctrine péripatéticienne, depuis Aristote jusqu'à Copernic, peut se résumer dans les propositions suivantes : la sphéricité du monde et de la Terre, l'hypothèse d'une zone terrestre inhabitable, de la répartition des terres et des eaux, d'une situation déterminée des quatre éléments, la disposition du ciel étoilé comme cause première du mouvement. Il était donc intéressant de pouvoir apprécier, sous un nouveau côté, un mathématicien ayant plus de mérite que de notoriété. H. B.

GÜNTHER (S.). — Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. V Heft. — *Jean Werner de Nuremberg, et ses contributions à la Géographie mathématique et physique.* (p. 277-332; 7 fig.)

Jean Werner était né le 14 février 1468, à Nuremberg. Il étudia la Théologie dans les universités allemandes, puis les sciences dans leur mère patrie, l'Italie. Il revint à Nuremberg, où il passa les trente dernières années de sa vie (1498-1528).

Dès son jeune âge, il avait cultivé les Mathématiques et l'Astronomie. Il fit des observations astronomiques durant son séjour à Rome; mais nous ne pouvons juger que très-imparfaitement l'esprit dans lequel il les a dirigées.

On connaît de Werner deux compilations, dont l'une est spécialement mathématique et astronomique, tandis que l'autre, dont nous aurons à parler plus en détail, traite de questions géographiques. D'autres Ouvrages, parmi lesquels un Recueil arithmétique, n'ont pu être édités et semblent avoir été perdus au temps de Doppelmayer. Enfin quelques écrits de Werner ont eu la bonne fortune d'être tirés de l'oubli par des bibliophiles distingués, L. Alantsee, Bousquet, Teubner.

Les écrits de Werner sur les sections coniques et sur le cône renferment, suivant une judicieuse remarque de M. Chasles, la première notion des recherches synthétiques suivies par Desargues, Pascal et La Hire. Son travail sur la duplication du cube (problème déliaque) contient des idées nouvelles sur l'Optique et la Géométrie. On a aussi de lui un Mémoire curieux pour l'histoire

de la résolution graphique des équations algébriques, à propos du célèbre problème d'Archimède : *Diviser une sphère par un plan dans un rapport donné.* Il le ramène à l'intersection d'une ellipse avec une hyperbole. Enfin, au témoignage de Heilbronner, cité par M. Chasles, Werner aurait même essayé une restitution des célèbres porismes d'Euclide.

Nous arrivons maintenant à un examen plus suivi des écrits de Werner, dont la collection forme une compilation assez volumineuse dans la bibliothèque de Nuremberg. On y trouve, au début, une introduction géographique de Pierre Apian aux savantes annotations de Werner, explication et appréciation de toutes les opérations que l'on peut effectuer en Géographie par sinus et cordes, en y joignant le rayon astronomique et un quadran nouveau, bien plus utile que le météoroscope qu'il remplace. Puis viennent, pour mémoire, d'autres écrits ou commentaires de Bessarion, de Seb. Münster et d'Ulmer.

Le premier travail de Werner est une étude analytique du commencement de la Géographie de Ptolémée.

Le Chapitre suivant renferme l'étude de la méthode de mesure du degré du méridien, due à Ératosthène, bien qu'il ne spécifie point cette désignation. On y trouve, dans une série de notes, l'énoncé et la démonstration de propositions assez importantes.

La sixième note se rapporte à la détermination de la déclinaison du Soleil. Les Tables de Georges Peurbach et de Domenico Maria de Bologne assignaient à l'obliquité de l'écliptique une valeur de $23°28'$ à $23°29'$. Jacoli a fait ressortir le mérite des recherches de ce dernier astronome. Il a montré aussi quelle notion Werner a pu avoir des nombres donnés par Domenico Maria.

La septième remarque renferme la détermination de la hauteur du pôle, le jour, au moyen de la culmination méridienne du Soleil; la nuit, au moyen de la déclinaison d'une étoile, déterminée d'avance. Werner indique aussi une méthode fondée sur l'observation de l'étoile polaire, et l'emploi des Tables de Regiomontanus, qui donnent les corrections à faire à la longitude et à la latitude, indiquées pour l'an 1500 dans les Tables alphonsines. Werner déduit la hauteur du pôle de la moyenne arithmétique des culminations méridiennes d'une étoile de perpétuelle apparition. Sa méthode

renferme le principe de celle qui a servi plus tard à la résolution classique du problème de Douwes.

La neuvième remarque définit, d'une manière géométrique assez compliquée, l'angle de position de deux lieux, comme angle compris entre le méridien de l'un avec l'arc de grand cercle qui joint ce point à l'autre. Werner indique l'emploi du gnomon pour la détermination de la hauteur du Soleil.

Le commentaire du quatrième Chapitre s'étend sur les méthodes de fixation des positions géographiques en usage chez les anciens. L'auteur en critique le peu d'exactitude et en examine surtout l'absence de moyens de mesure des longitudes. Se fondant sur l'observation d'une éclipse de Lune datée du 18 janvier 1497, Werner essaye de comparer les situations de Rome et de Nuremberg; mais les résultats ainsi obtenus renferment quelques erreurs.

Nous trouvons, dans la troisième note, la description d'un instrument destiné à la détermination de la distance angulaire de deux points de la sphère. Ce n'est, en réalité, qu'un *bâton astronomique,* portant une graduation. La disposition était la même que pour celui qui avait servi à l'observation de la comète de 1472 par J. Müller. Werner donne une description détaillée de cet instrument, qui consiste en une règle le long de laquelle se déplace un curseur rectangulaire plan. On vise de l'extrémité de la règle, et l'on amène le curseur dans une situation telle, que les rayons visuels passant par ses angles aboutissent aux deux points de la sphère céleste. La graduation de la règle indique immédiatement l'angle sous-tendu, qui peut varier de 10 à 60 degrés. Ces graduations dépendent de la variation des cotangentes.

Les sixième et septième remarques renferment l'exposé de la pratique de ces mesures et des bases de la méthode des distances lunaires. Werner indique la marche à suivre, et conclut en faisant appel à l'autorité de l'Almageste.

Il est intéressant de noter les principales applications qui en ont été faites par Lacaille, en 1750, à son voyage au Cap; Maskelyne, en 1761, à son voyage à Sainte-Hélène; Niebuhr, à son voyage en Arabie. Bouguer a eu l'idée de substituer aux distances de la Lune les hauteurs de cet astre, mais cette méthode offre moins de précision. Celle que Werner a adoptée a fait l'objet d'un examen ap-

profondi de la part de Schwarz. Elle a beaucoup gagné à la construction des Tables de Tobie Mayer et de Hansen.

Le développement du cinquième Chapitre de Ptolémée se rapporte à l'inexactitude des anciennes mesures et à la nécessité d'augmenter la précision des nouvelles données. Il y est question des variations de la hauteur du pôle et des influences topographiques sur la température locale, modifiée par la variation de l'incidence moyenne des rayons solaires.

Une note ajoutée au dixième Chapitre renferme la résolution d'un problème utile en particulier aux riverains du Nil. L'énoncé de cette question est fort original : il s'agit d'évaluer la distance de deux lieux, en fonction du décroissement de l'inondation du fleuve. C'est une application élémentaire des lignes proportionnelles.

Un commentaire spécial a pour objet la délimitation de la zone habitable. On y trouve aussi une rose des vents, dans laquelle l'auteur omet d'indiquer les directions nord-est, sud-ouest et ouest-nord-ouest.

Les paragraphes suivants renferment les développements de la méthode cartographique imaginée par Ptolémée, et que Werner a perfectionnée et modifiée. M. Günther a cité, à ce propos, diverses remarques faites par Gretschel. Il examine le détail du mode de projection de cartes en forme de cœur, inventé par Werner, et dont Gretschel établit la comparaison avec la projection sinusoïdale de Sanson.

Il est question ensuite des contributions de Werner au progrès des méthodes adoptées pour la représentation de la Terre sur un plan. Voici comment Werner définit ce problème : *Un point de la Terre étant donné de position, trouver sa distance à tous les autres points de l'objet à représenter, ainsi que les angles de position;* problème dont la solution sera donnée, dit-il, par l'emploi d'une règle spéciale.

L'instrument dont il s'agit est une imitation de l'*almicantara* des Arabes. Pour mesurer, dit-il, la distance d'un lieu quelconque à n'importe quel autre point figuré sur le plan, il suffira de placer l'extrémité de la règle au point fixe, puis d'arrêter l'autre extrémité de la règle au second point; elle fournira aussitôt la distance des deux localités. L'angle de position ne sera pas moins facile à obtenir. Appliquons les deux extrémités de la règle aux deux points;

écrivons au-dessus de leurs positions sur la carte le nombre des degrés du demi-cercle, puis le nombre de degrés entre la règle et le méridien du lieu donné ; mesurons la ligne qui les comprend : elle donnera l'angle de position cherché.

La dernière Partie de notre Traité est consacrée à une représentation de la Terre sur un plan, en suivant les instructions précédentes.

De l'étude attentive des œuvres de J. Werner on peut dégager diverses conclusions importantes pour l'histoire des Mathématiques. Les principaux résultats obtenus par J. Werner dans le domaine de ces sciences, envisagées sous leur aspect le plus général, peuvent être résumés ainsi qu'il suit :

I. Werner est le premier astronome qui ait attiré l'attention sur la méthode, si tardivement appréciée, de détermination de la hauteur du pôle au moyen des culminations inférieure et supérieure d'une étoile circumpolaire, et qui ait affranchi la détermination des latitudes géographiques des nombreuses causes d'erreur provenant des observations de la hauteur du Soleil.

II. On lui doit le problème des longitudes en mer. Il en ramena le premier la solution à de nouvelles théories, basées sur les distances de la Lune aux étoiles fondamentales.

III. La modification qu'il apporta à l'antique *rayon astronomique*, ainsi que les nouvelles Tables corrigées pour la division de cet instrument, doivent faire époque dans l'histoire des instruments d'observation.

IV. L'esprit de combinaison de Werner a contribué à éclaircir la bizarre et confuse méthode à l'aide de laquelle les anciens géographes s'efforçaient de corriger les erreurs qui affectaient les descriptions topographiques laissées par les explorateurs et les navigateurs.

V. En matière de dessin cartographique, Werner n'a pas précisément inventé les projections en forme de cœur, mais il leur a donné une base scientifique et leur a fait accomplir un progrès marqué. Au nombre des principes nouveaux les plus importants, on peut mentionner au moins le principe de la représentation équivalente.

VI. De même, pour la projection stéréographique, inventée par les anciens, Werner n'a fait que la réinventer, mais il a introduit un nouveau point de vue dans le procédé, car il a enseigné à représenter la sphère en prenant pour centre de projection un point quelconque, autre que le pôle ou un point de l'équateur, exclusivement employés jusqu'alors.

VII. L'étude que Werner a faite des écrits d'Amirucius a contribué à améliorer dans son principe même la solution du problème fondamental de la Géographie mathématique : *Évaluer la longueur de l'arc de grand cercle qui réunit deux points dont on connaît les coordonnées sphériques.*

VIII. La manière dont il a traité le problème inverse n'est pas moins originale au point de vue mathématique. Étant données les latitudes et la distance, en conclure la différence de longitudes ; et grâce à une méthode indirecte, mais claire et applicable à un point qui ne soit pas trop éloigné, il a abordé, par un côté entièrement nouveau, le difficile problème de la détermination des longitudes géodésiques.

La Météorologie descriptive tient une assez grande place dans l'Ouvrage de Werner, mais elle se ressent de l'influence astrologique du moyen âge : ce n'est, en réalité, que de l'Astrométéorologie.

L'hypothèse d'une influence des phénomènes célestes sur notre atmosphère paraît avoir pris naissance chez les Grecs. On en trouve le premier indice à l'époque de la guerre du Péloponèse. L'occupation des astronomes grecs, d'après Ideler, était d'observer les phénomènes et de tenir des Tables, où devaient aussi figurer les principaux changements de temps. Elles s'appelaient *Parapegmes* (παραπήγματα), parce qu'elles étaient portées par voie d'affiches à la connaissance du public. Méton perfectionna l'emploi de ces Tables ; il y ajouta l'indication des solstices, des levers et couchers des étoiles fixes et du temps observé dans le cours de sa période de dix-neuf ans. C'était un premier pas vers la prédiction du temps. Cet art prit un nouvel essor avec Ptolémée. Le célèbre astronome d'Alexandrie imagina de noter les aspects des planètes et leur influence sur l'atmosphère, ce qui contient le germe des doctrines de

l'Astrologie naturelle. Le moyen âge les accepta et les suivit sans réserve; les Arabes les accueillirent pareillement. Nous les retrouvons, sous une forme curieuse, dans les écrits d'un Anglais, John Eschvid, auteur d'un Livre publié vers 1347 et appelé ordinairement *Somme anglicane,* mais plus exactement *Encyclopédie judiciaire des accidents du monde.* Il y est question des influences du chaud, du froid, de la sérénité du ciel, de la pluie, de la neige, de la grêle, du vent, du tonnerre, des tremblements de terre, de la peste, de la disette et de la guerre. On peut donc prévoir, d'après cela, que Werner devait suivre une voie devenue classique depuis longtemps.

L'ensemble de ses observations météorologiques lui suggéra bientôt le projet de les résumer dans une monographie spéciale, destinée à être publiée après sa mort. Jean Schooner, alors professeur de Mathématiques à Nuremberg, se chargea des frais de l'édition et dédia l'Ouvrage au médecin Otto Flosser. La jeunesse studieuse avait besoin, d'après lui, plutôt d'exemples pratiques que de Livres théoriques. Le Journal d'observations de Werner semblait devoir remplir exactement cette condition, et l'éditeur ne croyait pouvoir mieux faire que de le dédier à un médecin, attendu qu'il regardait la Météorologie, cette branche de la Physique, comme un auxiliaire précieux pour la Médecine. L'autorité de Galien et d'Hippocrate avait consacré depuis longtemps l'idée que chaque tempérament, par exemple, était soumis à l'influence spéciale du cours des planètes.

Le Journal de Werner renferme l'indication de quelques règles fondamentales. Werner regarde le Soleil comme le promoteur de tous les phénomènes météorologiques, sans oublier pour cela l'influence des planètes, qui, par leur nature chaude ou froide, ou bien encore par leurs conjonctions et oppositions, modifient la température d'une saison de l'année. Sous ce rapport, Kepler a été encore plus précis que Werner. Mais notre météorologiste ne limite pas l'influence des planètes aux combinaisons de leurs situations. Il attribue aussi des changements de temps à la conjonction des planètes avec des étoiles fixes de la région de l'écliptique.

Le relevé de la situation journalière du temps pour l'année 1513 est tenu avec un grand soin. Chaque phénomène observé est attribué à l'aspect astrologique des planètes. Citons un passage au

hasard : « Du 7 au 15 mars, la constante sérénité de l'atmosphère doit être expliquée par l'entrée de Vénus dans le Taureau. Aussitôt que cette planète se trouva en opposition avec Saturne, il se produisit un changement de temps, etc., etc. » Tout cet Almanach paraît inspiré des principes de l'Astrologie judiciaire; c'est une collection d'horoscopes entremêlés de théories astronomiques et météorologiques, dont Kepler a réuni, sous le titre de *Marginalia ex Ephemeridibus,* une collection semblable, embrassant une durée totale de vingt ans (1617-1636) (voir *Bulletin,* t. XI, p. 71; 1876). Des documents de cette nature peuvent avoir une très-grande utilité pour l'histoire de la Météorologie; il y a intérêt à connaître au moins les Ouvrages qui les renferment.

Le Recueil se termine par une diatribe dirigée contre les astrologues, qui établissent, pour un lieu déterminé, des prédictions qu'ils croient applicables à tout l'univers, sans se préoccuper des influences climatologiques : « Ce qui s'observe à Nuremberg ne saurait avoir lieu à Rome, où la chaleur du Soleil est plus grande et le climat beaucoup plus doux. » Des observations météorologiques pareilles à celles de Werner se trouvent dans les écrits de David Fabricius, astronome bien connu par la correspondance active qu'il entretint avec Kepler. Ces observations commencent en 1590 et embrassent une partie de la période étudiée par Tycho Brahe.

M. La Cour a publié récemment, pour la première fois, un Journal d'observations météorologiques recueillies par Tycho Brahe, le rénovateur des méthodes d'observation (voir *Bulletin,* t. XII, I_2, II[e] Partie, p. 196). Tycho a noté l'état du temps et les circonstances atmosphériques pour chaque jour, durant une période de quinze ans, de 1582 à 1597, qu'il passa à Uranibourg. L'extrait suivant permettra de juger la précision d'observations faites sans le secours d'instruments.

23 *avril* 1590. — Vent de nord avant midi; calme; vent d'ouest après midi; temps calme et passablement clair.

24. — Assez pur avant midi; éclat du Soleil; temps calme, chaud, mais avec courants frais de vent de sud par intervalles. A l'est et à l'ouest, près de l'horizon, une nuance grise, plus marquée à l'est qu'à l'ouest. Même temps après midi, sauf qu'il n'existait plus de brumes autour de l'horizon.

25. — Soleil radieux; assez chaud; avec rafales de vent frais de sud par intermittences.

26. — Soleil radieux; vent de nord-est, froid et assez fort, par moments, pour pousser les navires à pleines voiles. Le ciel est parsemé çà et là de quelques nuages blancs et noirs.

M. La Cour a eu l'idée de figurer par des courbes ces données météorologiques, d'après les règles actuellement suivies. Il a ainsi acquis la preuve « que l'état général de l'atmosphère, rapporté au même calendrier, était le même, il y a près de trois cents ans, que de nos jours ».

Nous avons épuisé tout ce que les écrits de Werner pouvaient donner d'utile à la Science moderne. Au point de vue de la Géographie mathématique, Werner a laissé des travaux importants. Ses contributions à l'histoire de la Météorologie offrent aussi un grand intérêt, mais elles semblent moins en rapport avec l'objet des Mémoires analysés jusqu'à présent.

Si donc M. Günther a cru devoir leur consacrer aussi une large place, c'est parce que les écrits de Werner lui ont offert l'attrait particulier que trouve toujours un ami de la Science aux œuvres d'un géomètre qui a illustré sa ville natale. H. B.

MÉLANGES.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

PAR M. CH. HERMITE [1].

C'est à Euler qu'est due la première méthode d'intégration de ces équations dans le cas où, les coefficients étant supposés constants, l'équation a la forme

$$dy + \beta\frac{dy}{dx} + \gamma\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{d^ny}{dx^n} = 0.$$

---

[1] M. Hermite a bien voulu nous autoriser à faire connaître à nos lecteurs cette belle Leçon, qui fait partie de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* 2e année; nous publions la rédaction faite par les élèves dans l'année 1874-1875.

Cauchy a ensuite donné une seconde méthode, qui est celle que nous allons exposer.

A cette équation différentielle, Cauchy a rattaché l'équation algébrique suivante,

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots + z^n = 0,$$

obtenue en remplaçant les dérivées successives de la fonction y par les puissances de l'inconnue z, dont les exposants sont respectivement égaux aux ordres de dérivation. Soit $F(z)$ le premier membre de cette équation, que Cauchy a appelée l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle proposée. Si nous envisageons l'intégrale suivante,

$$y = \int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}\,dz,$$

où $\Pi(z)$ est un polynôme entier en z à coefficients arbitraires, et si nous supposons cette intégrale effectuée en faisant décrire à la variable z un contour fermé tout à fait quelconque, nous allons montrer que cette intégrale est une solution de l'équation différentielle proposée.

Dans le cas particulier où le contour ne renferme aucun pôle de la fonction $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$, c'est-à-dire aucun point qui ait pour affixe une racine de l'équation caractéristique, l'intégrale est nulle, et $y = 0$ est bien une solution de l'équation différentielle proposée; mais c'est dans le cas où le contour renferme des pôles que nous obtenons effectivement des solutions.

Pour démontrer ou plutôt pour vérifier ce théorème, formons les dérivées successives de l'intégrale par rapport à x; nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{e^{zx} z\Pi(z)}{F(z)}\,dz,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int \frac{e^{zx} z^2\Pi(z)}{F(z)}\,dz,$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \int \frac{e^{zx} z^n\Pi(z)}{F(z)}\,dz,$$

chacune de ces intégrales étant toujours supposée effectuée le long du contour fermé.

Substituons dans l'équation proposée ; le premier membre devient

$$\int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}(\alpha + \beta z + \ldots + z^n)\,dz.$$

On voit que $F(z)$ disparait comme facteur commun et que l'intégrale est celle de $e^{zx}\Pi(z)$, qui, effectuée le long du contour fermé, est nulle, puisque $\Pi(z)$ est un polynôme entier. L'équation est donc vérifiée, ce qui démontre que, quel que soit le contour fermé d'intégration, l'intégrale

$$\int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}\,dz$$

est une solution de l'équation proposée.

Remarque. — $\Pi(z)$ étant un polynôme de degré quelconque, il semble qu'il entre dans la solution un nombre quelconque de constantes arbitraires; mais il est facile de voir que ce nombre est au plus égal à n. En effet, on peut toujours, si $\Pi(z)$ est de degré supérieur à celui de $F(z)$, écrire identiquement

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \Phi(z) + \frac{\Psi(z)}{F(z)},$$

$\Psi(z)$ étant un polynôme entier en z de degré inférieur à n, d'où l'on tire

$$\int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}\,dz = \int e^{zx}\Phi(z)\,dz + \int \frac{e^{zx}\Psi(z)}{F(z)}\,dz;$$

mais, en intégrant le long d'un contour fermé quelconque, on voit que la première intégrale s'évanouit, puisque $\Phi(z)$ est un polynôme entier, et il ne reste que la seconde où $\Psi(z)$ renferme au plus n constantes arbitraires, puisque son degré est au plus égal à $n-1$.

Nous allons maintenant passer de l'expression de la solution sous forme d'intégrale à une expression sous forme explicite.

Soit S la somme des résidus de la fonction $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$ qui corres-

pondent aux racines du dénominateur affixes de points intérieurs au contour d'intégration.

L'intégrale aura pour valeur $2i\pi S$.

Calculons ces résidus.

Supposons d'abord que l'équation caractéristique n'ait pas de racine multiple, et décomposons la fonction $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ en éléments simples. On peut toujours supposer que le degré $\Pi(z)$ est inférieur à celui de $F(z)$; par suite, le résultat de la décomposition sera

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \ldots + \frac{L}{z-l}.$$

Faisons $z = a + h$ dans la fonction $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$; elle devient

$$\frac{e^{x(a+h)}\Pi(a+h)}{F(a+h)} = e^{ax}\left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2x^2}{1.2} + \ldots\right)$$
$$\times\left(\frac{A}{h} + p + qh + rh^2 + \ldots\right),$$

puisque le terme $\frac{A}{z-a}$ donne seul un terme en $\frac{1}{h}\cdot$ Le résidu sera donc égal à Ae^{ax}; on a donc pour première solution, en intégrant le long d'un contour qui ne contient que la racine a, $2i\pi Ae^{ax}$. En général, le contour pouvant contenir un nombre quelconque de pôles de la fonction $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$, la solution générale sera de la forme

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx} + \ldots + Le^{lx},$$

$a, b, \ldots, l$ étant les racines de l'équation caractéristique, et A, B, ..., L, n constantes arbitraires qui peuvent être nulles et qui renferment le facteur $2i\pi$.

Supposons maintenant que l'équation caractéristique ait des racines multiples, et soit

$$F(z) = (z-a)^{\alpha+1}(z-b)^{\beta+1}\ldots(z-l)^{\lambda+1}.$$

La formule de décomposition est alors

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{F}(z)} = \frac{\mathrm{A}}{z-a} + \frac{\mathrm{B}}{(z-b)} + \dots \\ + \frac{\mathrm{A}_1}{(z-a)^2} + \frac{\mathrm{B}_1}{(z-b)^2} + \dots \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \frac{\mathrm{A}_\alpha}{(z-a)^{\alpha+1}} + \frac{\mathrm{B}_\beta}{(z-b)^{\beta+1}} + \dots\end{aligned}$$

Nous aurons, en faisant $z = a + h$,

$$\frac{\mathrm{H}(a+h)}{\mathrm{F}(a+h)} = \frac{\mathrm{A}}{h} + \frac{\mathrm{A}_1}{h^2} + \dots + \frac{\mathrm{A}_\alpha}{h^{\alpha+1}},$$

les termes suivants ne contenant pas de puissances négatives de h; d'ailleurs,

$$e^{x(a+h)} = e^{ax}\left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2x^2}{1^2} + \dots + \frac{h^\alpha x^\alpha}{1.2^\alpha} + \dots\right).$$

Pour avoir le résidu correspondant à $z = a$, c'est-à-dire le coefficient du terme en $\frac{1}{h}$ dans le développement de $\frac{\mathrm{H}(a+h)}{\mathrm{F}(a+h)}e^{x(a+h)}$, il suffit de multiplier les coefficients des termes qui se correspondent dans les seconds membres des deux égalités précédentes. On trouve ainsi pour expression du résidu, et par conséquent pour une solution de l'équation différentielle proposée,

$$2i\pi e^{ax}\left(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{A}_1 x}{1} + \dots + \frac{\mathrm{A}_\alpha x^\alpha}{1.2\dots\alpha}\right).$$

La solution générale sera donc de la forme

$$\begin{aligned}e^{ax}(\mathcal{A} + \mathcal{A}_1 x + \dots + \mathcal{A}_\alpha x^\alpha) + e^{bx}(\mathcal{B} + \mathcal{B}_1 x + \dots + \mathcal{B}_\beta x^\beta) \\ + \dots + e^{lx}(\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 x + \dots + \mathcal{L}_\lambda x^\lambda),\end{aligned}$$

et, comme

$$(\alpha+1) + (\beta+1) + \dots + (\lambda+1) = n,$$

on voit que la solution générale contient n coefficients arbitraires.

Faisons une vérification dans le cas des racines simples.

Montrons d'abord que $y = \mathrm{A}e^{ax}$ est une solution; nous partirons de là pour vérifier la solution générale. Soit donc

$$y = \mathrm{A}e^{ax},$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{A}ae^{ax},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{A}a^2e^{ax},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \mathrm{A}a^ne^{ax}.$$

Substituant dans l'équation différentielle, le premier membre devient

$$\mathrm{A}e^{ax}(\alpha + \beta a + \gamma a^2 + \dots + a^n).$$

Or le second facteur n'est autre chose que $\mathrm{F}(a)$; il est donc nul, puisque $\mathrm{F}(z) = 0$ admet la racine a. Donc $y = \mathrm{A}e^{ax}$ est une solution.

Je dis que, si y_1 et y_2 sont des solutions, il en est de même de $y_1 + y_2$.

En effet, si l'on a

$$\alpha y_1 + \beta\frac{dy_1}{dx} + \gamma\frac{dy_1^2}{dx^2} + \dots + \frac{d^ny_1}{dx^n} = 0,$$

$$\alpha y_2 + \beta\frac{dy_2}{dx} + \gamma\frac{d^2y_2}{dx^2} + \dots + \frac{d^ny_2}{dx^n} = 0,$$

il vient, en ajoutant,

$$\alpha(y_1 + y_2) + \beta\frac{d}{dx}(y_1 + y_2) + \gamma\frac{d^2}{dx^2}(y_1 + y_2) + \dots = 0,$$

ce qui montre que $y_1 + y_2$ est une solution. Il en serait de même de la somme d'un nombre quelconque de solutions de la forme $\mathrm{A}e^{ax}$, ce qui vérifie la solution générale

$$\mathrm{A}e^{ax} + \mathrm{B}e^{bx} + \dots + \mathrm{L}e^{lx}.$$

Passons au cas des racines multiples. La vérification est moins immédiate. Nous considérerons, pour y parvenir, une transformée de l'équation différentielle proposée, dont la variable z sera liée à

la variable y par la relation

$$y = e^{mx} z,$$

m étant une constante arbitraire. Formons les dérivées successives de y; on aura

$$\frac{dy}{dx} = e^{mx}(mz + z'),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{mx}(m^2z + 2mz' + z''),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On voit que, en substituant dans l'équation proposée, on obtient le produit de e^{mx} par une fonction linéaire de z et de ses dérivées.

Nous avons donc identiquement

$$\alpha y + \beta \frac{dy}{dx} + \ldots + \frac{d^n y}{dx^n} = e^{mx}(Gz + Hz' + \ldots + Lz^n).$$

Pour calculer les coefficients constants G, H, ..., L, remarquons que nous n'avons fait aucune hypothèse sur la nature de z, qui est une fonction quelconque de x. Faisons $z = e^{hx}$, h étant une constante; nous devons avoir identiquement, en divisant les deux membres par le facteur $e^{(m+h)x}$,

$$\alpha + \beta(m + h) + \gamma(m + h)^2 + \ldots + (m + h)^n = G + Hh + \ldots + Lh^n.$$

Le premier membre est $F(m + h)$; l'identité précédente devant avoir lieu quel que soit h, les coefficients G, H, ... doivent être égaux respectivement aux coefficients des puissances successives de h dans le développement de $F(m + h)$. On a donc

$$G = F(m),$$

$$H = F'(m),$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$L = \frac{F^n(m)}{1.2\ldots n}.$$

L'équation transformée est donc la suivante :

$$e^{mx}\left[z F(m) + \frac{dz}{dx}F'(m) + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{F''(m)}{1.2} + \ldots\right] = 0.$$

Supposons que m soit une racine simple de l'équation caractéristique; alors $F(m) = 0$. L'équation précédente commence par un terme en $\frac{dz}{dx}$; elle est donc vérifiée si l'on suppose que z est une constante A. L'équation proposée aura pour solution correspondante

$$y = Ae^{mx}.$$

Si m est une racine double, on a $F(m) = 0$, $F'(m) = 0$; la transformée, commençant par un terme en $\frac{d^2z}{dx^2}$, est vérifiée si l'on suppose que z est un binôme du premier degré en $x(z = A + Bx)$. La solution correspondante pour l'équation proposée est

$$y = e^{mx}(A + Bx).$$

On verrait de même que, si m est une racine d'ordre de multiplicité $\alpha + 1$ de la caractéristique, on a pour solution de l'équation différentielle

$$y = e^{mx}(A + Bx + \ldots + Lx^\alpha),$$

A, B, ..., L étant des coefficients arbitraires.

Nous allons maintenant déterminer les constantes arbitraires que renferme la solution générale de l'équation différentielle linéaire, de façon que pour une valeur particulière de x, pour $x = 0$ par exemple, la fonction y et ses dérivées successives prennent des valeurs données.

Voici quelle était la méthode suivie avant que Cauchy eût donné une solution générale de ce problème. Prenons le cas où $F(z)$ n'a que des racines simples; la solution est de la forme

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx} + \ldots + Le^{lx}.$$

On forme les $(n - 1)$ premières dérivées, on y fait $x = 0$, et, en égalant les valeurs qu'elles prennent aux valeurs données $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{n-1}$, on obtient, pour déterminer A, B, ..., L, les n équations suivantes :

$$\begin{aligned}
A + B + \ldots + L &= y_0,\\
Aa + Bb + \ldots + Ll &= y'_0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots,\\
Aa^{n-1} + Bb^{n-1} + \ldots + Ll^{n} &= y_0^{n-1}.
\end{aligned}$$

Quand on passe au cas où l'équation caractéristique a des racines multiples, cette méthode est d'une application difficile, puisque les dérivées de y sont plus compliquées et que les diverses racines n'entrent plus de la même manière dans les équations à résoudre.

Cauchy a donné une méthode très-simple, qui est la même dans le cas des racines simples et des racines multiples.

Reprenons la solution de l'équation différentielle sous la forme

$$y = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}\,dz;$$

pour que cette intégrale soit la solution générale, il faut supposer que le contour d'intégration renferme à son intérieur tous les points dont les affixes sont les racines de $F(z)$, et, comme l'intégrale ne change pas de valeur quand on agrandit le contour, je supposerai que c'est un cercle dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont le rayon sera très-grand.

Il s'agit de déterminer les coefficients de $\Pi(z)$ de sorte que, pour $x = 0$, $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}\,dz$ et ses $n-1$ premières dérivées prennent les valeurs données, que je supposerai être $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{n-1}$; nous avons les n équations

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{\Pi(z)}{F(z)}\,dz = y_0,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{z\Pi(z)}{F(z)}\,dz = y'_0,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{z^2\Pi(z)}{F(z)}\,dz = y''_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{z^{n-1}\Pi(z)}{F(z)}\,dz = y_0^{n-1}.$$

Pour obtenir ces diverses intégrales, développons $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ suivant les puissances décroissantes de la variable; $\Pi(z)$ étant en général de degré $n-1$, le premier terme du développement sera du degré -1 en z, et l'on aura

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \frac{\varepsilon_0}{z} + \frac{\varepsilon_1}{z^2} + \frac{\varepsilon_2}{z^3} + \ldots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{z^n} + \ldots.$$

En effectuant le long du cercle de rayon infini les n intégrales précédentes, il suffira d'avoir égard dans chaque développement au terme en $\frac{1}{z}$, et nous nous trouverons immédiatement amenés aux relations

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= y_0, \\ \varepsilon_1 &= y'_0, \\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot, \\ \varepsilon_{n-1} &= y_0^{n-1}, \end{aligned}$$

puisque les valeurs des intégrales sont respectivement

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_{n-1}.$$

Nous connaissons ainsi dans le développement de $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ les coefficients des termes de degré égal ou supérieur à $-n$; cela suffit pour déterminer complétement $\Pi(z)$, puisqu'on a identiquement

$$\Pi(z) = F(z)\left(\frac{y_0}{z} + \frac{y'_0}{z^2} + \ldots + \frac{y_0^{n-1}}{z^n}\right)$$

et que $\Pi(z)$ doit être un polynôme entier; par conséquent, $F(z)$ étant de degré n, on voit que les n premiers termes de la série sont seuls utiles à la détermination de ce polynôme et qu'on obtient

$$\begin{aligned} \Pi(z) = y_0(&\beta + \gamma z + \delta z^2 + \ldots + z^{n-1}) \\ &+ y'_0(\gamma + \delta z + \ldots + z^{n-2}) \\ &+ y''_0(\delta + \varepsilon z + \ldots + z^{n-3}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ y_0^{n-1}. \end{aligned}$$

On a donc $\Pi(z)$ par une méthode qui s'applique aussi bien au cas des racines simples qu'à celui des racines multiples. Cela étant, et pour obtenir explicitement la valeur de y, il suffira, connaissant $\Pi(z)$, de calculer les résidus de la fonction $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$. Ce calcul, que nous avons effectué précédemment, n'exige, comme on l'a vu, que l'opération algébrique élémentaire de la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ en fractions simples.

Comme application des formules obtenues dans la dernière Leçon

pour l'intégration des équations linéaires à coefficients constants sans second membre, je prendrai l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = 0,$$

qui se rencontre dans les applications de l'Analyse à la Physique, et en particulier à l'Optique. Elle appartient à un type déjà étudié d'équations différentielles du second ordre; mais nous la traiterons suivant les procédés que nous venons d'expliquer.

L'équation caractéristique est $z^2 + n^2 = 0$; elle admet les deux racines $z = \pm in$. Si nous voulons que, pour $x = 0$, y et y' prennent certaines valeurs fixées d'avance, y_0 et y'_0, il faudra déterminer le polynôme entier $\Pi(z)$ par la relation

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \frac{y_0}{z} + \frac{y'_0}{z^2} + \frac{y''_0}{z^3} + \ldots,$$

qui donne, en multipliant les deux membres par $F(z)$ et ne conservant dans le second que les termes ne contenant pas z en dénominateur,

$$\pi(z) = y_0 z + y'_0.$$

La fonction $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$, dont on doit calculer les résidus, est $\frac{y_0 z + y'_0}{z^2 + n^2} e^{zx}$: pour une racine z, son résidu est $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F'(z)}$ ou $\frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{y'_0}{z}\right) e^{zx}$; pour la racine $-z$, ce sera $\frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{y'_0}{z}\right) e^{-zx}$. La somme de ces deux résidus est alors

$$\frac{1}{2} y_0 (e^{zx} + e^{-zx}) + \frac{1}{2} y'_0 \frac{e^{zx} - e^{-zx}}{z};$$

en y faisant $z = in$, on trouve l'intégrale cherchée

$$y_0 \cos nx + y'_0 \frac{\sin nx}{n}.$$

D'après la forme de l'équation différentielle, il est évident que, si l'on a une solution $y = \varphi(x)$, $y_1 = \varphi(x + c)$ sera encore une solution, c étant une constante quelconque. On profite de cette re-

marque pour mettre l'intégrale sous une forme telle qu'elle prenne des valeurs y_0 et y'_0, non plus pour la valeur $x=0$, mais pour une valeur quelconque $x=c$; il suffit de prendre

$$y = y_0 \cos n(x-c) + y'_0 \frac{\sin n(x-c)}{n}.$$

Cette intégrale, comme on voit, est une expression réelle, bien que les racines de l'équation soient imaginaires; or, en général, étant donnée une équation différentielle linéaire sans second membre et à coefficients constants, je dis que, si ces coefficients sont réels, ainsi que les quantités $y_0, y'_0, y''_0, \ldots$, on pourra mettre aisément l'intégrale sous forme explicitement réelle. En effet, a étant une racine imaginaire de l'équation caractéristique, on prendra sa conjuguée b et on considérera les deux termes $Ae^{ax}+Be^{bx}$. A et B sont évidemment conjugués, puisque ce sont les résidus d'une même fonction réelle $\frac{H(z)}{F(z)}$ pour deux racines conjuguées du dénominateur.

Supposons que $a=\alpha+i\beta$, $b=\alpha-i\beta$ et $A=P+iQ$, $B=P-iQ$; nous aurons

$$\begin{aligned} Ae^{ax}+Be^{bx} &= Ae^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+Be^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)\\ &= e^{\alpha x}\cos\beta x(A+B)+e^{\alpha x}\sin\beta x(A-B)i\\ &= 2Pe^{\alpha x}\cos\beta x-2Qe^{\alpha x}\sin\beta x, \end{aligned}$$

quantité qui est en effet réelle.

Nous avons vu tout à l'heure que, étant donnée une solution de $\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0$, en y changeant x en $x+c$, on a encore une solution. Cela se voit immédiatement sur la forme générale $y=Ae^{ax}+Be^{bx}+\ldots$, car les différents termes se trouvent simplement multipliés par e^{ac}, e^{bc}, ce qui revient à changer les constantes A, B, qui sont arbitraires.

Équations linéaires à second membre et à coefficients constants.

Je supposerai que, ce second membre étant un polynôme entier $F(x)$ de degré p, l'équation proposée soit

$$\alpha y+\beta\frac{dy}{dx}+\gamma\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots+\frac{d^ny}{dx^n}=F(x).$$

Si je prends la dérivée d'ordre $p+1$ des deux membres, je trouverai

$$\alpha \frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} + \beta \frac{d^{p+2}y}{dx^{p+2}} + \ldots + \frac{d^{n+p+1}y}{dx^{n+p+1}} = 0,$$

que je sais intégrer et dont les solutions fourniront celles de la proposée. A la vérité, cette nouvelle équation est plus générale que la première; aussi devrons-nous particulariser le résultat obtenu.

L'équation caractéristique est

$$\alpha z^{p+1} + \beta z^{p+2} + \ldots + z^{n+p+1} = 0.$$

Le premier membre est z^{p+1} multiplié par le premier membre de l'équation caractéristique qui correspondrait à l'équation différentielle proposée sans second membre. On sait qu'une racine a d'ordre $(p+1)$ de l'équation caractéristique donne dans l'intégrale un terme $e^{ax}(g+hx+\ldots+x^p)$. Ici $a=0$; on aura donc simplement un polynôme de degré p, $F(x)$, auquel il faudra ajouter l'ensemble des termes correspondant aux racines simples ou multiples de l'équation caractéristique

$$\alpha + \beta z + \ldots + z^n = 0.$$

La valeur de y sera donc

$$y = F(x) + Ae^{ax} + Be^{bx} + \ldots,$$

où la partie ajoutée à $F(x)$ représente la solution de l'équation proposée, privée de second membre.

Il s'agit maintenant de déterminer les coefficients de $F(x)$; on pourrait le faire en effectuant la substitution de cette valeur de y dans l'équation proposée, et il n'y aura qu'à s'occuper des termes produits par $F(x)$ et ses dérivées successives et identifier la somme de ces termes au second membre $F(x)$.

Mais nous donnerons le moyen de déterminer plus rapidement les coefficients de $F(x)$. Effectuons la division $\frac{1}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\ldots}$, et représentons le quotient par $\alpha_0+\beta_0 z+\gamma_0 z^2+\delta_0 z^3+\ldots$.

Les coefficients $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots$ seront liés par les relations

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha\alpha_0 = 1, \\ \alpha\beta_0 + \beta\alpha_0 = 0, \\ \alpha\gamma_0 + \beta\beta_0 + \gamma\alpha_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Cela étant, je dis que

$$\mathrm{F}(x) = \alpha_0 \mathrm{F}(x) + \beta_0 \mathrm{F}'(x) + \gamma_0 \mathrm{F}''(x) + \ldots,$$

série qui s'arrêtera d'elle-même quand on arrivera à $\mathrm{F}^{p+1}(x)$, qui est nul.

Pour vérifier cette valeur de $\mathrm{F}(x)$, il suffit de faire la substitution comme il a été dit tout à l'heure; or on trouvera ainsi

$$\alpha\alpha_0 \mathrm{F}(x) + (\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0)\mathrm{F}'(x) + (\alpha\gamma_0 + \beta\beta_0 + \gamma\alpha_0)\mathrm{F}''(x) + \ldots,$$

qui doit être identique à $\mathrm{F}(x)$, et cette condition est satisfaite d'après les relations (1).

Comme exemple, je prendrai l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + ay = \mathrm{F}(x),$$

que nous savons déjà intégrer; nous allons ainsi retrouver le résultat précédemment obtenu. En appliquant la méthode qui vient d'être exposée, nous ferons le quotient

$$\frac{1}{a+z} = \frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} - \ldots.$$

En posant alors

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{a} - \frac{\mathrm{F}'(x)}{a^2} + \frac{\mathrm{F}''(x)}{a^3} - \ldots,$$

la solution générale sera

$$y = ce^{-ax} + \mathrm{F}(x).$$

Remarque. — Dans un grand nombre de questions, on se sert, comme nous l'avons fait ici, d'une fonction $\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$, dans laquelle les exposants de la variable correspondent à des in-

dices de dérivation d'une fonction donnée $F(x)$. Lorsqu'on déduit ainsi de $F(x)$ la nouvelle fonction $\alpha F(x)+\beta F'(x)+\gamma F''(x)+\ldots$, cela s'appelle *opérer* sur $F(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$.

En terminant, nous indiquerons, sans la démontrer, la conséquence suivante : *Lorsque l'équation caractéristique a toutes ses racines réelles, le nombre des racines réelles de* $F(x)$ *est au plus égal au nombre des racines réelles de* $F(x)$.

APPLICATION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE A L'ÉQUATION LINÉAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS AVEC SECOND MEMBRE;

Par M. G. DARBOUX.

Dans les Leçons que nous venons de reproduire, M. Hermite a traité seulement l'équation linéaire sans second membre. Mais un résultat très-important obtenu par l'illustre géomètre va nous conduire d'une manière simple à l'intégration de l'équation linéaire à coefficients constants et avec second membre. Cauchy, du reste, n'avait pas négligé cette dernière équation, et il l'a considérée dans différents Mémoires insérés aux *Exercices de Mathématiques* [1].

Supposons que l'on se propose d'intégrer l'équation

$$(1) \qquad \alpha y+\beta\frac{dy}{dx}+\ldots+\lambda\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{d^n y}{dx^n}=f(x),$$

où $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont des constantes et $f(x)$ une fonction quelconque. On pourra appliquer la règle suivante, due aussi à Cauchy.

On formera d'abord une solution particulière $\Phi(x,t)$ de l'équation sans second membre, se réduisant à zéro ainsi que ses $n-1$ premières dérivées pour $x=t$, et telle, en outre, que sa dérivée

---

[1] *Voir* les Mémoires suivants de Cauchy :

Application du calcul des résidus à l'intégration des équations linéaires à coefficients constants (*Exercices de Mathématiques*, t. I, p. 202).

Sur la détermination des constantes arbitraires renfermées dans les intégrales des équations différentielles linéaires (*Exercices de Mathématiques*, t. II, p. 25).

Sur la transformation des fonctions qui représentent les intégrales générales des équations différentielles linéaires (*Exercices de Mathématiques*, t. II, p. 210).

$n-1^{\text{ième}}$ se réduise à $f(t)$ pour la même valeur de x. Cela posé, la fonction

$$(2) \qquad y = \int_{x_0}^{x} \Phi(x, t)\, dt,$$

où x_0 est une constante quelconque, sera une solution particulière de l'équation différentielle proposée.

Nous avons donc à former ici la fonction $\Phi(x, t)$, que nous venons de définir. Or, d'après une règle démontrée par M. Hermite, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{zx}\, dz}{F(z)},$$

prise sur le contour d'un cercle de rayon très-grand, est une solution de l'équation sans second membre, se réduisant à zéro ainsi que ses $n-2$ premières dérivées pour $x=0$ et ayant pour la même valeur de x sa $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée égale à l'unité. Changeons dans l'intégrale précédente x en $x-t$, multiplions par $f(t)$, et nous obtiendrons la fonction qu'il s'agissait de former,

$$(3) \qquad \Phi(x, t) = \frac{f(t)}{2\pi i} \int_R \frac{e^{z(x-t)}\, dz}{F(z)},$$

l'intégrale étant toujours prise sur le contour d'un cercle de rayon suffisamment grand.

Ainsi l'intégrale double

$$(4) \qquad Y = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \int_R \frac{e^{z(x-t)}\, dz}{F(z)}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (1).

Voici comment on peut vérifier directement ce résultat. En différentiant la formule (4), on a

$$\frac{dY}{dx} = \frac{f(x)}{2\pi i} \int_R \frac{dz}{F(z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \int_R \frac{e^{z(x-t)}\, z\, dz}{F(z)}.$$

L'intégrale curviligne qui figure dans le premier terme est évidemment nulle. Il reste donc

$$(5) \qquad \frac{dY}{dx} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \int_R \frac{e^{z(x-t)}\, z\, dz}{F(z)}.$$

Si l'on remarque que toutes les intégrales

$$\int_R \frac{z^p\,dz}{F(z)}$$

sont nulles tant que p est inférieur à $n-1$, on trouvera, en différentiant successivement la formule (5),

$$(6)\qquad \frac{d^p Y}{dx^p} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \int_R \frac{e^{z(x-t)}z^p\,dz}{F(z)},$$

tant que p sera inférieur à n.

Pour obtenir la dérivée $n^{\text{ième}}$, nous différentierons la formule précédente, en y supposant $p = n-1$. Nous avons

$$\frac{d^n Y}{dx^n} = \frac{f(x)}{2\pi i}\int_R \frac{z^{n-1}\,dz}{F(z)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \int_R \frac{e^{z(x-t)}z^n\,dz}{F(z)},$$

et, comme on a

$$\int_R \frac{z^{n-1}\,dz}{F(z)} = 2\pi i,$$

il restera

$$(7)\qquad \frac{d^n Y}{dx^n} = f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \int_R \frac{e^{z(x-t)}z^n\,dz}{F(z)}.$$

Il suffit maintenant de substituer les valeurs de Y et de ses dérivées pour reconnaître que Y est une solution particulière de l'équation différentielle (1). Au reste, la démonstration précédente est au fond celle de Cauchy.

Reportons-nous à la formule (4) et posons

$$(8)\qquad R(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_R \frac{e^{z(x-t)}\,dz}{F(z)};$$

$R(t)$ sera la somme des résidus relatifs à toutes les racines de $F(z)$.

Supposons qu'on ait décomposé $\frac{1}{F(z)}$ en fractions simples, et posons

$$\frac{1}{F(z)} = \sum\left[\frac{A_0}{z-a} + \frac{A_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(z-a)^p}\right];$$

on aura

$$e^{z(x-t)} = e^{a(x-t)}\left[1 + \frac{(z-a)(x-t)}{1} + \dots\right],$$

et le résidu relatif à la racine a sera

$$e^{a(x-t)}\left[A_0 + \frac{A_1(x-t)}{1} + \dots + \frac{A_{p-1}(x-t)^{p-1}}{1.2\dots p-1}\right].$$

On aura donc

$$(9)\quad R(t) = \sum e^{a(x-t)}\left[A_0 + \frac{A_1(x-t)}{1} + \dots + \frac{A_{p-1}(x-t)^{p-1}}{1.2\dots p-1}\right],$$

et Y sera alors donné par la formule

$$(10)\qquad Y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,R(t)\,dt,$$

absolument identique à celle qui a été donnée pages 199 et 200.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GÜNTHER (S.). — STUDIEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN GEOGRAPHIE. VI. Heft. Halle, 1879. In-8°, 75 pages ([1]).

Lorsque l'analyse du premier Mémoire de M. Günther a été publiée dans le *Bulletin*, le travail de ce géomètre allemand n'était pas encore terminé. Depuis cette époque, l'auteur a complété son Ouvrage par un essai historique du développement de la courbe loxodromique. La forme sous laquelle il a présenté ses divers Mémoires montre bien qu'il n'a pas eu l'intention de refaire une histoire de la Géographie mathématique et physique; il s'est préoccupé d'étudier avec plus de détails certains Chapitres de cette histoire et d'y apporter quelques contributions inédites et nouvelles. Il est vivement à désirer que l'auteur poursuive ses recherches, mais il faut reconnaître qu'il ne néglige aucune occasion d'enrichir la bibliographie mathématique dans les trop courts loisirs que lui laissent ses fonctions parlementaires.

Le sixième Mémoire de M. Günther est intitulé : *Histoire de la courbe loxodromique* (333-407; 14 figures).

La courbe à double courbure, désignée sous le nom de *courbe loxodromique*, est définie par la condition géométrique de couper sous un même angle tous les méridiens d'une surface de révolution, et, en particulier, de l'ellipsoïde et de la sphère.

Il semble que l'histoire de cette courbe doive se rattacher à celle de la science nautique plutôt qu'à l'histoire de la Géographie mathématique; mais il n'est pas aisé de l'en séparer complétement, et il est intéressant de suivre le développement historique de cette ligne célèbre depuis la première notion de son existence jusqu'aux dernières phases de son évolution.

Il va de soi, d'abord, que l'idée d'une semblable route suivie par un navire à la surface de l'Océan n'a pu prendre naissance avant la découverte de la boussole. C'est en vain que divers auteurs ont essayé d'attribuer cette invention aux Phéniciens, aux Égyptiens,

([1]) Voir *Bulletin*, II_2, 410 et 437; III_2, 73, 292 et 303.

aux Carthaginois et aux Juifs. Il est certain que, vers le milieu du XIII[e] siècle, le compas de mer était en usage chez les riverains espagnols et italiens de la Méditerranée, sous une forme très-voisine de celle qu'il a de nos jours; mais nous n'avons pas à examiner cette question, pour l'étude de laquelle nous renverrons à des monographies plus spéciales, entre autres à celle d'Ausserer.

Les premiers germes de l'invention ou de la notion de la courbe loxodromique semblent s'être manifestés à l'apparition des Cartes plates, dont le plus curieux spécimen se trouve dans deux Ouvrages espagnols publiés en 1545 et en 1556 par Pedro de Medina et Martin Cortes.

Peu à peu, les règles suivies au moyen âge pour la navigation se perfectionnèrent sensiblement. Toaldo a fait connaître, d'après un manuscrit vénitien d'un auteur resté inconnu, la règle pratique employée au moyen âge sous le nom de *marteloio* ou de *martelogio*.

Les historiens des Mathématiques, M. Chasles entre autres, ont attribué à Nunez un rôle important dans le progrès de la navigation théorique. Nunez publia ses découvertes dans un Ouvrage écrit d'abord en portugais et traduit plus tard en latin. Garção Stockler en a donné une analyse dont nous extrayons le passage suivant : « Le premier et le plus remarquable de ses deux Ouvrages nous montre que Pedro Nunez a eu la gloire d'être le premier géomètre qui ait commencé à dégager la théorie de la loxodromie, en établissant que la ligne décrite par un navire à la surface des mers lorsqu'il recoupe tous les méridiens sous une même direction oblique n'est pas un grand cercle de la sphère terrestre, mais une ligne spirale à double courbure, dont il a démontré quelques propriétés les plus dignes de remarque. » M. Günther appuie ce témoignage en reproduisant les notions dont la Science est redevable à Nunez. Ce géomètre appelle *rhomb* ou *ligne rhombique* la courbe qui vient d'être définie.

Cette manière d'envisager la loxodromie a été adoptée généralement par les géomètres et navigateurs qui l'ont étudiée. C'est ainsi que l'appelle Simon Stevin, de Bruges, dans son *Précis de Géographie*. Le quatrième Livre de cet Ouvrage est intitulé : *Histiodromie, ou Cours des navires*. La troisième définition qu'il contient se rapporte au rhomb : « Romb », dit-il, « ou cours oblique, est une

ligne qui fait tousiours de mesmes angles à tous les méridiens et n'est ny l'équateur ny un méridien. » Ce terme nouveau demanderait à être précisé. En effet, à cette époque, on venait à peine d'acquérir la notion de la déclinaison magnétique, et on la regardait comme constante sur toute la Terre. C'est pourquoi Stevin suppose que l'aiguille aimantée doit se diriger toujours vers le nord, pourvu que le navire suive une route loxodromique. Stevin remarque, d'ailleurs, la forme spirale de cette courbe. Il est aussi, ce nous semble, le premier qui ait établi une distinction nette entre la navigation suivant un grand cercle et la navigation suivant une loxodromie. Voici, en effet, comment il les caractérise lui-même : « Après que Son Excellence (le prince stathouder Maurice) eust entendu la navigation par rombs, comme on les verra cy après, et comparant les cours droits à iceux, comme plus courts, il luy a semblé bon que j'en escrive quelque chose, puis que l'ordre mesme le requerroit, si on s'en vouloit servir, et ainsi j'en ay fait ces deux descriptions suivantes, l'une méchanique, l'autre mathématique. »

Bien que les géomètres dont il vient d'être question aient saisi l'intérêt de la navigation, leurs recherches ont eu plutôt pour objet la théorie de la manœuvre des navires à voiles. Ce fut aussi la préoccupation d'un autre géomètre, presque contemporain de Stevin et de Nunez : nous voulons parler du célèbre géographe Kremer, plus connu sous le nom de Gerhard Mercator. Cet habile dessinateur de Cartes porta toute son attention à chercher des constructions simples, exactes, donnant un format convenable aux Cartes marines. L'invention de sa méthode de projection remonte à l'année 1569. Mercator n'a point mentionné la propriété de ses Cartes pour le tracé de la route loxodromique ; mais un passage de sa correspondance avec Granvella, rapporté par Breusing, biographe de Mercator, renferme une donnée plus précise. Il est certain que Mercator a été sur la voie de la découverte de la loi de variation des points de la loxodromie en adoptant son échelle de latitudes croissantes. Il doit même avoir eu la notion la plus simple et la plus générale de la courbe loxodromique.

L'idée était en germe, et divers géomètres manifestaient une certaine tendance à modifier les règles suivies jusqu'alors. Ed. Wright signala des erreurs dans la navigation et enseigna à les corriger ; mais il n'a pu éviter de tomber lui-même dans d'autres erreurs.

Pour revenir à Stevin, il est à observer que ce géomètre a établi sur de nouvelles bases la théorie de la loxodromie considérée comme route nautique. Voici comment il énonce la propriété fondamentale : « Comme la déclinaison du romb de l'équateur progrediant d'un degré de longitude, à la déclinaison suivante, d'un degré en longitude ; ainsi fort près la sécante par le commencement du dernier progrès, à la sécante par le commencement du premier progrès. » Le développement de cette proposition occupe un long passage de l'Ouvrage. Il est dit ensuite « comment on pourrait faire des Tables de rombs certaines selon l'opinion de l'autheur ».

Voici les réflexions que Girard ajoute à ses remarques : « La manière parfaite est plus facile que celle que Stevin a faite et qu'on n'a trouvée jusques à présent ; mais où sont ceux qui payeroyent la peine de celuy qui feroit quelque chose d'excellent? Tout va d'un si bon ordre entre les hommes et la Science est si bien estimée, que c'est merveilles si on ne revient en un siècle plus barbare que celuy mesme de fer : là dessus je feray cette question à la vue d'un chacun. » Les dures épreuves qu'un homme aussi exceptionnellement doué que Girard a été obligé de supporter devaient empêcher l'entier développement de son génie et peuvent servir de réponse à une proposition aussi pessimiste.

La loxodromie est devenue l'objet d'une étude systématique de la part du géomètre Willebrord Snellius, auteur d'un Cours de navigation intitulé *Tiphys Batavus,* ou Histiodromie, publié à Leyde en 1624. « La loxodromie », dit-il, « est une ligne hélicoïdale tracée à la surface du globe terrestre et qui rencontre sous un même angle les méridiens successifs. Elle s'approche indéfiniment des deux pôles, sans pouvoir jamais y atteindre. » Snellius indique également la loi de variation de la longueur de la loxodromie. Son Traité renferme une Table destinée à faciliter l'emploi de ses formules. Il contient aussi d'autres indications fort utiles, qui contredisent, ce nous semble, le jugement qu'a porté Bouguer au sujet de ce Livre, « écrit », dit-il, « d'une manière très-obscure, qui ne nuisit pas à la grande réputation que l'auteur méritoit par ses autres Ouvrages ».

Les géomètres du XVIIe siècle ont laissé diverses remarques sur la courbe loxodromique. L'encyclopédie scientifique de cette époque, composée par Alsted, renferme une description de cette ligne.

On en trouve encore une dans le Cours de Mathématiques d'Hérigone. Le Traité d'Hydrographie de Fournier, S. J., paru en 1643, contient les premières théories scientifiques relatives à la mer et à l'art nautique. Il introduisit la considération d'un triangle loxodromique infiniment petit, que Snellius n'avait pas réussi à dégager pleinement. Varenius, célèbre auteur de la *Géographie générale* (1650), donna pour la loxodromie une définition beaucoup plus précise. Il observa que cette ligne n'a pas de courbure simple, et que quatre points consécutifs de la courbe ne peuvent se trouver dans un même plan.

Un écrivain de cette période de compilation, Riccioli, a publié en 1672 un Traité, en douze Livres, intitulé : *Géographie et Hydrographie récemment réformées, revues et augmentées*. Il y établit une distinction entre les deux genres de navigation, suivant le grand cercle, comme l'avait déjà dit Snellius, et suivant la loxodromie. « La navigation sphérique circulaire, c'est-à-dire la plus courte suivant un même grand cercle, exige un changement de rhomb presque perpétuel, ou fréquent, qui suppose une très-grande habitude de la Géométrie, qui n'est accordée qu'à un petit nombre de marins. On conserve le même rhomb en naviguant le long d'une loxodromie. » Il ajoute que le marin est toujours libre de choisir entre ces deux méthodes : « En dehors des méridiens et de l'équateur et des parallèles à ce dernier, il est nécessaire que le navigateur suive la ligne du romb, s'il veut parcourir un même grand cercle ou changer de grand cercle, s'il veut parcourir la même ligne de rhomb et suivre une ligne loxodromique ou une route oblique. » Riccioli ne perd pas de vue la précision théorique ni l'intérêt pratique : « La ligne du chemin total que suivrait un navire, en dehors du méridien, de l'équateur et de ses parallèles, en conservant le même rhomb, cette ligne n'est pas circulaire, mais pratiquement et essentiellement formée de plusieurs segments de divers grands cercles, bien que, théoriquement et géométriquement, elle doive être une ligne courbe, infléchie à la façon d'une hélice. » A la neuvième proposition il dit : « La loxodromie est comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle plan appliqué à la surface de la sphère, et dont un côté serait la distance des parallèles qu'il comprend, pourvu que cette distance soit très-petite. »

Leibnitz a étudié aussi la loxodromie. Il a publié, dans les

Actes de Leipzig, la quadrature arithmétique ordinaire des sections coniques à centre, étendue par la Trigonométrie à une approximation quelconque, sans le secours de Tables, avec application de la spirale à l'étude de la ligne nautique de rhombs, avec le planisphère adapté à cette courbe.

Jacques Bernoulli a étudié en détail les propriétés de la loxodromie. Les *Actes de Leipzig,* que nous venons de citer, contiennent un Mémoire de Bernoulli, intitulé : *Nouvelle application du Calcul différentiel à la mesure de la spirale logarithmique, de la loxodromie des marins, et de la surface des triangles sphériques,* avec supplément relatif au problème funiculaire et à d'autres questions.

Les autres géomètres de la famille des Bernoulli ne semblent point s'être occupés spécialement de la loxodromie. Jean Bernoulli, cependant, a laissé, dans son Ouvrage sur la navigation, des traces évidentes d'une connaissance étendue des propriétés de la courbe loxodromique.

Léonard Euler a repris le thème de Bernoulli, et il est à observer que jamais il ne s'est servi du mot de *loxodromie* pour désigner ce genre de route des navires.

Un intéressant extrait de Chr. Wolf donne une idée de la disposition des Tables loxodromiques que l'on trouve dans son Dictionnaire mathématique. Ces Tables indiquent l'angle du vent et de la voile avec le vaisseau, l'angle du vent avec la loxodromie, l'angle de déviation et le logarithme du carré de la vitesse.

Au milieu du XVII[e] siècle, Halley publia un essai de démonstration de l'analogie des tangentes logarithmiques avec la ligne méridienne ou somme des sécantes, augmenté de divers moyens de la déterminer le plus exactement possible. Halley définit la ligne méridienne une échelle de tangentes logarithmiques des demi-compléments des latitudes; mais, le premier, il ne songe pas à faire usage de constructions sphériques. Il adopte la projection stéréographique de cette ligne sur le plan de l'équateur, faisant observer que les angles ne sont pas altérés. Il obtient donc pour projection une ligne plane, trajectoire oblique d'un système de rayons du cercle de l'équateur. Halley appelle cette ligne *spirale proportionnelle ;* ce n'est autre chose que la courbe que Jacques Bernoulli venait de découvrir et de symboliser sous la devise : *Eadem mutata*

resurgo, allusion à ce fait que la spirale logarithmique se retrouve toujours intacte après les diverses transformations qu'on lui fait éprouver. Halley a reconnu la loi des variations géométriques de la loxodromie. « Cependant », dit-il, « la ligne méridienne nautique n'est autre qu'une Table de longitudes répondant à chaque minute de latitude sur la ligne de rhomb faisant un angle de 45° avec le méridien. C'est pourquoi la ligne méridienne n'est autre qu'une échelle de logarithmes des tangentes des demi-compléments des latitudes. »

Les découvertes de Halley ont donné à Roger Cotes l'idée de la représentation graphique des logarithmes « : Adapter », dit-il, « la Table de logarithmes à la spirale équiangle. »

Pour terminer l'examen des travaux des géomètres sur la loxodromie à la surface de la sphère, il faut mentionner un Mémoire de Perks, intitulé : *Procédé mécanique facile de diviser la ligne méridienne nautique sur la projection de Mercator, suivi des relations de cette ligne avec la chaînette.*

Nous arrivons actuellement à la série des généralisations dont la loxodromie a été l'objet. Dans ce nouvel ordre d'idées, la priorité paraît devoir être revendiquée en faveur du magister J. Gottfried Walz, auteur d'un Mémoire intitulé : *Recherche de la courbe loxodromique à la surface d'un solide quelconque, engendré par la rotation d'une courbe autour de son axe, et principalement du sphéroïde elliptique qui se rapproche de la forme du globe terrestre.* Il représente un point de la courbe par deux coordonnées rectilignes et une coordonnée angulaire. Il exprime les éléments de la loxodromie dans les cas où la méridienne de la surface est une circonférence, une ellipse ou une parabole.

Les premières recherches de Maupertuis sur la courbe loxodromique datent de la même année que celles de G. Walz.

Les recherches des géomètres anglais avaient pour but de préparer l'emploi de la loxodromie dans la navigation. Maclaurin a traité la question de représenter un sphéroïde sur une Carte au moyen de latitudes croissantes et de longitudes invariables. Murdoch a dressé des Tables loxodromiques, destinées à faciliter l'application de la théorie de la figure de la Terre à la construction de Cartes marines.

Les travaux de Simpson sur la doctrine et les applications de la

théorie des fluxions renferment des aperçus plus clairs et plus précis que ceux de Maclaurin. Il s'est proposé de déterminer les régions méridionales répondant à une latitude donnée en suivant la projection de Wright et adoptant la véritable sphéricité de la Terre.

De la théorie de Simpson à la méthode systématique d'Euler il n'y avait qu'un pas : Th. Schubert a eu la gloire de le franchir. Son Mémoire sur le cours des navires sur un sphéroïde elliptique débute en ces termes : « Toute la navigation peut, sans difficulté, se réduire au problème suivant :

« *Étant données les situations de deux localités, trouver quelle route doit suivre entre elles un navire ou l'angle constant sous lequel la direction du navire rencontre tous les méridiens, décrivant ainsi une courbe que l'on appelle ordinairement loxodromie.* »

Schubert a résolu cette question en construisant une Table destinée à faciliter l'usage de la formule qu'il avait démontrée. Cette Table renferme la variation de latitude de la loxodromie, en passant d'un méridien à l'autre, lorsque la latitude du point de départ varie par intervalles de dix minutes. Le calcul est effectué dans l'hypothèse de la forme sphérique et de la forme elliptique.

Nous arrivons avec Schubert à la seconde moitié du dernier siècle. C'est aussi l'époque à laquelle il faut placer les importantes contributions de Kästner à la Géographie mathématique ; mais, comme le lecteur a pu le reconnaître, la tendance des travaux des géomètres jusqu'à cette époque a été purement scientifique. Bientôt allaient paraître les savantes études ayant pour objet l'application de la théorie à la pratique de la navigation. Les travaux dont il va être question sont dus à un Allemand, Kaschub, à un Français, Bouguer, et à un Anglais, Robertson.

Kaschub a publié un Cours de Mathématiques sous une forme semblable à celle d'un Ouvrage estimé, dû à Wolf. Un de ses Chapitres se rapporte à l'Hydrographie, ou art nautique. Il y est question de la navigation suivant la loxodromie, qu'il réduit à ses principes les plus simples.

Bouguer a laissé un Ouvrage qui a longtemps été regardé comme le meilleur et le plus complet des Traités de navigation. Ce géomètre

s'est distingué aussi comme géodésien; on lui doit la découverte de l'attraction des montagnes et les premières recherches scientifiques de photométrie. L'Ouvrage que nous avons ici en vue est intitulé : *Nouveau Traité de navigation, contenant la théorie et la pratique du pilotage*, 1753. L'auteur est amené à la considération de la loxodromie par l'étude « des lignes courbes que les rumbs de vent suivent sur le globe et de la forme qu'on a été obligé, en conséquence, de donner aux cartes réduites ». Un Chapitre de l'Ouvrage est réservé à la théorie du quartier de réduction. Bouguer désigne ainsi une sorte de Carte auxiliaire. « Le quartier de réduction », dit-il, « est comme une Carte qui convient à tous les endroits du globe terrestre. On pointe, pour ainsi dire, les routes sur cet instrument, et, après avoir vu la latitude et la longitude où elles conduisent, on transporte le point sur la Carte réduite. » Enfin, la courbe loxodromique est décrite avec beaucoup de soin, sa projection stéréographique est étudiée d'une manière élégante, et l'Ouvrage entier donne la preuve que l'auteur s'est préoccupé de donner à ses résultats une utilité pratique.

Le géomètre anglais Robertson a laissé, comme Bouguer, un Ouvrage sur la navigation, publié en 1754. Il s'est placé à un point de vue tout à fait analogue à celui de Bouguer. Toutefois, il ne paraît pas avoir tenu compte de l'insuffisance de la projection de Mercator pour la représentation des zones glaciales. Des contrées telles que l'Islande et le Groenland éprouvent alors des déformations bizarres, qui nuisent beaucoup à la valeur des Cartes. Pour y remédier en partie et corriger l'influence que cette altération produirait sur la loxodromie, ou route la plus courte entre deux points de l'Océan, Robertson imagine une courbe tangente au parallèle du point le plus rapproché du pôle et aboutissant au point le plus rapproché de l'équateur, en coupant à 45° le parallèle correspondant. Il prend pour exemple le cap Lizard, à la pointe sud-ouest de l'Angleterre, et les îles Bermudes, en passant à hauteur du cap Race, au sud-est de l'île de Terre-Neuve, en arrière du grand banc.

Ces notions historiques épuisent ce que nous avions à dire au sujet de la loxodromie durant le XVIIIe siècle. Actuellement, cette courbe a surtout un intérêt théorique, et l'on ne s'astreint plus à la regarder comme la base des routes marines.

On doit à Gudermann l'invention d'un système de coordonnées

sphériques, dont il fit une première application à l'étude d'une nouvelle courbe transcendante, la chaînette sphérique, qui se rattache à la loxodromie par plusieurs propriétés intéressantes et remarquables, parmi lesquelles nous pouvons signaler, par exemple, la présence d'un point asymptotique.

L'idée d'une comparaison de la loxodromie avec la chaînette plane paraît être venue déjà au géomètre anglais Perks.

La monographie de Verdam contient aussi un grand nombre de remarques nouvelles.

Grunert et Plagemann ont étudié les propriétés de la loxodromie. On doit au premier de ces géomètres une Trigonométrie loxodromique et la notion de la surface du triangle loxodromique sur le sphéroïde de révolution engendré par une ellipse tournant autour de son petit axe. Quant à Plagemann, il a donné une théorie des lignes loxodromiques sur l'ellipsoïde et sur la sphère.

Grunert a laissé aussi des travaux sur la navigation suivant un grand cercle. On doit à Von Friesach la description d'une Table spéciale destinée à faciliter les règles à suivre pour l'application des principes de la théorie.

Il nous resterait encore à citer les travaux de géomètres contemporains : il nous suffira de dire que tant d'études variées ont à peu près épuisé la série des propriétés de la loxodromie. Nous ne mentionnerons ici que pour mémoire les essais d'application de cette courbe à la théorie des mouvements de l'atmosphère.

Ici se terminent les études de M. Günther. On conçoit aisément la possibilité d'en étendre le programme. Voici, en effet, divers sujets de recherche qui nous semblent rentrer dans le même cadre que les Mémoires dont nous venons d'essayer l'analyse :

Théories et expériences relatives à l'attraction de la Terre; variation de la pesanteur à la surface et à l'intérieur du globe;

Histoire des essais de représentation cartographique ;

L'Œuvre d'Alexandre de Humboldt et de Maury;

Discussion et résultats des nivellements des diverses contrées du globe;

La Géographie physique considérée dans ses rapports avec la Météorologie générale;

La Géographie physique des naturalistes de l'antiquité.

Toutes ces questions, et bien d'autres qui surgiraient incidemment, et que l'on ne peut prévoir dès à présent, donneraient lieu à des études fort curieuses et relativement faciles. Nous souhaitons qu'elles fixent l'attention de M. Günther et des géomètres que la variété et la ressource de ces études pourraient intéresser.

H. Brocard.

BORCHARDT (C.-W.). — Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen. Aus den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1878. Berlin, 1879, 66 pages.

En 1876, M. Borchardt a déjà communiqué à l'Académie de Berlin le résultat principal de ses recherches sur la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments, résultat qui consistait à montrer de quelle manière on pourrait en déterminer la valeur par une intégrale double.

Voici comment l'auteur a généralisé la notion de la moyene arithmético-géométrique de deux éléments.

Soient a, b, c, e quatre nombres positifs et réels; calculons

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{4}(a+b+c+e),\\ b_1 &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{ce}),\\ c_1 &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{ac}+\sqrt{be}),\\ e_1 &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{ae}+\sqrt{bc}). \end{aligned}\right.$$

En répétant le calcul indiqué un nombre de fois illimité pour a_1, b_1, c_1, e_1, ..., on obtient une suite infinie de quantités transformées réelles et positives a_n, b_n, c_n, e_n, qui tendent vers une limite commune g si n croît indéfiniment. La détermination de cette limite fait l'objet du Mémoire. Pour pouvoir résumer le résultat comme le fait M. Borchardt à la fin de son travail, posons encore

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a+b+c+e,\\ \mathfrak{b} &= a+b-c-e,\\ \mathfrak{c} &= a-b+c-e,\\ \mathfrak{e} &= a-b-c+e, \end{aligned}\right.$$

enfin

$$(3)\quad \begin{cases} b' = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{ce}\right) & b'' = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{ab} - \sqrt{ce}\right) \\ c' = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{ac} + \sqrt{be}\right) & c'' = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{ac} - \sqrt{be}\right) \\ e' = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{ae} + \sqrt{bc}\right) & e'' = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{ae} - \sqrt{bc}\right). \end{cases}$$

Alors on peut énoncer cette proposition :

« Qu'on dérive la moyenne arithmético-géométrique g de quatre éléments réels et positifs a, b, c, e par l'algorithme (1) réitéré un nombre de fois illimité; qu'on détermine d'après (2) et (3) les six quantités b', c' e', b'', c'', e'' coordonnées aux quatre éléments; qu'on désigne par $\mathfrak{L}(\varphi)$, $\mathfrak{G}(\psi)$ les deux expressions homogènes en $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ et $\cos\psi$, $\sin\psi$,

$$\mathfrak{L}(\varphi) = \left(\cos\varphi^2 + \frac{ae}{bc}\sin\varphi^2\right)\left(\cos\varphi^2 + \frac{ec''}{bc'}\sin\varphi^2\right)\left(\cos\varphi^2 + \frac{ac''}{cc'}\sin\varphi^2\right),$$

$$\mathfrak{G}(\psi) = \left(\cos\psi^2 + \frac{ac}{be}\sin\psi^2\right)\left(\cos\psi^2 + \frac{ce'}{be''}\sin\psi^2\right)\left(\cos\psi^2 + \frac{ae'}{ce''}\sin\psi^2\right);$$

alors on a

$$\frac{\pi^2}{g} = \sqrt{\frac{a}{bce}}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} d\psi\, \frac{1 - \frac{be''}{bc'}\sin^2\varphi + \frac{b'c''}{be''}\sin^2\psi}{\sqrt{\mathfrak{L}(\varphi)\,\mathfrak{G}(\psi)}},$$

où les racines carrées doivent être prises avec le signe positif. »

Dans ses Communications de 1876 et 1877, M. Borchardt n'avait publié que ce résultat, sous une forme peu différente de celle qu'il a choisie actuellement. Le Mémoire qui vient de paraître est consacré au développement de la théorie qui l'a mené à ce but. L'Introduction révèle complétement la marche de ses idées, et les onze Sections suivantes donnent en entier tous les calculs nécessaires pour les démonstrations. Nous nous bornons à citer un passage de l'Introduction qui sert à caractériser la tendance de ces calculs :

« La détermination de la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments par une intégrale simple, détermination que l'on connait depuis Lagrange et Gauss, est déduite communément de la transformation du second ordre des fonctions $\mathfrak{z}$ *elliptiques*. Semblablement, le résultat que j'ai établi peut se démontrer avec faci-

lité au moyen de la transformation du second ordre des fonctions ϑ *hyperelliptiques* de deux variables. Cependant je ne me servirai pas de ce moyen dans ce qui va suivre; mais comme, indépendamment de la théorie de ces transcendantes, j'ai été conduit, il y a des années, à la notion du moyen arithmético-géométrique de quatre éléments par des considérations algébriques, j'en déduirai aussi l'expression comme fonction analytique de ces éléments par la voie algébrique. »

Voici encore les titres des Parties du Mémoire :

Introduction. — 1. Établissement de l'algorithme, notion de la moyenne arithmético-géométrique. — 2. Introduction de six quantités coordonnées aux éléments. — 3. Inversion de l'algorithme. — 4. Systèmes de variables qui sont en connexion avec les éléments et les quantités transformées. Variables coordonnées de première espèce. — 5. Variables coordonnées de seconde espèce. Relation biquadratique de Goepel. — 6. Expression des seize variables par des variables indépendantes. — 7. Seize agrégats linéaires composés des variables x, y, z, w. Connexion entre les signes de ces agrégats. Représentation d'une surface kummérienne biquadratique à seize points nodaux au moyen de la relation de Goepel. — 8. Caractère invariantif de la fonction biquadratique de Goepel. — 9. Les parties centrales de deux surfaces kummériennes dépendant l'une de l'autre par transformation se correspondent mutuellement. — 10. Formation d'une différentielle qui se change, à l'occasion de la transformation, en elle-même, abstraction faite du facteur numérique $\frac{1}{4}$. — 11. Intégrale double étendue sur la partie centrale de la surface kummérienne qui mène à la détermination du moyen arithmético-géométrique.

E. L.

B. BONCOMPAGNI. — Deux Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange, tirées de la Bibliothèque royale de Berlin (collection Meusebach, portefeuille n° 21, et collection Radowitz, n° 4952). Berlin, imprimerie de Gustav Schade (Otto Francke), 1878. — Reproduction photographique, six feuillets non numérotés.

Cette nouvelle publication de M. le prince Boncompagni se distingue de son aînée par l'intérêt anecdotique et littéraire.

Il est curieux de voir Lagrange s'adonner à l'Histoire et lire avec intérêt l'ouvrage de Denina sur le Piémont, de l'entendre demander l'*Histoire des Mathématiques* de Kaestner, et porter sur le livre de Montucla un jugement qui est ratifié par la postérité pour le dernier Volume ([1]), mais qui est beaucoup trop flatteur pour les premiers ([2]).

Il n'est pas moins intéressant de l'entendre juger un roman de Mme de Genlis ([3]) et d'apprendre ses relations avec le marquis Lucchesini, ministre plénipotentiaire de Prusse, et avec le botaniste Thouin.

La première des deux Lettres est datée de « Paris, le 25 nivôse, an IX, » c'est-à-dire du 15 janvier 1801. Une Note autographe d'Alexandre de Humboldt nous apprend que la seconde a été écrite de Berlin à Laplace. Celle-ci ne porte pas de date et celle-là pas d'adresse.

Mais on remarque bien vite que la première est écrite à un homme peu considérable. Lagrange ne signe que par les initiales L. G., et les témoignages de politesse ne sont pas sans froideur ([4]). Après avoir fait part à son correspondant des remercîments de sa femme : « Elle a voulu, » écrit-il, « profiter d'un envoi que Fuchs avait à vous faire pour envoyer *à son tour* une bagatelle à Mme de la Garde. » Cette Lettre doit avoir été adressée à M. de la Garde, l'éditeur de *Mères rivales* et de la traduction allemande de l'*Histoire du Piémont*.

Il n'est pas très difficile non plus de dater la seconde, au moins d'une façon approximative. Lagrange remercie Laplace de son travail sur les *Approximations*, dont la première Partie parut en 1785, la suite en 1809 ([5]). Or il s'agit de la première, puisque Lagrange

---

([1]) « Je crois que la matière était au-dessus des forces de l'auteur : je parle de la partie qui traite du progrès des Mathématiques dans le siècle qui vient de s'écouler. »

([2]) « Car, pour la partie déjà connue, il me semble qu'elle laisse bien peu à désirer. »

([3]) « C'est, en effet, une des meilleures productions de Mme de Genlis. » M. Genocchi pense qu'il s'agit des *Mères rivales*, qui parurent en 1800, à Berlin, chez de la Garde. (*Intorno a due Lettere del Lagrange pubblicate da B. Boncompagni*, p. 2.)

([4]) « J'ai reçu, mon cher correspondant.... Je vous offre de mon côté l'hommage sincère des sentiments par lesquels je vous suis attaché ainsi que le désir de trouver des occasions de vous en donner des preuves. »

([5]) *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, année 1782 ; *Mémoires de l'Institut*, 1809.

était alors à Berlin. D'autre part, Lagrange fait hommage de la seconde Partie d'un travail dont la première avait été déjà offerte à Laplace. M. le prince Boncompagni croit qu'il est fait allusion à la *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes,* dont la première Partie fut publiée dans les *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences,* année 1781 (Berlin, 1783), et la seconde dans la même collection, année 1782 (Berlin, 1784). Nous pouvons donc placer cette seconde Lettre dans l'année 1784.

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur ces pièces, qui, pour être analysées complétement, devraient être reproduites en entier.

Les amis de l'histoire des Sciences sauront gré à l'éditeur du libéral présent qu'il vient de leur faire, et ils souhaiteront de voir se multiplier ces reproductions héliographiques qui, à l'avantage de rendre impossibles les méprises de lecture, joignent le rare mérite de la couleur locale.

C. Henry.

MÉLANGES.

DÉTERMINATION DE LA VALEUR-LIMITE D'UNE INTÉGRALE QUI SE PRÉSENTE DANS LA THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

Par M. P. du BOIS-REYMOND.

Établir la limite de

$$(1) \qquad J = \int_0^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon^2) f(\theta)\, d\theta}{1 - 2\varepsilon \cos(\theta - \alpha) + \varepsilon^2}$$

quand ε *s'approche de l'unité.*

I.

Supposons

$$1 > \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad 2\pi > \alpha > 0.$$

On commence par partager l'intégrale J en deux autres, de o à α

et de α à 2π, ce qui donne, après un changement de variables,

$$(2)\quad J = \int_0^{\alpha} \frac{(1-\varepsilon^2) f(\alpha-\theta)\, d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2} + \int_0^{2\pi-\alpha} \frac{(1-\varepsilon^2) f(\alpha+\theta)\, d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}.$$

En écrivant $\varphi(\theta)$ au lieu de $f(\alpha-\theta)$ ou $f(\alpha+\theta)$, on voit que les deux intégrales du second membre de (2) ont la forme commune

$$(3)\qquad j = \int_0^{a} \frac{(1-\varepsilon^2)\varphi(\theta)\, d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}, \quad (2\pi > a > 0),$$

qu'il faut discuter.

II.

Considérons en premier lieu l'intégrale plus simple

$$(4)\qquad (j) = \int_0^{a} \frac{(1-\varepsilon^2)\, d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}.$$

On sait qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{(1-\varepsilon^2)\sin a}{(1+\varepsilon^2)\cos a - 2\varepsilon};$$

mais cet arc tang a l'inconvénient de n'être pas renfermé entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Pour le rendre tel, il faut lui ajouter π, comme je l'ai montré dans les *Annales de Leipzig*, t. VII, p. 257. Toujours est-il que cette forme de l'intégrale (4) se prête moins aisément à la recherche qui nous occupe, qu'une autre transformation que je vais indiquer.

Dans

$$(5)\qquad (j) = (1-\varepsilon^2) \int_0^{a} \frac{d\theta}{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos\theta}$$

on introduit $\frac{\theta}{2}$ au lieu de θ, ce qui donne

$$(6)\qquad \tfrac{1}{2}(j) = (1-\varepsilon^2) \int_0^{a} \frac{d \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon)^2 + (1+\varepsilon)^2 \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Maintenant, en faisant $\tang\frac{\theta}{2} = \tau\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, la différentielle de l'intégrale prend la forme canonique $\frac{d\tau}{1+\tau^2}$; mais il est indispensable de traiter séparément les cas $a \leqq \pi$ et $a > \pi$.

Supposons d'abord $a \leqq \pi$. On trouve

$$(7) \qquad \tfrac{1}{2}(j) = \int_0^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\tang\frac{a}{2}} \frac{d\tau}{1+\tau^2}.$$

Pour $a > \pi$, on a

$$\tfrac{1}{2}(j) = (1-\varepsilon^2)\int_0^a \frac{d\tang\frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon)^2 + (1+\varepsilon)^2\tang\frac{\theta}{2}} = (1-\varepsilon^2)\left(\int_0^\pi + \int_\pi^a\right).$$

On peut se servir de la substitution $\tang\frac{\theta}{2} = \tau\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ dans les deux intégrales du second membre, en songeant que $\tang\frac{a}{2}$ est négative, de sorte que (j) devient, dans ce cas,

$$(8) \qquad \tfrac{1}{2}(j) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{1+\tau^2} + \int_{-\infty}^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\tang\frac{a}{2}} \frac{d\tau}{1+\tau^2}.$$

A présent (j) est ramené, dans les deux cas $a \leqq \pi$, $a > \pi$, à des formes qui permettent d'en établir sur-le-champ la limite pour ε s'approchant de l'unité. Si, dans les équations (7) et (8), $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ converge vers $+\infty$, l'intégrale dans (7) converge vers $\int_0^\infty d \arc\tang\tau$, et la seconde intégrale dans (8) tend vers zéro, à cause de $\tang\frac{a}{2}$ négative.

III.

Reprenons maintenant la formule générale (3) :

$$j = \int_0^a \frac{(1-\varepsilon^2)\varphi(\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}, \qquad (2\pi > a > 0).$$

La substitution $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \tau\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ l'aurait transformée, pour $a \leqq \pi$, en

$$(9)\qquad \tfrac{1}{2}j = \int_0^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tang}\frac{a}{2}} \varphi\left[2\operatorname{arc\,tang}\left(\tau\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\right]\frac{d\tau}{1+\tau^2},$$

et, pour $a > \pi$, en

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}j &= \int_0^{\infty} \varphi\left[2\operatorname{arc\,tang}\left(\tau\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\right]\frac{d\tau}{1+\tau^2} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tang}\frac{a}{2}} \varphi\left[2\operatorname{arc\,tang}\left(\tau\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right]\frac{d\tau}{1+\tau^2}. \end{aligned}\right.$$

Pour simplifier, faisons

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \gamma, \quad \operatorname{tang}\frac{a}{2} = \mathrm{A}, \quad \varphi[2\operatorname{arc\,tang}(x)] = \psi(x).$$

Les formules (9) et (10) deviennent ainsi

$$(9_a)\qquad \tfrac{1}{2}j = \int_0^{\frac{\mathrm{A}}{\gamma}} \psi(\gamma\tau)\,\frac{d\tau}{1+\tau^2}, \qquad (\mathrm{A} > 0),$$

$$(10_a)\qquad \tfrac{1}{2}j = \int_0^{\infty} \psi(\gamma\tau)\,\frac{d\tau}{1+\tau^2} + \int_{-\infty}^{\frac{\mathrm{A}}{\gamma}} \psi(\gamma\tau)\,\frac{d\tau}{1+\tau^2}, \qquad (\mathrm{A} < 0).$$

Quant à $\gamma = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, on a $0 < \gamma$, et, pour $\lim \varepsilon = 1$, $\lim \gamma = 0$.

Cherchons d'abord la limite de j dans (9_a). Nous partageons cette intégrale en deux autres :

$$(11)\qquad \tfrac{1}{2}j = \int_0^{c} \psi(\gamma\tau)\,\frac{d\tau}{1+\tau^2} + \int_0 \psi(\gamma\tau)\,\frac{d\tau}{1+\tau^2}, \qquad \left(0 < c < \frac{\mathrm{A}}{\gamma}\right).$$

La fonction $\psi(x)$ est supposée finie entre les limites des intégrales (9_a) et (10_a), c'est-à-dire que $\varphi(\theta) = \psi(x)$ est finie entre les limites $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. De plus, $\psi(x)$ est supposée intégrable. C'est

à cela que se bornent nos suppositions. Alors, à cause de $\frac{1}{1+\tau^2}$ positif et du théorème ordinaire des valeurs moyennes :

$$\int_a^b \psi(x)\varphi(x)\,dx = \psi(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad (a \leqq \xi \leqq b),$$

l'équation (11) devient

$$(12) \qquad \tfrac{1}{2}j = \psi(\gamma c_1)\int_0^c d\,\text{arc tang}\,\tau + \psi(\gamma c_2)\int_c^{\frac{A}{\gamma}} d\,\text{arc tang}\,\tau,$$

$$\left(0 \leqq c_1 \leqq c \leqq c_2 \leqq \frac{A}{\gamma}\right).$$

Pour trouver la limite de j, γ tendant vers zéro, nous supposerons c croissant au delà de toute limite pendant que γ décroît, mais sous cette condition, que le produit γc converge en même temps vers zéro, ce qui aura lieu, par exemple, si l'on fait $c = \gamma^{-\frac{1}{2}}$. Évidemment on aura

$$\lim \tfrac{1}{2}j = \frac{\pi}{2}\lim\psi(\gamma c_1) + 0.\lim\psi(\gamma c_2),$$

et, si l'on suppose finalement encore que $\lim\psi(\delta)$, $(0 < \delta)$, pour $\delta = 0$, est une quantité déterminée, quelle que soit la nature de la quantité évanouissante δ, on trouve

$$(13) \qquad \lim j = \pi \lim\psi(\delta), \quad (\delta > 0).$$

L'équation (10_a) donne la même limite de j; car, en opérant sur la première intégrale de son second membre comme nous venons de le faire sur l'intégrale $\frac{1}{2}j$ de l'équation (9_a), on voit immédiatement que sa limite est $\pi\lim\psi(\delta)$. La seconde intégrale, mise sous la forme

$$\psi(\gamma\tau_1)\int_{-\infty}^{\frac{A}{\gamma}} d\,\text{arc tang}\,\tau, \quad \left(-\infty < \tau_1 < \frac{A}{\gamma}\right),$$

a la limite zéro, à cause de $\psi(\gamma\tau_1)$ finie et de $A < 0$.

Tout ceci aboutit donc au théorème :

Soit donnée l'intégrale

$$j = \int_0^a \frac{(1-\varepsilon^2)\varphi(\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}, \quad (2\pi > a > 0),$$

la fonction $\varphi(\theta)$ *étant assujettie aux conditions d'être intégrable dans l'intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, *et d'avoir une limite déterminée* $\lim\varphi(\delta)$ *pour* $\delta > 0$, δ *s'approchant d'une manière quelconque de zéro. Si dans l'intégrale j la quantité* ε, *supposée* < 1, *tend vers l'unité, j tend vers* $\pi \lim\varphi(\delta)$.

IV.

Après avoir établi la limite de j, celle de l'intégrale J, qui est l'objet de cette analyse, n'offre plus aucune difficulté.

Nous avons en effet, formule (2),

$$J = \int_0^{\alpha} \frac{(1-\varepsilon^2)f(\alpha-\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2} + \int_0^{2\pi-\alpha} \frac{(1-\varepsilon^2)f(\alpha+\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\theta\varepsilon^2}.$$

En faisant tour à tour $f(\alpha+\theta) = \varphi(\theta)$, $f(\alpha-\theta) = \varphi(\theta)$, *nous trouvons pour* α, *contenu entre* 0 *et* 2π,

(14) $$\lim J = \pi[\lim f(\alpha-\delta) + \lim f(\alpha+\delta)],$$

sous l'hypothèse du théorème que je viens d'énoncer, que $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$, et que $\lim f(\alpha-\delta)$, $\lim f(\alpha+\delta)$ sont des valeurs déterminées, indépendantes de la manière dont δ s'évanouit.

Jusqu'à présent nous avons supposé α différent de zéro et de 2π. Pour achever notre tâche, il reste à trouver la limite de J pour $\alpha = 0$, $\alpha = 2\pi$ et α en dehors de l'intervalle $0\ldots2\pi$.

Pour $\alpha = 0$ on fait

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon^2)f(\theta)\,d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}.$$

La première intégrale à droite donne, d'après ce qui précède, $\pi\lim f(\delta)$ pour limite. Dans la seconde intégrale, on pose

$$\theta = 2\pi - \theta_1.$$

ce qui la transforme en celle-ci,

$$\int_0^{\pi} \frac{(1-\varepsilon^2) f(2\pi - \theta_1)\, d\theta_1}{1 - 2\varepsilon \cos\theta_1 + \varepsilon^2},$$

dont la limite est $\pi \lim f(2\pi - \delta)$.

Donc on a, pour $\alpha = 0$,

(15) $$\lim J = \pi[\lim f(\delta) + \lim f(2\pi - \delta)].$$

Pour $\alpha = 2\pi$, J ne change pas, de sorte qu'on obtient la même valeur de $\lim J$.

Quant aux valeurs de α *en dehors de l'intervalle* $0\ldots 2\pi$, *elles résultent de la périodicité de la fonction* $\lim J = F(\alpha)$.

Le résultat de notre recherche par rapport à cette fonction peut donc s'énoncer ainsi :

La fonction

$$\lim J = F(\alpha) = \frac{1}{2} \lim \int_0^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon^2) f(\theta)\, d\theta}{1 - 2\varepsilon\cos(\theta - \alpha) + \varepsilon^2}$$

est, pour les fonctions $f(\theta)$ *qui n'ont un nombre infini ni de maxima et minima ni de discontinuités, identiquement la même que celle-ci*

$$F_1(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(u)\, du + \cos\alpha \int_0^{2\pi} f(u) \cos u\, du + \ldots$$
$$+ \sin\alpha \int_0^{2\pi} f(u) \sin u\, du + \ldots .$$

Une première différence entre les deux représentations $F(\alpha)$ et $F_1(\alpha)$ s'accuse quand on les applique à des fonctions possédant un nombre infini de maxima et minima. *Alors on trouverait que la première est bien plus générale que la seconde, qui se refuse déjà à représenter certaines fonctions continues, tandis que la première n'exige que l'intégrabilité de* $f(x)$, *et donne* $F(\alpha) = \pi\,[\lim f(\alpha + \delta) + \lim f(\alpha - \delta)]$ *partout où ces limites existent.*

V.

Une autre différence peut être constatée si l'on ne cherche pas seulement les valeurs $\lim_{\varepsilon=1} J(\alpha)$ pour des α fixes, mais plus généralement toutes les valeurs $\lim_{\varepsilon=1,\delta=0} J(\varepsilon, \alpha+\delta)$ pour des relations quelconques entre $1-\varepsilon$ et δ.

Le problème d'établir dans sa conception la plus générale la limite d'une expression analytique ne saurait être considéré comme entièrement résolu si sa *limite mixte*, comme on peut nommer des limites telles que $\lim_{\varepsilon=1,\delta=0} J(\varepsilon,\alpha+\delta)$, n'est déterminée aussi. Ce problème des limites mixtes peut présenter des difficultés très-sérieuses; mais, pour des cas analogues à celui que nous traitons ici, on en trouve facilement la solution au moyen d'une proposition que j'ai communiquée dans les *Annales de Leipzig* (t. VII, p. 251), et dont voici la teneur :

Soient

$$G_+ = \lim_{h=\infty} \int_0^b d\beta\,\Phi(\beta, h),$$

$$G_- = \lim_{h=\infty} \int_{-a}^0 d\beta\,\Phi(\beta, h),$$

des quantités indépendantes de b *et de* a. *On aura généralement*

$$(G_- + G_+) f(x) = \lim_{h=\infty} \int_A^B d\beta\, f(\beta)\,\Phi(\beta - x, h),$$

en supposant $A < x < B$, *et* $f(x)$ *continue entre les limites* A *et* B. *Mais, si* $f(x)$ *prend pour un point* $x = x_1$ *deux valeurs différentes* $f(x_1 - 0)$ *et* $f(x_1+0)$, *on aura*

$$\begin{aligned} &\lim_{h=\infty,\,x=x_1} \int_A^B d\beta\, f(\beta)\,\Phi(\beta - x, h) \\ &= f(x_1+0)\,G_+ + f(x_1-0)\,G_- \\ &\quad + [f(x_1-0) - f(x_1+0)] \lim_{h=\infty,\,x=x_1} \int_0^{x_1-x} d\beta\,\Phi(h,\beta). \end{aligned}$$

Si l'on applique cette formule à la série

$$F_1(\alpha, n) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(u)\,du$$
$$+ \cos\alpha \int_0^{2\pi} f(u)\cos u\,du + \ldots + \cos n\alpha \int_0^{2\pi} f(u)\cos nu\,du$$
$$+ \sin\alpha \int_0^{2\pi} f(u)\sin u\,du + \ldots + \sin n\alpha \int_0^{2\pi} f(u)\sin nu\,du,$$

en posant $n = h$, $x = \alpha$, $x_1 = \alpha_1$, elle devient (*Ann. de Leipzig*, t. VII, p. 254)

$$\lim_{n=\infty,\ \alpha=\alpha_1} F_1(\alpha, n) = \frac{\pi}{2}[f(\alpha_1 + 0) + f(\alpha_1 - 0)]$$
$$+ [f(\alpha_1 + 0) - f(\alpha_1 - 0)] \lim_{n=\infty,\ \alpha=\alpha_1} \int_0^{n(\alpha-\alpha_1)} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

En l'appliquant ensuite à la fonction

$$F(\alpha, \varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon^2) f(\theta)\,d\theta}{1 - 2\varepsilon\cos(\theta - \alpha) + \varepsilon^2},$$

et en posant $\frac{1}{1-\varepsilon} = h$, $x = \alpha$, $x_1 = \alpha_1$, on trouve

$$(16)\quad \begin{cases} \lim_{\varepsilon=1,\ \alpha=\alpha_1} F(\alpha, \varepsilon) = \frac{\pi}{2}[f(\alpha_1 + 0) + f(\alpha_1 - 0)] \\ \quad + [f(\alpha_1 + 0) - f(\alpha_1 - 0)] \lim_{\varepsilon=1,\ \alpha=\alpha_1} \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tang}\frac{\alpha - \alpha_1}{2}\right]. \end{cases}$$

Ces deux formules pour les limites mixtes de $F_1(\alpha, n)$ et $F(\alpha, \varepsilon)$ peuvent être comparées, si l'on suppose les quantités $h = n$, $h = \frac{1}{1-\varepsilon}$ égales.

Soit, par exemple,

$$h = \frac{\pm\rho}{\alpha - \alpha_1},$$

selon que $\alpha \gtrless \alpha_1$, et ρ signifiant une constante arbitraire. Nos deux

formules deviennent

$$\lim_{n=\infty,\,\alpha=\alpha_1} F_1(\alpha, n) = \frac{\pi}{2}[f(\alpha_1 + 0) + f(\alpha_1 - 0)]$$
$$\pm [f(\alpha_1 + 0) - f(\alpha_1 - 0)] \int_0^{\rho} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\,\alpha=\alpha_1} F(\alpha, \varepsilon) = \frac{\pi}{2}[f(\alpha_1 + 0) + f(\alpha_1 - 0)]$$
$$\pm [f(\alpha_1 + 0) - f(\alpha_1 - 0)] \operatorname{arc\,tang} \rho,$$

et donnent évidemment des valeurs de F et F_1 différentes entre elles quand on assigne des valeurs quelconques à l'arbitraire ρ.

Les n[os] IV et V de cet article, notamment les formules (14), (15) (16), contiennent la solution complète du problème proposé.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FOUCAULT (Léon). — Recueil de ses travaux scientifiques, publié par Madame veuve Foucault, sa mère, mis en ordre par C.-M. Gariel, ingénieur des Ponts et Chaussées, et précédé d'une Notice sur les Œuvres de L. Foucault, par J. Bertrand, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. 1 vol. in-4°, xxviii-592 pages, accompagné d'un atlas de 19 Pl. — Paris, Gauthier-Villars, 1878.

AVERTISSEMENT.

En acceptant la pieuse mission de présenter au monde savant le Recueil des Mémoires de Léon Foucault, j'avais songé d'abord à tracer le rapide résumé des ingénieuses inventions qui lui sont dues. Un tel travail serait sans utilité ; la simplicité et la netteté sont les qualités dominantes des pages qui vont suivre, et il suffit de dire au lecteur curieux : Lisez et jugez. Le temps n'est plus où il fallait, pour défendre le génie inventif de Léon Foucault, en montrer le principe et le guide dans une science exacte et profonde ; au moment où une mort prématurée nous l'a enlevé, il avait, depuis bien des années déjà, conquis le rang élevé que la postérité doit lui conserver.

L'histoire de ses études est celle de ses découvertes. Il apprenait en inventant et consultait la Science suivant ses besoins et dans la mesure nécessaire seulement; bien souvent, au début d'une recherche nouvelle, il avait recours à l'érudition de ses amis, et, en se faisant enseigner, sans aucun embarras, les premiers éléments d'une théorie classique, il prenait l'indication des Ouvrages à consulter. Quelques mois après, ceux qu'il avait surpris par l'absence des notions élémentaires dans nos écoles le retrouvaient riche d'une invention ingénieuse et brillante, prêt à en discuter les conséquences et les principes, aussi bien préparé à tenir tête aux savants qu'à éclairer les ignorants.

Léon Foucault ne fut élève d'aucune école ; les études classiques semblaient dans son enfance trop fatigantes pour son esprit rêveur ; il fut un écolier médiocre, et jugea nécessaire, à la fin de ses études, de se faire aider par un répétiteur pour préparer l'examen du baccalauréat.

Il commença ses études en Médecine, mais un Cours de Microscopie, dont il devint l'auditeur assidu et bientôt après l'habile pré-

parateur, lui révéla ses facultés d'expérimentateur. Le professeur était le Dr Donné, qui, sachant apercevoir dans ce jeune homme si habile à monter un appareil un esprit aussi droit que pénétrant, le présenta, dès l'année 1845, comme son successeur, à la rédaction scientifique du *Journal des Débats*. Foucault avait alors 26 ans.

La tâche, périlleuse à plus d'un titre, exigeait beaucoup de science, et Foucault se proposait d'en acquérir; beaucoup de prudence en même temps et de sens critique : il y mêla beaucoup de hardiesse. Toujours attentif à ne pas se compromettre par des jugements erronés ou douteux, ses appréciations n'avaient rien de banal. Entre tant de travaux, non moins différents par le but que par la méthode, il marquait nettement ses préférences, non sans quelque dédain pour la Science, si élevée qu'elle fût, quand elle se déployait sans résultat immédiat et précis.

Malgré l'importance croissante de ses propres travaux, il n'abandonna jamais complétement cette tâche qu'il aimait et dans laquelle la franchise de ses jugements, toujours pleins cependant de convenance et de courtoisie, a éveillé plus d'une rancune et par là peut-être retardé ses succès.

Léon Foucault, associé bientôt à un collaborateur digne de lui, tourna ses premières recherches vers la Photographie, puis vers les questions les plus élevées de la théorie de la lumière, en faisant faire à l'expérience fondamentale des interférences un progrès aussi considérable qu'inattendu. Cette admirable expérience, si justement célèbre dans l'histoire de la Science, fait paraître, on le sait, des raies complètement obscures à la rencontre de deux rayons dont chacun, s'il était seul, donnerait une lumière brillante et pure. L'explication depuis longtemps n'est plus douteuse; l'éther, dont les vibrations propagent la lumière, est excité en sens opposé au point de rencontre des deux rayons qui se contrarient et se détruisent; il suffit pour cela que la différence des chemins parcourus depuis la source commune corresponde à une différence de phase. Dans les expériences antérieures de Fresnel et de Thomas Young, cette différence de marche correspondait à un petit nombre de longueurs d'onde; MM. Fizeau et Foucault, par une disposition ingénieuse et simple, l'ont portée jusqu'à 8000 longueurs d'onde, en ajoutant une preuve nouvelle et brillante à la parfaite précision de la théorie. Arago, si bon juge de ces matières, et glorieusement

mêlé lui-même à l'histoire de ces mémorables découvertes, fit à cet élégant travail le plus chaleureux accueil et commença à espérer que Fresnel aurait des successeurs.

MM. Fizeau et Foucault étaient trop ingénieux l'un et l'autre à inventer de belles expériences, trop habiles en même temps à les réaliser, pour avoir besoin d'aide et d'appui. Leur collaboration, quoique très fructueuse pour leur commune renommée, dut cesser cependant le jour où chacun d'eux, en pressentant des découvertes de premier ordre et se sentant la force de les réaliser seul, voulut s'en réserver la gloire tout entière. Leur séparation, en effet, fut suivie, pour tous deux, d'expériences aussi brillantes que neuves dont le retentissement fut immense. Je n'ai pas à faire connaître ici les admirables travaux de M. Fizeau ; il est moins nécessaire encore d'analyser en tête de ce Volume, où elles sont si bien exposées, les découvertes presque simultanées de Foucault, dirigées bientôt vers des régions entièrement différentes ; on me pardonnera cependant de reproduire ici une Notice écrite en 1864 dans le but très-hautement proclamé d'aider Léon Foucault dans une candidature académique. Le jugement que j'y porte, relu après quatorze ans, me semble strictement équitable ; mon amitié n'a rien exagéré : il sera ratifié, j'en ai le ferme espoir, par le suffrage, aujourd'hui impartial, de tous les juges compétents. Je ne veux rien changer à ces pages, qui ont procuré à Foucault, je suis heureux de citer ses propres expressions, une des joies de sa vie.

Cette joie, hélas! fut une des dernières. Lorsque tout semblait lui sourire et que, compté parmi les maîtres de la Science, il éprouvait et retrempait ses forces dans une lutte, toujours heureuse, avec les difficultés pratiques des problèmes industriels, quelques jours après le succès d'une expérience décisive, il tombait terrassé par un mal sans espoir. Un voile chaque jour plus épais enveloppait sa pensée, intacte jusqu'au dernier jour, en l'obscurcissant sans l'éteindre et l'isolant sans l'affaiblir ; quand elle perçait le nuage qui l'entourait, la mémoire des mots lui manquait. Tout en lui était frappé à la fois ; sa vue rapidement affaiblie lui permettait à peine de reconnaître les amis qu'il invitait encore à venir causer devant lui. « Je comprends tout », disait-il avec effort ; et, par un geste désespéré, il marquait à la fois la fermeté de sa pensée, l'impossibilité de l'exprimer et la triste certitude d'une fin prochaine. Il

n'avait pas achevé sa tâche : de nouvelles et précieuses inventions étaient entrevues et ébauchées ; malheureusement il écrivait peu, et sa famille, en publiant les courtes Notes inédites qu'il a laissées, aura seulement la triste consolation de montrer que la Science, en même temps qu'elle, a fait une perte irréparable et profonde ([1]).

J. Bertrand.

([1]) Jean-Bernard-Léon Foucault naquit à Paris le 19 septembre 1819 ; il était fils d'un libraire que d'intéressantes publications sur l'histoire de France ont fait connaître. Sa vie ne présente d'autres événements à rapporter que les découvertes qu'il a faites ; quelques dates suffiront pour compléter tous les renseignements qui peuvent être intéressants pour la postérité et qui n'ont pas été consignés dans la Notice précédente.

Après avoir passé sa thèse de docteur ès sciences physiques, sur la détermination de la vitesse de la lumière, en 1853, L. Foucault fut nommé physicien à l'Observatoire en 1854 : cette place fut créée pour lui d'après les idées de l'empereur Napoléon III. En 1862, il devint membre du Bureau des Longitudes.

Il avait reçu la croix de la Légion d'honneur après l'expérience du pendule (1851) et il était nommé officier en 1862.

En 1857, il se présentait à l'Académie des Sciences et il obtenait assez de voix pour qu'il y eût ballottage : il échouait cependant. Il l'emportait, en revanche, après une lutte qui se traduisit par trois scrutins successifs, lorsqu'il posa sa candidature une seconde fois en 1865 : il succédait à Clapeyron.

Il était membre correspondant de la Société Royale de Londres, qui lui décerna, en 1855, une des plus hautes récompenses qu'un savant puisse ambitionner : la grande médaille d'or de Copley. Les Académies de Berlin, de Saint-Pétersbourg et la plupart des corps savants de l'étranger l'appelèrent successivement dans leur sein.

En 1867, l'installation de son dernier modèle de régulateur à l'Exposition universelle l'avait vivement préoccupé, par suite des difficultés exceptionnelles qu'il avait rencontrées dans la nature des machines dont il s'agissait de régler la marche : une machine à tisser et une machine à travailler le bois. Les opérations du jury des récompenses, dont il faisait partie, avaient également contribué à le fatiguer. Une cruelle maladie vint le frapper dans le courant du mois de juillet : la paralysie se manifesta d'abord par un léger engourdissement de la main. Il ne se fit pas illusion sur son état et, dès les premiers symptômes, comprit qu'il était perdu. Peu à peu la parole s'embarrassa, la vue fut atteinte, et après sept mois d'un long martyre il mourut le 11 février 1868.

Après sa mort, une Commission, composée de MM. Rolland, directeur général des manufactures de l'État, J. Regnault, directeur de la Pharmacie centrale, professeur à la Faculté de Médecine ; Wolf, astronome à l'Observatoire impérial, Ad. Martin, docteur ès sciences ; Lissajous, professeur au Lycée Saint-Louis, fut chargée de préparer la publication des Œuvres de L. Foucault, par les ordres de l'empereur. Les événements malheureux de 1870 ont mis fin à ces projets.

La mère de L. Foucault, qui conserve pour la mémoire de son fils un pieux et tendre souvenir, a repris l'idée abandonnée par suite de ces désastreuses circonstances : par son ordre, et à ses frais, les travaux scientifiques de L. Foucault ont été réunis, et elle a assuré leur publication, souhaitant seulement, et ce souhait a été rempli, de vivre assez pour voir la réalisation complète de cette pensée, qui sauvegardera l'héritage scientifique d'un homme dont les découvertes ont enrichi la Science. C. M. G.

Des progrès de la Mécanique (¹).

M. LÉON FOUCAULT.

L'Évangile a dit : « Celui qui croit ne sera pas jugé. » Les savants devraient s'inspirer de cette maxime et dire à leur tour : Celui qui trouve ne sera pas jugé. Toute méthode qui fait trouver doit être accueillie avec reconnaissance, et quiconque apporte une vérité nouvelle doit toujours être bien reçu. Les voies de la Science sont infinies, et le plus grand préjudice que l'on puisse lui porter est d'en proscrire quelques-unes en décourageant par un injuste dédain ceux qui les suivent ou les développent. Plus large et plus féconde sera la voie dans laquelle un grand homme aura engagé ses contemporains ou la postérité, plus méritants et plus utiles seront souvent les esprits rebelles qui, refusant le joug, persisteront dans les vieilles méthodes ou sauront s'en créer de nouvelles.

Deux puissants génies ont, à des époques différentes, changé la face de la Géométrie et celle de la Mécanique. Descartes et Lagrange, à deux siècles d'intervalle, ont créé, l'un la Géométrie analytique, l'autre la Mécanique analytique ; ils ont montré comment le Calcul algébrique et l'Analyse infinitésimale embrassent dans leurs combinaisons la solution de tous les problèmes de Géométrie et de Mécanique, sans qu'il soit nécessaire de recourir aux raisonnements faits sur la figure ou inspirés par l'étude profonde des mécanismes, comment on peut espérer d'obtenir la proportion des figures et des mouvements au moyen de règles uniformes qui remplaceraient le génie du géomètre par la patience du calculateur.

La Mécanique a été renfermée dans une seule formule, mais il est difficile de l'en faire sortir : cette haute vérité, qui contient toutes les autres, ne les montre facilement que lorsqu'on les connaît à l'avance. La raison soumise, avant d'être éclairée, y trouve rarement la vue distincte de chaque résultat particulier, et ce n'est pas par là que *ceux qui ne voient pas commenceront à voir*. Parce que Lagrange s'est élevé, par un admirable effort de génie, jusqu'à la source de toutes les vérités de la Science, n'a-t-on plus qu'à se

(¹) Voir *Revue des Deux-Mondes*, 1ᵉʳ mai 1864.

confier au courant en abandonnant le gouvernail pour se laisser doucement et paisiblement descendre? Ce n'est pas ainsi qu'il le faut entendre. Le fleuve n'est pas navigable, et il n'est pas donné à tous de le parcourir sans rencontrer bien des écueils. En présence de cette formule maîtresse qui contient tout, il reste beaucoup à chercher, et pour la transformer en vérités sensibles il faut être doué d'un génie spécial, qui n'est à proprement parler ni celui de la Mécanique ni celui de la Géométrie.

Lors même que les géomètres, réussissant dans cette grande entreprise, atteindraient le but vers lequel, depuis plus d'un demi-siècle, ils s'avancent incessamment, et qui dépasse peut-être la portée de l'esprit humain, la Mécanique ne serait pas absorbée par l'Analyse; les deux sciences, unies d'un lien de plus en plus étroit, n'en resteraient pas moins distinctes et grandiraient l'une par l'autre en se prêtant un mutuel secours. La perfection des méthodes, pas plus là qu'ailleurs, ne pourra jamais suppléer à la puissance du talent, et les grands génies, quoi qu'il arrive, conserveront la possibilité de faire de grandes découvertes.

« Toutes les grandes choses ont leur excès », a dit un illustre écrivain ; cela est vrai, même dans la Science. Quoique l'on ne soit jamais allé jusqu'à rejeter l'étude directe des questions particulières, on s'est trop souvent élevé au-dessus d'elles ; les belles méthodes générales de la Mécanique analytique ont été, pendant quelque temps, suivies d'une manière trop exclusive, et, en s'attachant à montrer ce que les divers problèmes ont d'identique, on s'est exposé à perdre de vue ce qui les distingue les uns des autres. Les géomètres purs, en embrassant avec une savante monotonie l'infinie variété des détails connus dans l'application des formules, en vantant l'élégance et l'uniformité de leurs méthodes, en y pliant peu à peu l'enseignement tout entier de la Science dans tous les pays, ont acquis à leurs procédés préférés une autorité, je dirai presque une tyrannie, sous laquelle les méthodes opposées, plongées dans un sommeil que nul ne troublait plus, semblaient mourir faute d'aliments.

On raconte que, il y a une trentaine d'années à peine, un professeur, curieux des vieilles traditions, avait eu recours aux méthodes du géomètre grec Apollonius pour démontrer par la Géométrie pure les propriétés principales des sections coniques; ses élèves,

avancés déjà dans la Science, mais habitués à rattacher toutes leurs recherches à la méthode de Descartes, exclusivement suivie jusque-là, furent charmés de l'élégance de ces idées nouvelles à leurs yeux et de la facilité inattendue avec laquelle, disaient-ils, l'application de l'*Algèbre* à la Géométrie pouvait se traiter sans *Algèbre*.

Trois hommes supérieurs ont réagi, surtout à notre époque, contre cette exagération d'une idée grande et féconde et contre l'abandon des procédés les plus fins et les plus brillants de l'esprit humain : M. Poncelet, dans son *Traité des propriétés projectives*, et M. Chasles, dans ses nombreux et admirables écrits, ont gagné, vraisemblablement pour toujours, la cause des méthodes qui les ont conduits si haut, tandis que M. Poinsot, dans une série de Mémoires qui resteront d'impérissables modèles d'élégance et de profondeur, montrait que, dans la Mécanique, rien ne dispense de considérer les choses en elles-mêmes, sans jamais les perdre de vue dans le cours du raisonnement. L'étude des beaux travaux que je viens de citer serait intéressante et instructive à plus d'un titre ; mais chaque jour voit augmenter le nombre des lecteurs sérieux qui les considèrent à bon droit comme classiques, et celui qui voudrait aujourd'hui chercher à les défendre contre une appréciation inintelligente et injuste arriverait une trentaine d'années trop tard. Les chefs-d'œuvre sont peu à peu, quoi qu'on fasse, acceptés comme ils doivent l'être ; ils ne changent pas toujours les esprits, mais ils s'imposent à leur attention. Nul n'oserait, par exemple, aujourd'hui contester l'importance et la hauteur des travaux mécaniques de Poinsot ; il semble évident déjà que la postérité doit placer l'illustre auteur de la *Statique* bien au-dessus des contemporains, jadis plus célèbres, qui l'ont si longtemps méconnu. Poisson disait, au sein même, je crois, du Bureau des Longitudes : « Si Poinsot se présentait à l'École Polytechnique, ma conscience ne me permettrait pas de l'y admettre. » La Section de Géométrie, en 1813, était moins sévère dans son jugement et consentait à l'inscrire au troisième rang sur la liste des candidats à la succession de Lagrange : l'Académie le nomma et fit bien. Une exposition de l'ensemble de ses travaux et des idées neuves qu'il a apportées dans la Science aurait été alors une œuvre utile et méritante ; sans avoir aujourd'hui la même raison d'à-propos, elle offrirait encore un intérêt sérieux.

Les travaux que je veux signaler aujourd'hui sont dus à un esprit

fin et délicat dont l'analogie avec celui de Poinsot m'a souvent frappé. Les voies qu'ils suivent sont très-différentes : la science de l'un tend à la pratique, celle de l'autre à la contemplation ; mais ils ont tous deux le même sentiment profond de la réalité ; ils témoignent pour les routes battues le même éloignement, poussé parfois jusqu'à l'injustice ; il considèrent tous deux, avec un dédain que je ne partage pas, les travaux estimables qui, de près ou de loin, ressemblent au devoir d'un bon écolier, et, pour ajouter enfin un dernier trait qui leur est commun, tout ce qui dans la Science ne leur semble pas clair n'existe pas à leurs yeux. M. Léon Foucault se sent capable d'inventer ; absorbé par l'exploitation de ses idées, qu'il creuse consciencieusement, sans se décourager jamais, il ne se croit pas toujours le temps d'amasser des vérités dont l'usage semble encore lointain, et, pour combler les lacunes d'une instruction mathématique très-solide, mais peu étendue, il attend systématiquement que le besoin s'en fasse impérieusement sentir.

On lit dans Galilée un passage très-curieux où, après avoir énoncé le principe des vitesses virtuelles, il déclare, pour toute démonstration, que quiconque niera le théorème ou conservera seulement le plus léger doute prouvera qu'il ne comprend rien à la théorie des machines. M. Foucault prononce avec la même conviction des anathèmes du même genre contre ceux qui contestent l'exactitude de ses conceptions ; il va tout droit où le conduit sa vue, et, comme il est fort clairvoyant, il n'admet pas qu'on le soit moins que lui : ses contradicteurs sont pour lui rebelles à la vérité, et il les accuse de nier l'évidence. S'il se trompait souvent ou seulement quelquefois, on pourrait lui reprocher l'ignorance volontaire des formes classiques ; mais, ses assertions, qui ont tant occupé les géomètres, s'étant toujours trouvées exactes, je vois dans cette ignorance même la preuve d'un mérite original et très-supérieur.

I.

La première invention mécanique de M. Foucault est l'éclatante démonstration qu'il a donnée du mouvement de la Terre, en le rendant sensible à tous les yeux au moyen d'un pendule librement suspendu à un fil. L'influence que la rotation de la Terre devrait exercer sur les phénomènes observables à sa surface a été l'une des

premières objections adressées à Copernic. On énumérait des conséquences très-dures à admettre, qu'il semblait impossible d'éviter après avoir accepté le principe; mais ses partisans ont facilement dissipé ces vaines et chimériques préoccupations et fait triompher la vérité par des réponses complètement décisives. Ils ont montré que, malgré la rotation de la Terre, les oiseaux peuvent s'élever au plus haut des airs et redescendre tranquillement vers leur nid sans que chaque minute les en éloigne de plusieurs lieues, qu'une pierre lancée verticalement de bas en haut ne doit pas retomber à une centaine de pas vers l'ouest, et qu'une armée peut envoyer des balles et des boulets de canon, des flèches même et des javelots contre un ennemi situé à l'est sans que la rotation de la Terre le dérobe à ses coups. Galilée a répondu à ces objections, mais il a légèrement dépassé le but : suivant lui, tous ces phénomènes sont absolument illusoires, et le mouvement rapide qui nous emporte tous est rigoureusement et mathématiquement insensible.

Si la Terre était entraînée par un mouvement de translation, quelque rapide qu'on voulût le supposer, pourvu qu'il fût uniforme, il n'exercerait aucune influence, petite ou grande, sur les phénomènes qui s'accomplissent autour de nous; mais, la Terre tournant autour de son axe, cette rotation doit produire de petites perturbations qui n'ont été analysées que plus tard et peu à peu, et dont M. Foucault a montré pour la première fois les effets avec une incontestable évidence.

Varignon paraît avoir signalé le premier, en 1707, la contradiction géométrique des lois de Galilée sur la chute des corps avec l'hypothèse de la rotation de la Terre et celle d'une pesanteur constante; il se borne à montrer que la réunion de ces trois hypothèses implique contradiction, sans oser décider celle qui doit être modifiée et sans indiquer même ses conjectures; il est à croire d'ailleurs que, s'il se fût prononcé, il n'eût pas bien choisi : son Ouvrage sur la cause de la pesanteur le montre fort mal préparé à traiter de telles questions. On voit sur le frontispice une petite vignette fort élégante représentant deux personnages, un militaire et un religieux, auprès d'un canon braqué vers le zénith; ils regardent en l'air comme pour suivre le boulet qui vient d'être lancé. Sur la gravure même on lit ces mots : « Retombera-t-il? » Le religieux est le célèbre P. Mersenne, et son compagnon est M. Petit, intendant des fortifications.

Ils ont répété plusieurs fois cette dangereuse expérience, et, comme ils ne furent pas assez adroits pour faire retomber le boulet sur leur tête, ils crurent pouvoir en conclure qu'il était resté en l'air, où sans doute il demeurerait longtemps. Varignon ne conteste pas le fait, mais il s'en étonne : « Un boulet suspendu au-dessus de nos têtes, en vérité, dit-il, cela doit surprendre ! » Les deux expérimentateurs, s'il est permis de les nommer ainsi, firent part à Descartes de leurs essais et du résultat obtenu. On sait que l'intrépide philosophe ne demeurait jamais court ; c'était un oracle toujours prêt qui répondait à tous et à tout. Il ne vit dans le fait supposé exact qu'une confirmation de ses subtiles rêveries sur la pesanteur. Plus d'un siècle après, d'Alembert, qui analysa très-nettement le phénomène, calcula la déviation du boulet, en faisant abstraction de la résistance de l'air. Un projectile lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse de 1800 pieds par seconde doit être dévié vers l'est et retomber à 600 pieds de son point de départ ; et c'est, suivant lui, pour l'avoir cherché trop près que Mersenne et Petit n'ont pas retrouvé leur boulet. Mais cette explication n'est pas même admissible : la résistance de l'air, négligée par d'Alembert, exerce une très-grande influence. D'après les calculs de Poisson, une balle de fusil lancée avec une vitesse de 400^m par seconde, qui dans le vide retomberait à 50^m de son point de départ, ne serait déviée dans l'air que de quelques centimètres. L'expérience de Mersenne prouve donc seulement la difficulté de lancer un boulet dans une direction rigoureusement verticale : une balle de fusil serait plus facile à diriger, mais l'erreur de pointage, ajoutée à l'influence des courants d'air, produirait certainement des déviations plus considérables encore que celles qu'il faut mesurer. D'Alembert indiqua dans la même dissertation les effets du mouvement de la Terre sur les projectiles lancés dans une direction quelconque et sur la chute verticale d'un corps pesant abandonné à lui-même. Laplace a repris la question dans la *Mécanique céleste*, et trouvé des résultats semblables. L'illustre Gauss s'en est également occupé. Poisson enfin y a consacré deux longs Mémoires, dont la conclusion générale est que les déviations sont toujours fort petites et exigeraient, pour être constatées, des expériences minutieuses, presque toutes irréalisables.

Les plus célèbres et les plus exactes ont été faites en 1833, dans

les mines de Freyberg, par M. le professeur Reech. Il laissait tomber librement un poids et mesurait la déviation vers l'est; la hauteur de chute était de 158^{m} : la *moyenne* de cent six expériences a donné une déviation de 0^{m},028 environ et trop faible pour être dégagée avec certitude de toutes les influences perturbatrices, en sorte que l'évidence du résultat n'est pas assez frappante pour fermer la bouche aux incrédules. C'est à l'occasion de faits de ce genre et des déductions logiques qui y conduisent que Laplace écrivait : « Quoique la rotation de la Terre soit établie avec toute la certitude que les Sciences physiques comportent, une preuve directe de ce phénomène doit intéresser les géomètres et les astronomes. » Cette preuve sans réplique, M. Foucault l'a apportée à l'Académie des Sciences le 3 février 1851, et, comme l'avait prévu Laplace, elle intéressa vivement les astronomes et les géomètres : elle n'apprit à personne que la Terre tourne et que sa rotation peut modifier les phénomènes dynamiques à la surface, mais elle en montra un effet très-net, très-facile à observer, et qui, grandissant avec le temps, ne pouvait être ni attribué à aucun autre principe ni masqué par les perturbations accidentelles.

Nous croyons devoir reproduire les termes mêmes de la Communication de M. Foucault :

« Les observations si importantes et si nombreuses dont le pendule a été jusqu'ici l'objet sont surtout relatives à la durée des oscillations; celles que je me propose de faire connaître à l'Académie ont principalement porté sur la direction du plan d'oscillation, qui, se déplaçant graduellement d'orient en occident, fournit un signe sensible de la rotation de la Terre.

» Afin d'arriver à justifier cette interprétation d'un résultat constant, je ferai abstraction du mouvement de translation de la Terre, qui est sans influence sur le phénomène que je veux mettre en évidence, et je supposerai que l'observateur se transporte au pôle pour y établir un pendule réduit à sa plus grande simplicité, c'est-à-dire un pendule composé d'une masse pesante homogène et sphérique, suspendu par un fil flexible à un point absolument fixe; je supposerai même tout d'abord que ce point de suspension est exactement sur le prolongement de l'axe de rotation du globe et que les pièces solides qui le supportent ne participent pas au mouvement diurne. Si, dans ces circonstances, on éloigne de sa position d'équilibre la masse du pendule, et si on l'abandonne à l'action de la pesanteur sans lui communiquer aucune impulsion latérale, son centre de gravité repassera par la verticale et, en vertu de la vitesse acquise, il s'élèvera de l'autre côté à une

hauteur presque égale à celle d'où il est parti. Parvenu en ce point, sa vitesse expire, change de signe et le ramène, en le faisant encore passer par la verticale, un peu au-dessous de son point de départ. Ainsi l'on provoque un mouvement oscillatoire de la masse suivant un arc de cercle dont le plan est nettement déterminé, et auquel l'inertie de la matière assure une position invariable dans l'espace. Si donc ces oscillations se perpétuent pendant un certain temps, le mouvement de la Terre, qui ne cesse de tourner d'occident en orient, deviendra sensible par le contraste de l'immobilité du plan d'oscillation dont la trace sur le sol semblera animée d'un mouvement conforme au mouvement apparent de la sphère céleste, et, si les oscillations pouvaient se perpétuer pendant vingt-quatre heures, la trace de leur plan exécuterait dans le même temps une révolution entière autour de la projection verticale du point de suspension.

» Telles sont les conditions idéales dans lesquelles le mouvement de rotation du globe deviendrait évidemment accessible à l'observation; mais en réalité on est obligé de prendre un point d'appui sur un sol mouvant; les pièces rigides où s'attache l'extrémité supérieure du fil ne peuvent être soustraites au mouvement diurne, et l'on pouvait craindre à première vue que le mouvement communiqué au fil et à la masse pendulaire n'altérât la direction du plan d'oscillation. Toutefois la théorie ne montre pas là une difficulté sérieuse et, de son côté, l'expérience m'a montré que, pourvu que le fil soit rond et homogène, on peut le faire tourner assez rapidement sur lui-même, dans un sens ou dans l'autre, sans influer sensiblement sur la position du plan d'oscillation, de sorte que l'expérience, telle que je viens de la décrire, doit réussir au pôle dans toute sa pureté.

» Mais quand on descend vers nos latitudes, le phénomène se complique d'un élément assez difficile à apprécier, et sur lequel je désire bien vivement d'attirer l'attention des géomètres. A mesure que l'on s'approche de l'équateur, le plan de l'horizon prend sur l'axe de la Terre une position de plus en plus oblique, et la verticale, au lieu de tourner sur elle-même comme au pôle, décrit un cône de plus en plus ouvert; il en résulte un ralentissement dans le mouvement apparent du plan d'oscillation, mouvement qui s'annule à l'équateur pour changer de sens dans l'autre hémisphère. Pour déterminer la loi suivant laquelle varie ce mouvement, ou les diverses latitudes, il faut recourir soit à l'Analyse, soit à des considérations mécaniques et géométriques que ne comporte pas l'étendue restreinte de cette Note. Je dois donc me borner à dire que les deux méthodes s'accordent, en négligeant certains phénomènes secondaires, à montrer le déplacement angulaire du plan d'oscillation comme égal au mouvement angulaire de la Terre dans le même temps, multiplié par le sinus de la latitude. »

M. Foucault décrit ensuite l'expérience, dont, comme chacun sait, la réalisation est des plus faciles. Dès la séance suivante, un géomètre habile, membre de la Section de Géométrie, s'empressa de montrer « comment l'expérience importante de M. Foucault aurait pu être indiquée par les équations du mouvement interprétées sans inadvertance ». Les équations qui auraient pu indiquer l'expérience de M. Foucault avaient en effet été formées depuis longtemps : elles indiqueraient bien d'autres choses encore, si l'on savait les faire parler ; mais, interrogées par le célèbre géomètre Poisson, elles lui avaient répondu que « la force perpendiculaire au plan d'oscillation est trop petite pour écarter sensiblement le pendule de son plan et avoir aucune influence appréciable sur son mouvement ». Dubuat, Clairaut et Poleni avaient, avant Poisson, étudié mathématiquement l'influence du mouvement de la Terre sur les oscillations du pendule. Le phénomène si simple et si concluant qui a tout d'abord frappé M. Foucault, à peine entrevu par Poleni, était resté complétement inaperçu de Clairaut et de Poisson.

L'expérience attira l'attention des savants les plus illustres, autant et plus encore peut-être que celle des ignorants ; la Table des *Comptes rendus* de l'Académie porte, en 1851, vingt-six articles au mot *Pendule :* il n'y en avait pas un seul en 1850. MM. Binet, Sturm, Poncelet, Plana, Bravais, Hansteen, Quet, Dumas en ont fait successivement le sujet de leurs études analytiques. Leurs travaux sont de grande valeur, sans doute, mais l'explication la plus nette et la plus élégante du phénomène reste encore celle que M. Foucault donnait à ses amis, en s'aidant, pour plus de clarté, d'une petite boule de bois sur laquelle il avait tracé les lignes qui l'ont aidé à trouver la loi du phénomène.

Si l'expérience pouvait se faire au pôle, il n'y aurait aucune difficulté ; la question est purement géométrique : le plan d'oscillation est invariable. L'observateur, qui tourne avec la Terre sans en avoir conscience, doit attribuer à ce plan fixe un mouvement égal et contraire, et le voir par conséquent exécuter en vingt-quatre heures une révolution complète, en tournant dans le même sens que les étoiles. Mais à toute autre latitude la difficulté est plus grande : le plan d'oscillation ne reste pas immobile. On peut, en effet, regarder comme évident qu'il doit être constamment vertical

et, comme la verticale change de direction, qu'elle décrit en vingt-quatre heures un cône plus ou moins ouvert, suivant qu'on est plus ou moins près de l'équateur, le plan qui la contient à chaque instant est nécessairement un plan mobile dans l'espace. Les apparences sont donc produites ici par la combinaison du mouvement de la Terre avec le mouvement inconnu que va prendre le plan du pendule et qu'il faut déterminer. Or, pour y parvenir, M. Foucault invoque un principe dont la démonstration rigoureuse n'a pas été donnée jusqu'ici, mais qui lui semble évident, comme à Galilée le principe des vitesses virtuelles et comme à Huygens les *postulata* sur lesquels il a fondé la théorie du pendule. Le plan d'oscillation, tout en restant vertical, doit, selon M. Foucault, se placer à chaque instant de manière à faire le plus petit angle possible avec la position qu'il occupait dans l'instant qui précède. Si l'on se donne, en un mot, la position du plan d'oscillation à un certain moment, pour savoir ce qu'il est devenu après un temps très court, $\frac{1}{1000000}$ de seconde par exemple, il faut déterminer la position nouvelle qu'a prise la verticale par suite de la rotation terrestre et chercher, parmi tous les plans qui passent par cette direction, celui qui forme avec le plan primitif le plus petit angle possible. Cette ingénieuse hypothèse conduit très-simplement à la loi tant de fois confirmée : *la rotation du plan d'oscillation est proportionnelle au sinus de la latitude*.

La belle expérience fut rapidement répétée dans l'Europe entière. Les professeurs de Florence l'exécutèrent dès qu'ils en eurent communication et, par une association bien naturelle d'admiration, opérèrent à côté même de la tribune de Galilée. Ils voulurent ensuite chercher dans les procès-verbaux inédits de l'Académie del Cimento si, parmi les nombreuses observations faites sur le pendule, il ne s'en trouverait pas qui eussent trait à l'expérience nouvelle. Ils trouvèrent en effet les lignes suivantes, écrites par Viviani : *Osservammo che tutti i penduli da un sol filo deviano dal primo verticale, e sempre per il medesimo verso*.

L'assertion est très claire. Il n'est pas supposable que les académiciens del Cimento n'aient pas cherché la cause d'un effet aussi extraordinaire; mais c'était une matière délicate, où il était dangereux de prendre parti : ils avaient connu Galilée; les aventures de leur illustre compatriote étaient encore récentes, et der-

rière la question du mouvement de la Terre ils entrevoyaient le Saint-Office. On connaissait son aversion opiniâtre pour certaines vérités, et la critique moderne n'avait pas encore révélé toute sa bienveillante mansuétude. Tout en gardant le silence sur la cause présumée, l'Académie a donné dans ses Mémoires imprimés l'indication, moins précise il est vrai, du même phénomène, et la déclaration d'une ignorance, peut-être volontaire, sur la nature des causes qui le produisent; elle propose de mesurer le temps en comptant directement les oscillations d'un pendule; mais elle conseille de le suspendre à deux fils, parce que le pendule à un seul fil, *quelle qu'en soit la cause*, s'écarte insensiblement de sa direction primitive, et son mouvement ne se fait plus bientôt dans un arc vertical, mais par une spirale allongée dans laquelle les vibrations ne se distinguent plus. Comme le remarque d'ailleurs avec équité le directeur de l'Institut Polytechnique de Florence, ces citations inédites ou obscures et oubliées n'enlèvent rien au mérite du nouvel inventeur, auquel elles étaient, comme à tous les physiciens, restées complétement inconnues.

Rien n'est plus ordinaire que de voir des inventeurs, persuadés qu'ils ont atteint le but aussitôt qu'ils en ont approché, s'arrêter en laissant à d'autres le soin de suivre les conséquences de leur idée et de perfectionner leur œuvre. Un premier succès éteint leur ardeur et satisfait leur curiosité. D'autres au contraire, plus persévérants et plus forts, regardent un premier résultat comme l'occasion d'un nouveau travail; ils marchent avec ardeur vers les vérités entrevues, en montrant incessamment, par l'heureuse abondance de leurs développements et par des preuves continuelles d'habileté, que le hasard n'est pas leur guide.

C'est à cette seconde classe d'inventeurs qu'appartient l'auteur de l'expérience du pendule. Après avoir heureusement résolu un problème réputé si difficile et mis dans une lumière éclatante une expérience inaperçue jadis, dont il ne restait que quelques traces obscures, il a cherché dans des combinaisons nouvelles des preuves plus sensibles encore du mouvement de la Terre, et, par une exacte analyse des forces mises en jeu, il est parvenu à les diriger, en leur faisant produire des effets aussi brillants qu'inattendus. Un homme, enfermé sans boussole dans une chambre et n'apercevant pas le ciel, peut trouver la direction du nord et la latitude du lieu qu'il oc-

cupe. Tels sont les résultats extraordinaires démontrés et réalisés aujourd'hui, et que tous les savants, il y a vingt ans, auraient, sans hésiter, déclarés impossibles.

Frappé, comme tous les géomètres, par l'expérience du pendule, M. Poinsot avait porté son attention sur le moyen de la rendre plus nette encore, en substituant au plan idéal dans lequel se meut le fil un objet matériel dont la rotation de la Terre déterminât le mouvement. La disposition qu'il proposa ne semble pas réalisable, mais elle fut peut-être l'occasion de l'invention du gyroscope. Le but primitif de cet instrument est de suspendre un corps de telle sorte qu'il reste indépendant de la rotation de la Terre et que les supports, tout en entraînant son centre de gravité, ne changent nullement sa direction absolue dans l'espace. Il est clair que cette immobilité réelle, contrastant avec la rotation terrestre, dont nous n'avons pas conscience, produira un mouvement relatif qui mettra celle-ci en évidence; mais il faut pour cela que le système de suspension, permettant au corps tous les mouvements possibles autour de son centre, ne puisse par cela même lui en imposer aucun. Les moyens de réaliser cette condition sont connus depuis longtemps; la recherche n'en était d'ailleurs qu'un jeu pour un mécanicien aussi expérimenté que M. Foucault, et son gyroscope y satisfait avec un art parfait. Si l'on se borne cependant à suspendre une masse de cette manière, l'expérience ne donne aucun résultat; le mouvement relatif ne se produit pas, et c'est le frottement qui l'empêche. On ne peut en effet affranchir le corps de toute attache; si mobile que soit le support, il faut bien qu'il soit appuyé sur quelque chose, et, malgré la finesse de l'exécution, le frottement intervient toujours dans le mouvement relatif des pièces en contact pour le ralentir ou pour l'arrêter. Pour éviter cet inconvénient, d'autant plus grave que les forces qu'il s'agit de mettre en évidence sont plus petites, M. Foucault, avant de suspendre son gyroscope, lui imprime une vitesse de deux à trois cents tours par seconde; cette rotation n'augmente pas la pression sur les supports et les frottements restent les mêmes, mais elle accroît la résistance qui serait nécessaire pour empêcher le mouvement relatif que l'on veut observer, et l'axe du corps peut alors s'arrêter, en semblant par là se mouvoir, puisque tout tourne autour de lui.

L'idée de faire tourner un corps pour affermir la stabilité de son

orientation dans l'espace est extrêmement ingénieuse; elle repose sur un principe que l'auteur regarde comme évident, et qu'il justifie d'ailleurs par des expériences très faciles et très claires. Quelques explications semblent cependant nécessaires pour le mettre dans tout son jour.

Les géomètres anciens ont méconnu la loi d'inertie; c'est pour cela que la Mécanique est une science toute moderne. Un point matériel isolé se meut en ligne droite et d'un mouvement uniforme tant qu'aucune cause étrangère ne vient le troubler. *Nego ullum motum perennem non rectum a Deo conditum esse,* a dit Kepler, et les géomètres ont fait de cet axiome la base solide de la science du mouvement; toutefois, en voulant appliquer ce principe, on rencontre dès les premiers pas bien des difficultés. Les points d'un même corps sont solidaires, leur distance doit rester invariable; si donc on les lance dans des directions différentes, ce qui a lieu lorsqu'on imprime au corps une rotation, il faut absolument qu'ils réagissent les uns sur les autres, en s'imposant en quelque sorte des concessions mutuelles, sinon le corps se brise et vole en éclats; c'est ce qui arrive, par exemple, lorsque dans une machine la roue du volant se trouve lancée avec une trop grande vitesse. Mais les corps solides des géomètres ne se brisent jamais; ils trouvent dans leur rigidité, inflexible par hypothèse, la force nécessaire pour écarter incessamment chaque point de la ligne droite qu'il tend à suivre et qui le séparerait des autres. Le mouvement général qui concilie tout est fort compliqué lorsqu'il s'agit d'un corps irrégulier, et l'on ne s'en fait tout d'abord qu'une idée fort obscure. Poinsot l'a beaucoup éclaircie; c'est là une des questions qui l'ont le plus occupé et, comme il le dit lui-même, une des choses qu'il a le plus désiré de savoir en Mécanique. Dans le cas d'un corps régulier tournant autour de son axe de figure, le phénomène devient d'une extrême simplicité; la rotation persiste indéfiniment avec la même vitesse et se fait toujours autour du même axe tant qu'aucune influence extérieure n'intervient. Pour changer la direction de l'axe, il faut changer celle de toutes les vitesses qui animent les différents points; l'effort nécessaire grandit avec ces vitesses, et l'on peut faire en sorte que, dans l'expérience du gyroscope, les frottements qui restent les mêmes n'aient plus la puissance de le développer. Le corps, suspendu comme nous l'avons dit et animé d'un

mouvement rapide de rotation, conservera donc la même direction dans l'espace; il est soustrait ainsi à la rotation de la Terre, son centre seul y participe; mais, selon notre façon de juger les choses, nous verrons son axe décrire un cône de révolution avec une vitesse telle, que si l'expérience se prolongeait il accomplirait un tour en vingt-quatre heures.

Le système de suspension, légèrement modifié, permet de retirer peu à peu à l'instrument la liberté absolue qu'on lui laisse dans la première expérience; on peut à volonté fixer l'axe du corps dans un plan horizontal ou vertical d'où il ne peut plus sortir, en restant toutefois absolument libre de s'y mouvoir en tous sens. Lorsque le plan choisi est horizontal, l'axe du gyroscope ne peut y rester en équilibre qu'en se dirigeant vers le nord, et c'est autour de cette direction qu'on le voit immédiatement osciller, formant ainsi une sorte de boussole mécanique dans laquelle le magnétisme ne joue aucun rôle. En forçant l'axe du gyroscope à rester dans le plan méridien, on obtient un résultat non moins remarquable : on le voit se diriger parallèlement à l'axe du monde, et il donne la latitude approchée du lieu, indépendamment de toute observation astronomique.

A ces curieux phénomènes, qu'il a expliqués et prévus, M. Foucault en adjoint un grand nombre d'autres dont il serait malaisé de faire ici l'énumération et qui font de son instrument le moyen le plus élégant et le plus net d'étudier la rotation des corps; les lois suivant lesquelles les phénomènes se composent sont rendues visibles en quelque sorte, et l'autorité infaillible de l'expérience confirme, quelquefois même à l'avance, les déductions très-assurées, mais souvent très-cachées, de la Géométrie la plus profonde.

II.

Tout en continuant ses travaux sur la rotation, M. Foucault poursuivait de belles recherches de Physique entreprises depuis longtemps. Je ne veux parler ici que de ses inventions mécaniques, mais toutes les parties de la Science sont étroitement unies; les vérités se prêtent une clarté mutuelle, et la connaissance profonde d'une théorie augmente sur tous les autres points la puissance et les ressources d'un esprit ingénieux.

M. Foucault avait appliqué son génie inventif à la construction des miroirs. Les lunettes, dans lesquelles la lumière des astres est transmise à l'œil par réfraction, étaient préférées depuis longtemps aux télescopes, dans lesquels elle est réfléchie. La construction des miroirs présentait en effet de grandes difficultés : les moindres inégalités ont sur la netteté de l'image une influence bien plus grande que celle d'une incorrection semblable dans la construction de l'objectif de la lunette. La substitution du verre au métal dans la construction des lunettes a été un véritable événement, dont l'initiative appartient en grande partie à M. Foucault. Il a montré l'étonnante efficacité des retouches locales pour perfectionner indéfiniment, sans les recommencer, les surfaces de verre, qui ensuite, argentées chimiquement, fonctionnent à la manière des plus beaux miroirs et donnent à leur foyer d'excellentes images. Pour l'exploration du ciel, un télescope ainsi constitué peut lutter avec une lunette achromatique de même diamètre et coûte environ six fois moins. La matière du miroir est en verre commun, tandis que les cristaux de haut prix doivent former les éléments de l'objectif achromatique; le miroir, en outre, n'a qu'une surface, et l'objectif en a quatre; la distance focale de la lunette étant enfin trois ou quatre fois plus grande que celle du télescope, les frais de montage et d'abri sont augmentés par là dans une proportion qui rend l'achat de l'instrument inaccessible aux particuliers. Le télescope sera donc souvent préféré et tend chaque jour à l'être davantage.

Une fois construit cependant, il faut le diriger vers le ciel pour y contempler l'astre que l'on veut étudier, et, comme le champ de la vision est malheureusement très borné, il faut lui imprimer un mouvement continu pour suivre les astres, qui, se déplaçant à chaque instant, ne seraient visibles dans un instrument fixe que pendant quelques secondes; le télescope doit donc tourner, comme les astres, d'orient en occident, en faisant un tour en vingt-quatre heures. Si l'on songe que le grand télescope construit récemment pour l'Observatoire de Marseille pèse 1000^{kg}, on comprend toute la difficulté d'un tel problème.

La solution obtenue par un mécanisme d'horlogerie serait complétement insuffisante; les impulsions successives, séparées nécessairement par des temps d'arrêt, donneraient à la lunette un tremblement continuel, en faisant pour ainsi dire sautiller l'astre observé

autour du fil auquel on doit rapporter son mouvement, et un tel instrument ne saurait suffire aux observations scrupuleuses et assidues de nos astronomes. Les systèmes le plus habituellement employés peuvent être comparés à des tournebroches plus ou moins perfectionnés et ne donnent aucune précision. Il faut citer néanmoins d'une manière spéciale l'élégant mécanisme appliqué par Gambey au petit équatorial qu'il a construit pour l'Observatoire de Paris; mais, tout en admirant cette ingénieuse solution, les constructeurs l'ont trouvée généralement trop indirecte et trop dispendieuse pour chercher à l'imiter. A Greenwich, le nouvel appareil est mis en mouvement par un mécanisme dont on dit beaucoup de bien et qui cependant ne semble pas pouvoir être adopté : c'est une petite turbine à eau dont la valve est gouvernée par un pendule conique ; mais la nécessité d'un cours d'eau et la possibilité de la gelée sont des inconvénients graves devant lesquels la plupart des Observatoires reculeront très-certainement.

Peu satisfait de ces appareils et de quelques autres proposés ou essayés jusqu'ici, M. Foucault ne désespéra pas de pouvoir résoudre plus simplement ce problème si difficile : il y est parvenu à l'aide d'un principe dont les applications doivent s'étendre dans toutes les branches de l'industrie. Tout le monde connait les boules massives que l'on voit tourner dans toutes les machines à vapeur et qui, s'écartant lorsque la rotation s'accélère, diminuent l'orifice d'admission de la vapeur en modérant la force dès qu'elle est devenue trop grande. L'efficacité de cette disposition est malheureusement trop douteuse et trop lente : on corrige l'effet que l'on veut combattre en lui faisant produire un effet contraire ; les deux causes opposées se choquent confusément, mais rien n'établit entre elles un équilibre rigoureux et ne balance exactement leur contrariété pour donner une solution précise. La vitesse, d'ailleurs, ne peut être modérée que par l'écartement des boules, qui en suppose l'accroissement préalable. L'inégalité est donc imparfaitement corrigée, et elle n'est pas prévenue. M. Foucault, profitant d'une idée déjà émise par l'habile constructeur M. Meyer, de Mulhouse, s'est proposé de rendre la vitesse de rotation de l'appareil indépendante de l'angle d'écartement et de diminuer pour cela le poids des boules par un contre-poids dont l'action augmente quand l'écart est plus grand; il a trouvé les conditions précises d'une compensation rigoureuse,

et des dispositions diverses permettent de les réaliser mathématiquement avec une parfaite justesse : il suffirait, par exemple, de faire descendre le contre-poids sur la courbe tant de fois rencontrée depuis Huygens par les mécaniciens géomètres, et que l'on nomme *cycloïde.* Cette disposition donnerait un instrument théoriquement parfait comme le pendule cycloïdal d'Huygens, mais il n'a pas plu à M. Foucault de l'adopter ; c'est chez lui une maxime absolue que dans un appareil durable et précis on ne doit employer ni chaînes, ni cordages, ni poulies, ni courbes, ni coulisses, ni galets, ni flotteurs, ni liquides, rien autre chose enfin que des contre-poids guidés par des droites articulées. C'est à ces pièces solides et inflexibles qu'il réduit ce que Fontenelle appelait *la matière machinale.* N'acceptant donc ni les courbes, ni les fils, il a remplacé la cycloïde par un système de leviers, préférant à la perfection théorique une disposition plus efficace et plus solide, qui, sans atteindre rigoureusement le même but, satisfait pleinement à toutes les convenances de la pratique.

L'organe principal du régulateur, étant mis en relation avec la machine, indiquera si la vitesse est plus grande ou plus petite que celle qui lui convient. Les boules seront *folles,* et la plus légère variation de vitesse les forcera à s'élever au plus haut ou à se rapprocher jusqu'à toucher la tige. On pourra dire alors, en un certain sens, que l'appareil est régulier par essence et capable d'une seule vitesse. Mais comment lui donner la force nécessaire pour imposer cette vitesse toujours égale et toujours permanente, et communiquer son uniformité ? M. Foucault y parvient en adaptant aux boules un levier qui, guidé par elles, ouvre ou ferme la communication d'un ventilateur avec l'air extérieur, en lui faisant consommer plus ou moins de travail. De là une résistance qui, croissant aussi rapidement que l'on veut, surveille pour ainsi dire la vitesse avec une continuelle vigilance, la gouverne par des efforts toujours efficaces tant qu'ils ne sont pas poussés à l'extrême, et témoigne de sa constance en conservant les boules entre les limites d'écartement arbitrairement fixées. Lorsque l'une des limites est atteinte, l'appareil abdique, et l'on est averti de son impuissance ; mais jusque-là le remède précède le mal, la résistance n'attend pas pour s'accroître que le changement de vitesse se soit produit, et la machine, qui semble douée d'une prévoyance instinctive, se raidit

ou se relâche avec une admirable souplesse pour soulager la puissance motrice ou la tenir en bride en lui mesurant la résistance avec la plus précise exactitude.

La fonderie de Fourchambault, l'usine de M. Sautter, constructeur de phares, et les ateliers de la maison Cail ont appliqué déjà le régulateur. Les conditions deviennent ici très différentes : la force motrice étant la vapeur et non un poids, il est facile de la réprimer directement en réglant l'admission à l'aide du système des boules sans recourir à l'emploi du ventilateur, qui ne serait d'aucune utilité. Le succès a été décisif : on peut arrêter tout à coup le travail; les boules sont agitées un instant, mais la machine, sans ressentir aucun trouble, continue à tourner tranquillement avec une inflexible régularité.

M. Foucault a transformé très-heureusement son appareil en vue d'une application plus importante encore. Sur les bateaux à vapeur, les régulateurs ordinaires sont complétement inefficaces; l'action de la pesanteur, dérangée à chaque moment par les oscillations du navire, ne peut plus donner de résultat utile, et, si pour quelques instants seulement la tempête soulève l'hélice au-dessus de l'eau, la puissante machine, qui conserve sa force tout entière, ne rencontre plus d'obstacles et lance les ailes avec une violence tellement furieuse, qu'elles se brisent parfois en retombant sur la mer. La disposition adoptée concilie l'exactitude avec la simplicité si nécessaire et si difficile à obtenir dans les appareils de ce genre. Le manchon auquel sont attachées les tiges qui portent les boules, au lieu d'être fixe, glisse librement le long de l'axe, et, par un renversement ingénieux, c'est le sommet opposé du parallélogramme articulé qui sert de point fixe. Ce système oblige les boules, quelque soit l'écartement des tiges, à rester dans un même plan horizontal ; leur poids devient alors sans influence sur le mouvement, et l'effet de la pesanteur est annulé. Pour que le cercle décrit par elles soit toujours parcouru dans le même temps, on démontre alors très-aisément que la force centripète qui les sollicite doit être proportionnelle au rayon de ce cercle, c'est-à-dire à la distance des boules à l'axe, et cette condition est très-heureusement et très-simplement remplie à l'aide de ressorts dont l'énergie augmente avec l'écartement, et peut, dans les limites d'écart que permet la machine, lui être considérée comme proportionnelle. L'isochronisme une fois obtenu,

on achève de résoudre le problème comme dans le cas des machines installées à terre.

III.

Pour connaître un écrivain, il suffit, a-t-on dit, d'en lire une page. Ce jugement, qui est fort juste, peut s'étendre à toutes les œuvres de l'esprit ; la *faculté maîtresse,* comme dit M. Taine, apparaît dans toute production originale et personnelle, et, pour la retrouver dans les autres travaux de même origine, il n'est nécessaire d'aucun parti pris.

La Physique a occupé M. Foucault plus longtemps que la Mécanique et avec un succès presque égal. Ce n'est pas mon dessein de passer en revue ses recherches sur l'Optique et sur l'Électricité; dans des sujets divers, on retrouve le même esprit, et j'aurais peu de traits nouveaux à signaler, dans sa manière d'aborder les questions et de les résoudre.

En Physique comme en Mécanique, il montre plus de sagacité que de profondeur : il ne fait pas de travaux d'ensemble, mais des inventions ; il n'apporte pas de théories, mais des faits décisifs et inattendus qui éclairent et confirment les principes. Sans embrasser dans de vastes systèmes l'universalité des causes, il étudie la nature, moins pour en démêler les énigmes que pour en approprier à notre usage les forces les plus cachées, et il cherche moins curieusement enfin à contempler la lumière et à la montrer qu'à la suivre. Il est difficile aujourd'hui d'enseigner la Physique sans le citer souvent avec honneur et sans manier les appareils qu'il a inventés et construits. Ses travaux sur la vitesse de la lumière ont eu un grand retentissement ; il a cherché d'abord à faire réussir une expérience très-importante, mais complétement irréalisable, imaginée par Arago. D'après le programme de l'illustre physicien, l'observation devait porter sur un rayon de lumière réfléchi par un miroir tournant avec une vitesse de mille tours par seconde et lancé par ce miroir à tout hasard pour aller rencontrer, s'il avait ce bonheur, un autre miroir dont la rotation n'était pas moins rapide ; après ces deux réflexions, un observateur attentif et assidu pouvait, suivant un calcul de M. Babinet, nourrir l'espoir fondé d'apercevoir le rayon une fois en trois ans, dans les conditions d'une bonne expé-

rience. L'appareil avait été monté, mais ceux qui avaient regardé n'avaient rien vu, et douze ans s'étaient écoulés sans que les physiciens parvinssent à saisir les rayons fugitifs ; on considérait le projet d'Arago comme une ingénieuse et brillante chimère. M. Foucault l'a réalisé ; il a envoyé le rayon dans une direction fixe, en rendant par là l'expérience très-facile et très-sûre. C'est à Arago que revient sans contredit l'honneur des belles conséquences qui s'en déduisent et qu'il avait prévues ; mais sans M. Foucault nous les attendrions peut-être encore. Après avoir atteint le but et forcé l'admiration des plus difficiles, lui seul ne fut pas satisfait. « Il est douteux, disait-il, que les expériences faites à la surface de la Terre puissent déterminer jamais la vitesse de la lumière avec la même exactitude que la discussion des observations astronomiques. » Ce doute l'a tourmenté pendant treize ans, et, de perfectionnement en perfectionnement, il est parvenu enfin à assigner une vitesse de 72500 lieues par seconde que les physiciens ne contestent pas, et que les astronomes les plus autorisés acceptent comme base de calculs importants, qui ne vont à rien moins qu'à diminuer de plus de 1 million de lieues la distance présumée de la Terre au Soleil.

Citons encore, sans y insister, puisque la Mécanique seule nous occupe, l'interruption des courants électriques obtenus en faisant plonger dans un bain de mercure, recouvert d'une couche d'alcool, le conducteur mû par un ressort métallique qui vibre sous l'influence d'un électro-aimant en fermant et rétablissant le courant avec une régularité parfaite une soixantaine de fois par seconde. La substitution de cet interrupteur aux pièces solides, qui, dans les mêmes conditions, seraient hors de service en quelques minutes, est l'une des inventions qui ont permis au célèbre et habile M. Rühmkorff la construction de ses beaux appareils d'induction. Il est impossible enfin de ne pas rappeler, en terminant, l'appareil régulateur de la lumière électrique, qui, construit d'abord pour imiter le Soleil dans le troisième acte du *Prophète*, a été trop souvent employé depuis pour que l'on songe encore à en citer l'inventeur. Ces travaux si divers montrent tous l'alliance heureuse et bien rare de deux qualités que M. Foucault possède excellemment : la pratique la plus délicate et la plus ingénieuse, unie aux vues théoriques les plus exactes et les plus sûres.

Les industriels ont profité de ses inventions, les géomètres les ont prises pour thèmes de calculs justement admirés; mais ses assertions premières ont été confirmées, elles subsistent dans toute leur étendue, et il serait injuste d'oublier ou de méconnaître les idées simples dont elles sont nées. Quoique la renommée de M. Foucault soit égale à son mérite, on n'a pas jusqu'ici rendu pleine justice à son esprit éminemment mathématique. Les Mathématiques, considérées comme un pur exercice de l'intelligence, l'avaient d'abord peu attiré, et il n'est pas impossible que les vérités abstraites les plus curieuses ne lui aient semblé autrefois que de vaines et stériles subtilités; mais il a bien vite reconnu le lien immédiat et sensible qui les unit aux applications, il a vu en elles la source d'une lumière supérieure et pure qui éclaire les principes de la Physique sans en corrompre la simplicité. Il a demandé des conseils et des inspirations aux beaux travaux de Poinsot : le commerce de ce grand esprit a élargi les vues et grandi le cercle de ses méditations. Son goût très prononcé pour la logique naturelle subsiste toujours, mais il n'est plus exclusif : les procédés de pure intuition ne pouvaient suffire à un inventeur aussi actif et aussi bien doué. Il a compris que toutes les vérités s'éclairent mutuellement sans se gêner jamais et que, comme l'a dit Fontenelle, « il est plus aisé d'apprendre les Mathématiques que d'aller loin sans leur secours ». Nul peut-être ne saurait dire avec plus de précision jusqu'où peuvent conduire les chemins courts et faciles qu'il affectionne, et comment les principes sûrs et infaillibles de la théorie éclairent un esprit bien fait, en lui servant de guide et de flambeau. Sans eux le génie le plus heureux, conduit seulement par sa pénétration et par la logique naturelle, demeure suspendu dans une incertitude continuelle et trouve rapidement des bornes étroites auxquelles M. Foucault s'est heurté autrefois, mais qu'il a franchies depuis longtemps. On lui a reproché de manquer de rigueur, et sans rigueur, nul ne le conteste, il n'y a plus de Géométrie; c'est là une fausse accusation. M. Foucault, on ne doit pas l'oublier, ne professe pas; il ignore l'art de présenter ses inventions selon les formes de l'école; il persuade contre les règles et ne sait pas réduire démonstrativement ses contradicteurs au silence. Cependant, à prendre ses expressions dans la juste étendue de leur sens véritable, toutes ses assertions sont exactes dans les termes mêmes où il les

énonce : il sait toutes les routes de la science du mouvement, il a pénétré au fond de ses théories les plus abstraites, et, pour l'embrasser tout entière, il ne lui manque que la manière de savoir. La langue algébrique lui est peu familière; il la comprend, mais ne la parle pas, et ne sait trop que répondre quand on lui montre ses vérités nouvelles préexistant dans de vieilles formules et découvertes une seconde fois, comme le disait Poinsot, par la méthode qu'on lui dit être la bonne et la véritable. C'est pour cela que, sans être plus modeste qu'il ne faut, il a, je crois, besoin qu'on lui répète très haut et très publiquement qu'il est dans une voie excellente et irréprochable, et qu'il serait bien fâcheux qu'il en changeât. Ses travaux n'empruntent rien aux découvertes récentes de la science analytique; la savante simplicité de ses méthodes aurait été accessible il y a deux cents ans : c'est là son originalité à notre époque et la preuve décisive d'un rare mérite. Lorsque le terrain sur lequel on se place a été longtemps parcouru par des chercheurs aussi instruits qu'empressés, il faut beaucoup de bonheur pour y découvrir des voies nouvelles; si ce bonheur n'accompagne pas toujours le talent, on comprend que sans lui il serait impossible, et, lorsqu'il est plusieurs fois renouvelé, le sentiment équitable des juges éclairés lui accorde un autre nom que l'avenir ne contestera pas, j'en ai la conviction, à l'ensemble des travaux de M. Foucault.

Faut-il pour cela le choisir pour guide et conseiller aux jeunes gens qui cherchent leur voie de suivre son exemple et d'appliquer la méthode d'étude et de recherche qui lui a si bien réussi? Ce serait les engager dans une difficile entreprise et oublier qu'il a été dit : *Qui aime le péril y périra.* L'étude du passé est le guide le plus sûr de l'avenir. A aucune époque peut-être l'instruction scientifique n'a été plus fortement organisée que de nos jours : nos grandes écoles, gardiennes des traditions les plus élevées, la répandent avec abondance et fortifient leurs élèves par des exercices continuels et savamment gradués; des cours publics, conduisant leurs auditeurs jusqu'aux dernières cimes de la Science, leur permettent de satisfaire presque sans travail une légitime et nécessaire curiosité; les théories, exposées et discutées au moment même où elles viennent de prendre naissance, sont rendues claires et intelligibles à tous. On signale les progrès qui restent à accomplir, les calculs qu'il serait utile d'entreprendre, les expériences qui décideraient un

point douteux, et chacun peut, selon ses goûts, ses forces et son degré d'instruction, choisir sa tâche et contribuer à l'œuvre commune. Tout travailleur de bonne volonté est accueilli avec bienveillance; on lui montre la trace de ceux qui l'ont devancé, en lui livrant, pour l'aider à la suivre, toutes les richesses qu'ils ont acquises; des méthodes sûres et longuement éprouvées lui donnent en quelque sorte la certitude du succès; il peut, s'il le veut, avec de tels soutiens, apporter au progrès son modeste contingent et faire les premiers pas dans la route où l'on devient célèbre. Un débutant doit profiter de ces précieux secours : c'est le seul conseil prudent que l'on puisse lui donner, en souhaitant peut-être tout bas qu'il se sente assez fort pour ne pas le suivre.

ENESTRÖM (G.). — FRAMSTÄLLNING AF STRIDEN OM DET ISOPERIMETRISKA PROBLEMET. En monografi af Gustaf Eneström. (Upsala Universitets Årsskrift, 1876). — Grand in-8°, 77 pages (¹).

La querelle à laquelle a donné lieu le problème des isopérimètres a déjà été racontée par Montucla et après lui par d'autres auteurs. Cependant, cette dispute célèbre étant d'un grand intérêt pour l'histoire des Mathématiques, M. Eneström a jugé à propos, dans le travail que nous avons sous les yeux, d'en donner une relation plus détaillée. Il a fait précéder cet historique d'une Introduction, contenant une Notice sur le problème de la courbe brachistochrone, qui a contribué pour une grande part à faire naître cette polémique.

Le problème de la brachistochrone a été posé pour la première fois par Jean Bernoulli dans les *Acta eruditorum* de 1696, et des solutions en ont été données vers cette époque par Newton, Leibnitz, l'Hospital, ainsi que par Jean et par Jacques Bernoulli. M. Eneström expose ces diverses solutions, et en particulier la dernière, qui est la seule complète et purement analytique, et qu'il traduit avec les notations modernes.

(¹) *Histoire de la querelle au sujet du problème des isopérimètres*. Monographie, par G. Eneström. (*Annales de l'Université d'Upsal*, 1876.)

Abordant ensuite le cœur du sujet, il donne l'énoncé du problème des isopérimètres tel qu'il a été formulé par Jacques Bernoulli; il entre dans quelques détails sur les circonstances personnelles qui ont amené la position de la question, et il analyse la correspondance qui s'établit à ce propos entre les deux frères et qui se trouve en grande partie dans les *Acta eruditorum* et dans le *Journal des Sçavans* (1697-1701). Il expose ensuite la substance du travail de Jacques Bernoulli, *Analysis magni problematis isoperimetrici* (Bâle, 1701), dont il donne une transcription en notations modernes, et il rapporte les jugements d'autres critiques sur ce travail. L'opinion de M. Eneström lui-même est que le Mémoire de Jacques Bernoulli est digne des plus grands éloges et que personne avant Euler ne l'a égalé pour la clarté de l'exposition.

L'auteur rend compte ensuite des deux solutions de Jean Bernoulli, dont la première fut envoyée en 1701 à l'Académie des Sciences de Paris, dans un paquet cacheté qui ne fut ouvert qu'en 1706, après la mort de Jacques Bernoulli, et fut insérée dans les *Memoires* de l'Académie. La seconde fut aussi imprimée dans les *Mémoires* de la même Académie pour 1718. M. Eneström fait ressortir à cette occasion les inexactitudes de la première solution. Il termine en résumant les résultats des recherches précédentes, dont nous n'avons pu qu'indiquer ici les traits principaux, et il en conclut que c'est Jacques Bernoulli qui doit être proclamé le vainqueur dans cette lutte; car c'est lui qui a donné une méthode appropriée à la résolution du problème des isopérimètres, tandis que son frère n'a fait que simplifier cette méthode; c'est lui aussi qui s'est montré supérieur à son frère par la courtoisie du langage.

Le tableau de ce combat scientifique est, aux yeux de l'auteur, d'un incontestable intérêt; il offre au géomètre une méthode (bien que ce ne soit certainement pas la plus féconde) pour la solution du problème des isopérimètres, à l'historien un épisode important des premières phases du développement du calcul des variations, et à tous les lecteurs en général une peinture des mœurs du dernier des « âges héroïques de la Science », le XVII[e] siècle.

ENESTRÖM (G.). — DIFFERENSKALKYLENS HISTORIA. I. (Upsala Universitets Årsskrift, 1879). — Grand in-8°, 71 pages.

L'auteur indique d'abord, dans son Introduction, les difficultés particulières que présente l'exposition de l'histoire du Calcul des différences. Ce calcul, à son origine, a été traité en connexion avec le Calcul différentiel; plus tard il a été reporté dans la théorie des séries, et aujourd'hui même il n'est pas encore parvenu complétement à conquérir sa place comme branche spéciale de Calcul. De là la nécessité, pour celui qui veut écrire son histoire, de rassembler des matériaux épars de tous côtés; de là encore les conséquences fâcheuses que ce manque de liaison semble avoir exercées sur son développement.

Le Chapitre Ier contient l'analyse des travaux qui ont préparé la formation du Calcul des différences et qui naturellement ont été à peu près insignifiants jusque vers la seconde moitié du XVIIe siècle. A partir de cette époque, on rencontre principalement quelques formules d'interpolation et quelques propositions sur les séries, où entrent les différences et où l'on fait ressortir en même temps l'importance du Calcul différentiel au point de vue de la méthode.

M. Eneström passe ensuite à la découverte par Taylor du Calcul des différences et expose avec détail les recherches que ce géomètre a publiées dans son Livre intitulé : *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715) et dans les *Philosophical Transactions* (1717). Il ressort de là que Taylor a introduit les termes *incrementum* (= différence), *integralis* et *valor successivus;* qu'il a donné les notations pour les différences et les intégrales,

$$ {}_n x = \Delta^n x, \quad {}^n[x] = \Sigma^n x; $$

qu'il a établi le théorème pour la détermination des différences successives, et appelé l'attention sur la dépendance mutuelle entre les différences et les intégrales; en un mot, qu'il a jeté les fondements de la méthode générale du Calcul des différences. Il a, de plus, fait connaître diverses formules, comme celles qui donnent

$$ u_n, \; u_{x+h}, \; u_{x-h}, \; \Delta x^{(m)}, \; \Delta x^{(-m)}, \; \Delta a^x, $$
$$ \Delta^n (u_x v_x), \; \Sigma x^{(m)}, \; \Sigma x^{(-m)}, \; \Sigma^n (u_x v_x), \; \Sigma [a^x \varphi(x)]. $$

Enfin Taylor s'est même occupé de la théorie des équations aux différences; il a donné une méthode d'intégration pour certaines équations aux différences du premier ordre, et il a appliqué le Calcul des différences à l'interpolation et à la sommation des séries.

D'autre part, on peut, avec M. Eneström, reprocher à Taylor d'avoir trop insisté sur l'analogie entre les différences et les différentielles; ses notations sont souvent peu commodes et son exposition manque de clarté. Malgré ces observations, auxquelles on pourrait encore ajouter quelques autres moins graves, M. Eneström estime que les mérites de Taylor comme fondateur du Calcul des différences doivent faire oublier les imperfections de forme qui rendent si pénible la lecture de ses écrits. Nous ne saurions trop remercier l'auteur de cette intéressante étude d'avoir surmonté ces difficultés et de nous avoir facilité la connaissances des principales découvertes du géomètre anglais, qui n'était guère connu que par la série qui porte son nom.

OBSERVATIONS sur le compte rendu du Mémoire de M. Andréief, intitulé : Des affinités géométriques appliquées au problème de la construction des courbes.

M. Bougaïef a publié, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* (année 1879, p. 35 à 41), une très-intéressante analyse de l'important Mémoire de M. Andréief. Cette analyse renferme une inexactitude qu'il est utile de signaler. Il y est dit (p. 41) que M. Chasles a donné une méthode de construction d'une courbe du troisième ordre dont neuf points sont connus, et que M. de Jonquières a établi quelques principes particuliers pour la construction des courbes du quatrième ordre.

Cette dernière assertion est inexacte. Dans un Mémoire intitulé *Essai sur la génération des courbes géométriques* [1] et publié dans le Tome XVI des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences,* M. de Jonquières a exposé un mode général et uniforme de description des courbes géométriques d'ordre

[1] Paris, Gauthier-Villars, 1858.

quelconque déterminées par un nombre suffisant de points, et il l'a appliqué à la construction de toutes les courbes à points doubles du quatrième degré, à celle de quelques courbes à points multiples du cinquième et du sixième degré, et surtout à celle de *la courbe générale du quatrième ordre déterminée par quatorze points*. Il a donné cinq modes différents de description de cette courbe. Dans le même Mémoire, il a exposé la solution de quelques questions relatives aux intersections de la courbe du quatrième ordre par des lignes droites, des coniques ou des courbes du troisième ordre, ainsi que la construction des courbes du troisième et du quatrième ordre douées d'un point multiple donné de position et d'espèce.

Enfin, dans son Mémoire sur la *généralisation de la théorie de l'involution* (1), il a donné un mode de description de *la courbe générale du cinquième ordre déterminée par vingt points*.

Nous croyons devoir faire remarquer aussi que, dans l'aperçu historique sur le développement graduel de la théorie des transformations au point de vue purement géométrique, M. Bougaïef a omis de citer le Mémoire de M. de Jonquières intitulé : *De la transformation géométrique des figures planes* et inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1864. Ce Mémoire avait été adressé à l'Institut de France en 1859, ainsi que le prouve une Note des *Comptes rendus*, t. XLIX, p. 542.

Ed. Dewulf.

MÉLANGES.

CONSTRUIRE UNE COURBE RATIONNELLE DU QUATRIÈME ORDRE QUI AIT DEUX POINTS DOUBLES EN a_1 ET a_2 ET QUI PASSE PAR LES SEPT POINTS SIMPLES 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

Par MM. Ed. DEWULF, Lieutenant-Colonel du Génie, à Bayonne;
le Dr P.-H. SCHOUTE, Professeur à la Haye (Hollande).

I. Le problème est déterminé, c'est-à-dire qu'il ne peut avoir qu'un nombre limité de solutions. En effet, une courbe du qua-

(1) *Annali di Matematica*. Rome, 1859.

trième ordre est déterminée par quatorze conditions, et les deux points doubles donnés équivalent à six conditions; le point double dont la position n'est pas donnée équivaut à une condition; chacun des sept points simples donnés équivaut aussi à une condition.

Nous ferons usage dans cette étude des notations employées et des principes développés par M. de Jonquières dans son *Essai sur la génération des courbes géométriques* (1), ainsi que de la *Théorie des transformations géométriques* de M. Cremona (2).

II. La question serait résolue si l'on connaissait un point x rendant projectifs les deux faisceaux de coniques

$$(a_1, a_2, x, 6)\,[1, 2, 3, 4, 5],$$
$$(a_1, a_2, x, 7)\,[1, 2, 3, 4, 5].$$

En effet, le lieu géométrique du quatrième point d'intersection P de deux coniques correspondantes

$$(a_1, a_2, x, 6, \mathrm{P}) \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7, \mathrm{P})$$

de ces faisceaux serait une courbe C_4 satisfaisant à la question. On voit aussi que la question, présentée de cette manière, est déterminée, car on a deux inconnues, les coordonnées du point x, et, si l'on établit la correspondance projective des deux faisceaux en faisant correspondre les coniques

$$(a_1, a_2, x, 6, 1) \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7, 1),$$
$$(a_1, a_2, x, 6, 2) \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7, 2),$$
$$(a_1, a_2, x, 6, 3) \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7, 3),$$

on dispose, pour les déterminer, des deux équations qui expriment l'égalité des rapports anharmoniques

$$(a_1, a_2, x, 6)\,[1, 2, 3, 4] \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7)\,[1, 2, 3, 4],$$
$$(a_1, a_2, x, 6)\,[1, 2, 3, 5] \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7)\,[1, 2, 3, 5].$$

Les cinq faisceaux de coniques

$$(a_1, a_2, 6)\,[1, 2, 3, 4, 5]$$

---

(1) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XVI.
(2) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1873, p. 205 et suiv.

déterminent sur une droite quelconque l cinq séries de couples de points en involution. Supposons le point x connu ; les coniques

$$(a_1, a_2, x, 6, 1), \quad (a_1, a_2, x, 6, 2), \quad (a_1, a_2, x, 6, 3),$$
$$(a_1, a_2, x, 6, 4), \quad (a_1, a_2, x, 6, 5)$$

appartiennent respectivement au premier, au deuxième, au troisième, au quatrième et au cinquième faisceau, et les couples de points qu'elles déterminent sur l appartiennent respectivement aux involutions correspondantes. En outre, ces cinq couples de points forment une involution, parce qu'ils appartiennent à cinq coniques du faisceau

$$(a_1, a_2, x, 6).$$

Le même raisonnement peut être appliqué aux cinq faisceaux de coniques

$$(a_1, a_2, 7)\,[1, 2, 3, 4, 5],$$

et l'on voit aisément que les cinq couples de points que l'on obtient ici forment une involution projective avec la précédente.

III. Le problème ci-dessus peut donc être remplacé par le suivant : *Sur une droite l on a deux systèmes de cinq involutions ; on demande de trouver dans chacun des systèmes cinq couples de points appartenant respectivement aux cinq involutions et satisfaisant aux deux conditions suivantes :* 1° *que dans chaque système les cinq couples de points forment une involution ;* 2° *que ces deux nouvelles involutions soient projectives.*

Que l'on prenne un cercle M, un point O sur sa circonférence, et que l'on joigne ce point O aux couples de points de l'une des involutions, on obtiendra un faisceau en involution. Les couples de rayons conjugués de cette involution déterminent sur la circonférence M des arcs dont les cordes concourent en un point b. Si l'on fait la même opération pour les cinq involutions des deux systèmes, les cinq involutions du premier système donneront les cinq points b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 ; celles du second système donneront les points β_1, β_2, β_3, β_4, β_5.

IV. Imaginons deux points p et π tels que les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$$
$$\pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$$

soient projectifs. Les cinq rayons du premier faisceau déterminent sur M cinq arcs dont les extrémités projetées sur l donnent cinq couples de points formant une involution i_p et appartenant respectivement aux cinq involutions qui correspondent aux cinq points b; de même les cinq rayons du second faisceau déterminent sur l cinq couples de points formant une involution i_π et appartenant respectivement aux cinq involutions du second système; et, comme les deux faisceaux p et π sont projectifs par hypothèse, les involutions i_p et i_π sont aussi projectives.

Soient s_1, t_1 et s_2, t_2 deux couples de points conjugués de l'involution i_p; les coniques

$$(a_1, a_2, 6, s_1, t_1) \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, 6, s_2, t_2)$$

se coupent en un point x; le faisceau de coniques

$$(a_1, a_2, 6, x)$$

marque sur la droite l l'involution i_p. L'involution i_π détermine de même un point ξ. Si les points x et ξ se confondaient en un seul, ce point fournirait une solution du problème.

V. Ce problème est donc encore ramené à celui-ci : *Combien peut-on trouver de systèmes de points p et π qui donnent des points x et ξ coïncidents?*

La solution de ce nouveau problème découlera naturellement de l'étude des relations qui lient les points x et p, p et π, π et ξ.

VI. *Système des points p et π.* — Soit p un point quelconque. Si l'on décrit par les points β_1, β_2, β_3, β_4 une conique C_2 capable du rapport anharmonique du faisceau

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4),$$

puis par les points β_1, β_2, β_3, β_5 une conique C'_2 capable du rap-

port anharmonique

$$p(b_1, b_2, b_3, b_5),$$

ces deux coniques, qui ont en commun les points β_1, β_2, β_3, se couperont en un quatrième point π tel, que les rapports anharmoniques de quatre rayons correspondants quelconques des faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$$

sont égaux. Donc, *à un point p correspond un seul point π*. On voit de la même manière qu'à *un point quelconque π correspond un seul point p*.

Quand le point p se confond avec un des points $b_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, la direction pb_i étant indéterminée, la position du point π l'est aussi, et tous les points de la conique Γ_i circonscrite au quadrilatère des points β autres que β_i et capable du rapport anharmonique du faisceau des droites qui joignent b_i aux quatre points b autres que b_i satisfont à la question. Ainsi, *à chacun des points b_i correspondent tous les points d'une conique déterminée Γ_i circonscrite au quadrilatère des quatre points β autres que β_i*. De même, *à chacun des points β_i correspondent tous les points d'une conique déterminée C_i*.

Il est facile de voir que les cinq coniques Γ_i passent par un même point β_0, auquel correspondent tous les points de la conique C_0 circonscrite au pentagone b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, et que les cinq coniques C_i passent par un même point b_0, auquel correspondent tous les points de la conique Γ_0 qui passe par les cinq points β_1, β_2, β_3, β_4, β_5.

Maintenant, quand le point p parcourt une droite quelconque l', le point π doit parcourir une courbe rationnelle (unicursale), puisque les points de cette courbe correspondent un à un à ceux de la droite l'. La droite l' coupant chacune des coniques C_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ en deux points, la courbe des points π passera deux fois en chacun des points β, et cette courbe ne peut avoir d'autres points multiples; on a donc, en représentant par n son degré inconnu,

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 6, \quad \text{d'où} \quad n = 5.$$

Donc, *quand le point p parcourt une droite quelconque l', le*

point π parcourt une courbe Γ_5 ayant six points doubles aux six points β. Il résulte immédiatement de la théorie des transformations birationnelles que, *quand π parcourt une droite quelconque λ, le point p décrit une courbe C_5 ayant six points doubles aux six points b.*

La correspondance des points p et π est birationnelle et du cinquième ordre; les points fondamentaux de la figure (p) sont b_0^2, b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2, b_5^2; ceux de la figure (π) sont β_0^2, β_1^2, β_2^2, β_3^2, β_4^2, β_5^2 (¹). La jacobienne des courbes du réseau C_5 se compose des six coniques C_i, celle du réseau Γ_5 des coniques Γ_i.

On sait que, quand le point p décrit une courbe quelconque C_m, le point π parcourt une courbe C_{5m} ayant des points d'ordre $2m$ aux points fondamentaux β de (π), etc. (²). Cette remarque nous sera utile plus loin. La correspondance entre les points p et π a été exposée dans tous ses détails par M. Rud. Sturm dans un Mémoire intitulé *Das Problem der Projectivität,* inséré au Tome I des *Mathematische Annalen.*

VII. *Système des points p et x.* — Par un point quelconque p et deux des points b, b_1 et b_2 par exemple, traçons deux droites; elles déterminent sur le cercle M deux arcs dont les extrémités, projetées du point O sur la droite l, donnent deux couples de points s_1, t_1 et s_2, t_2. Les deux coniques

$$(a_1, a_2, 6, s_1, t_1), \quad (a_1, a_2, 6, s_2, t_2),$$

qui ont en commun les points a_1, a_2, 6, se coupent en un quatrième point, qui est un point x. Donc, *à un point quelconque p correspond un seul point x.*

Si l'on donne le point x, le faisceau de coniques

$$(a_1, a_2, \sigma, x)$$

détermine sur l une série de couples de points en involution. Projetons ces couples du point σ sur M; chacun d'eux détermine

(¹) La notation b^2 indique que le point b est double.

(²) De Jonquières, *Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. III (*De la transformation géométrique*, etc., nº 13).

une corde et toutes ces cordes vont concourir en un point p. Donc, *à un point x ne correspond généralement qu'un seul point p.*

Remarquons que, pour déterminer le point p, qui correspond à un point x, il suffit de deux coniques quelconques du faisceau

$$(a_1, a_2, 6, x);$$

on peut donc choisir pour ces coniques deux des trois couples de droites que l'on peut tracer par les quatre points a_1, a_2, x, 6.

De cette remarque résulte une construction très simple du point p, qui correspond à un point donné x. Projetons du point O sur M les points d'intersection avec l des droites $a_1 a_2$, $a_1 6$, $a_2 6$, et nommons ces points $e_{1,2}$, $e_{1,6}$, $e_{2,6}$. Supposons que nous prenions pour déterminer le point p les coniques formées par les couples de droites $a_1 a_2$ et $x6$, $a_1 6$ et $x a_2$; il faudra projeter sur M les points d'intersection avec l de $x6$ et de $x a_2$, joindre le premier de ces points à $e_{1,2}$, le second à $e_{1,6}$, et le point d'intersection de ces deux nouvelles droites sera le point p cherché.

Quand le point x décrit une droite quelconque, les rayons passant par les points $e_{1,2}$, $e_{1,6}$ engendrent deux faisceaux projectifs; le point p décrit donc une conique passant par $e_{1,2}$ et $e_{1,6}$; on voit aisément que cette conique passe aussi par le point $e_{2,6}$. Donc, *quand le point x décrit une droite quelconque, le point p décrit une conique circonscrite au triangle $e_{1,2}\, e_{1,6}\, e_{2,6}$.*

Il est facile de voir que, *quand le point p décrit une droite quelconque, le point x décrit une conique circonscrite au triangle $a_1\, a_2\, 6$.*

La correspondance entre les points p et x est donc birationnelle et du second ordre. Les points fondamentaux de (x) sont $e_{1,2}$, $e_{1,6}$, $e_{2,6}$; ceux de (p) sont a_1, a_2, 6. La jacobienne de (x) est formée par les côtés du triangle $e_{1,2}\, e_{1,6}\, e_{2,6}$, celle de (p) par les côtés du triangle $a_1\, a_2\, 6$.

VIII. *Système des points π et ξ.* — On établirait exactement de la même manière que la correspondance entre les points π et ξ est birationnelle et du second ordre, que les points fondamentaux de (π) sont a_1, a_2, 7, ceux de (ξ) $e_{1,2}$, $e_{1,7}$, $e_{2,7}$, que la jacobienne de (π) est formée par les droites $a_1 a_2$, $a_1 7$, $a_2 7$, celle de (ξ) par les droites $e_{1,2}\, e_{1,7}$, $e_{1,2}\, e_{2,7}$, $e_{1,7}\, e_{2,7}$.

IX. *Système des points x et ξ.* — A un point quelconque x correspond un seul point p de la transformation $[p, x]^2$; à ce point p, considéré comme appartenant à la transformation $[p, \pi]^5$, correspond un seul point π; à ce point π, considéré comme appartenant à la transformation $[\pi, \xi]^2$, correspond un seul point ξ. Donc, *à un point quelconque x correspond un seul point ξ*. On voit de la même manière qu'*à un point quelconque ξ correspond un seul point x*.

Quand le point x parcourt une droite quelconque l', le point p correspondant de $[x, p]^2$ décrit une conique C passant par les trois points $e_{1,2}$, $e_{1,6}$, $e_{2,6}$ et ne passant généralement par aucun des points fondamentaux b. A cette conique, considérée comme appartenant à $[p, \pi]^5$, correspond une courbe C_{10} ayant six points doubles aux points β, mais ne passant généralement par aucun des points fondamentaux $e_{1,2}$, $e_{1,7}$, $e_{2,7}$. A cette C_{10} correspond dans $[\pi, \xi]^2$ une courbe C_{20} ayant trois points décuples aux points a_1, a_2, 7, six points doubles aux points β'_0, β'_1, β'_2, β'_3, β'_4, β'_5 qui correspondent aux points β dans la transformation $[\pi, \xi]^2$. Donc, *quand le point x parcourt une droite quelconque, le point ξ décrit une courbe rationnelle de l'ordre* 20, et il résulte de la théorie des transformations birationnelles que *la correspondance entre les points x et ξ est birationnelle et de l'ordre* 20.

Détermination des points fondamentaux et des jacobiennes de la transformation $[x, \xi]^{20}$. — Au point a_1 de (x) dans $[x, p]^2$ correspond une droite fondamentale de (p). A cette droite, considérée comme appartenant à (p) dans $[p, \pi]^5$, correspond dans $[\pi]$ une C_5 ayant des points doubles aux points β. A cette C_5, considérée comme appartenant à (π) dans $[\pi, \xi]^2$, correspond dans (ξ) une courbe Φ_{10} ayant des points quintuples en a_1, a_2, 7 et des points doubles en β'_0, β'_1, β'_2, β'_3, β'_4, β'_5. Donc, *le point a_1 est un point fondamental décuple dans la figure (x) de la transformation* $[x, \xi]^{20}$, *et la courbe Φ_{10} fait partie de la jacobienne de (ξ) et a un point quintuple au point a.*

Le même raisonnement montre que les points a_2 et 6 dans la figure (x), les points a_1, a_2, 7 dans (ξ) sont des points fondamentaux décuples de (x) et de (ξ), et que la courbe fondamentale qui correspond à a_2^{10} passe cinq fois en ce point.

Représentons par b'_0, b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5 les points de (x) qui correspondent aux points b de (p) dans $[p, x]^2$.

Au point b'_i de (x) correspond dans la figure (p) de $[p, x]^2$ le point b_i. Au point b_i de (p), considéré comme appartenant à (p) de $[p, \pi]^5$, correspond dans (π) une courbe fondamentale C_2. A C_2, considérée comme appartenant à (π) de $[\pi, \xi]^2$, correspond dans (ξ) une Φ_4 ayant des points doubles en a_1, a_2, 7. Ainsi, *les six points b' de (x) sont des points fondamentaux quadruples dans $[x, \xi]^{20}$ auxquels correspondent des quartiques ayant des points doubles en a_1, a_2, 7.*

Représentons par $e^p_{1,2}$, $e^p_{1,7}$, $e^p_{2,7}$ les points de (p) qui dans $[p, \pi]^5$ correspondent aux points $e_{1,2}$, $e_{1,7}$, $e_{2,7}$ de (π) et par $e^x_{1,2}$, $e^x_{1,7}$, $e^x_{2,7}$ les points de (x) qui correspondent aux points e^p de (p) dans $[p, x]^2$.

Au point $e^x_{1,2}$, par exemple, de (x) correspond dans (p) de $[p, x]^2$ le point $e^p_{1,2}$. Au point $e^p_{1,2}$ de (p), considéré comme appartenant à $[p, \pi]^5$, correspond dans (π) le point $e_{1,2}$. Enfin, au point $e_{1,2}$, considéré comme appartenant à (π) dans $[\pi, \xi]^2$, correspond une droite dans (ξ). Donc, *les trois points e^x sont des points fondamentaux simples de (x) dans $[x, \xi]^{20}$.*

En résumé, les points fondamentaux de (x) dans $[x, \xi]^{20}$ sont a_1^{10}, a_2^{10}, 6^{10}, $b_0'^4$, $b_1'^4$, $b_2'^4$, $b_3'^4$, $b_4'^4$, $b_5'^4$, $e^x_{1,2}$, $e^x_{1,7}$, $e^x_{2,7}$. Quant aux courbes fondamentales correspondantes, notons seulement que celle qui correspond à a_1^{10} a un point quintuple en a_1 et que celle qui correspond à a_2 a un point quintuple en ce point. Cette remarque nous sera utile dans la conclusion.

X. *Conclusion.* — Puisque la transformation $[x, \xi]^{20}$ est du vingtième ordre, elle a $n + 2 = 22$ points doubles (*Transformations géométriques*, p. 237). Mais il faut observer qu'au point a_1 correspond une courbe fondamentale qui a un point quintuple en a_1; le point a_1 doit donc être compté cinq fois au nombre des points doubles de $[x, \xi]^{20}$, et il en est de même du point a_2. Ces deux points ne pouvant satisfaire à la question, *il y a douze courbes simples du quatrième ordre qui ont un point double en chacun des points donnés a_1 et a_2, un troisième point double en un des douze points ci-dessus et qui passent par les sept points simples* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

A ces douze courbes simples il convient d'ajouter la courbe composée formée de la courbe du troisième ordre déterminée par

les neuf points donnés a_1, a_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et par la droite $a_1 a_2$.

Si l'on considère que les courbes du quatrième ordre assujetties à avoir deux points doubles en deux points donnés a_1 et a_2, à avoir un troisième point double de position non fixée à l'avance et à passer par sept points simples donnés sont déterminées par 13 ou 14 — 1 conditions, on voit qu'elles forment un faisceau dont la base renferme deux points doubles communs à toutes les courbes du faisceau. Le nombre des points doubles des courbes de ce faisceau situés en dehors de la base est donc donné par la formule

$$3(n-1)^2 - 7p,$$

où

$$n = 4 \quad \text{et} \quad p = 2.$$

Dans ce cas,

$$3(n-1)^2 - 7p = 13.$$

Le résultat trouvé plus haut est donc vérifié.

Nous avons présenté au Congrès de Montpellier une autre solution géométrique du problème ci-dessus; nous renvoyons pour cette solution au *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences*.

XI. *Détermination graphique des douze courbes du quatrième ordre.* — 1° Pour déterminer graphiquement les douze points doubles autres que a_1 et a_2 de la transformation $[x, \xi]^{20}$, il faut, d'après la théorie générale des transformations géométriques de M. Cremona (¹), tracer deux courbes du vingt et unième ordre, et ce tracé exige celui des courbes de deux faisceaux du vingtième ordre. Cette opération est impraticable, à cause de sa complication; mais on peut arriver à la détermination des douze points cherchés par un procédé beaucoup plus simple, que nous allons exposer.

Nous allons chercher les points p ou les points π qui conduisent à ces points doubles.

Prenons un point x quelconque que nous considérons comme appartenant successivement aux deux figures (x) et (ξ) de la transformation $[x, \xi]$. Considéré comme appartenant à (x), ce point a pour cor-

(¹) *Loc. cit.*, p. 237.

respondant dans la figure (p) dans $[p, x]^2$ un point p, et, considéré comme appartenant à la figure (ξ), il a pour correspondant un point π de (π) dans $[\pi, \xi]^2$. Si les points p et π ainsi obtenus se correspondaient dans $[p, \pi]^5$, le point x serait un des points doubles cherchés.

Puisqu'il existe douze de ces points doubles, si nous prenons un point quelconque P, il existe douze rayons du faisceau de droites, dont le centre est P, qui passent par ces points doubles. Un quelconque r de ces rayons, considéré comme appartenant à la figure (x) dans $[p, x]^2$, a pour correspondant une conique C_2 de (p). Si le rayon r tourne autour de P, les coniques C_2 correspondantes forment un faisceau dont la base est formée par les points $e_{1,2}$, $e_{1,6}$, $e_{2,6}$ et le point P_p correspondant à P. A ce faisceau de coniques correspond dans la figure (π) de $[p, \pi]^5$ un faisceau de courbes Γ_{10} qui ont des points quadruples aux six points β et dont ces points β et le point P_π, correspondant à P_p, forment la base. Considérons maintenant le faisceau de droites P comme appartenant à la figure (ξ) de $[\xi, \pi]^2$. A ce faisceau correspond dans (π) un faisceau de coniques Γ_2 dont la base est formée par les points $e_{1,2}$, $e_{1,7}$, $e_{2,7}$ et le point P', correspondant à P dans $[\xi, \pi]^2$. Si nous regardons comme correspondantes les courbes des faisceaux Γ_{10} et Γ_2 qui correspondent à un même rayon du faisceau P, ces deux faisceaux engendrent une courbe Γ_{12} sur laquelle se trouvent les points π qui donnent lieu aux points doubles de $[x, \xi]^{20}$. A un autre point quelconque Q correspond pareillement une nouvelle courbe Γ'_{12}, qui renferme aussi les points π qui conduisent aux points doubles de $[x, \xi]^{20}$. Les points π cherchés sont donc au nombre des points d'intersection de Γ_{12} et de Γ'_{12}, et il est facile d'éliminer les points étrangers.

2° Cette construction peut encore être notablement simplifiée en choisissant les points a_1 et a_2 au lieu des points quelconques P et Q. En effet, au faisceau de droites a_1, considéré comme appartenant à (x) dans $[x, p]^2$, correspond dans (p) un faisceau de droites dont le centre est $e_{2,6}$. A ce faisceau, considéré comme appartenant à (p) dans $[p, \pi]^5$, correspond un faisceau de courbes Γ_5 de (π).

Les points β sont des points doubles de la base de ce faisceau, qui est complétée par le point qui correspond à $e_{2,6}$ dans (π).

Au faisceau de droites a_1, regardé comme appartenant à (ξ) dans $[\xi, \pi]^2$, correspond un autre faisceau de droites λ.

Les faisceaux des courbes Γ_5 et des droites λ engendrent une courbe Γ_6 du sixième ordre, si l'on prend comme correspondants les éléments de ces faisceaux qui correspondent à un même rayon r du faisceau a_1, et cette courbe Γ_6 a des points doubles aux six points β.

On trouve de la même manière une courbe Γ'_6 en partant du point a_2; Γ'_6 a aussi des points doubles aux points β.

Ces deux courbes Γ_6 *et* Γ'_6 *ont donc en commun les six points doubles* β *qui sont étrangers à la question, et elles se coupent en* $36 - 4 \times 6 = 12$ *autres points, qui sont les points cherchés.*

3° Les courbes Γ_6 et Γ'_6 sont faciles à construire. Ne nous occupons que de Γ_6.

On connaît, *a priori*, six points doubles de cette courbe : ce sont les points β et deux points simples, le point qui, dans (π) de $[p, \pi]^5$, correspond à $e_{2,6}$ et le point $e_{2,7}$. Il suffit donc de trouver sept autres points simples de cette courbe pour qu'elle soit entièrement déterminée.

Voyons d'abord comment on peut trouver ces sept points. Il faut pour cela tracer deux courbes Γ_5 et les rayons λ correspondants; on obtiendra ainsi dix points, parmi lesquels on en prendra sept.

4° *Construction d'une courbe* Γ_5. — On connaît six points doubles de cette courbe, les points β et un point simple, le point de (π) qui correspond à $e_{2,6}$ dans (p) de $[p, \pi]^5$. On détermine directement un autre point, et la construction de Γ_5 est alors ramenée à la solution du problème suivant :

5° *Construire une courbe du cinquième ordre dont on connaît six points doubles et deux points simples.* — Pour plus de simplicité, nommons a, b, c, d, e, f les six points doubles donnés, 1 et 2 les deux points simples donnés. Les points a^2, b, c, d, e, f déterminent un faisceau de cubiques ayant un point double en a; les courbes de ce faisceau marquent une involution du second ordre sur une transversale passant par f. Par chacun des couples de points conjugués de cette involution et par les sept points b, c, d, e, f, 1, 2, faisons passer de nouvelles cubiques : ces nouvelles cubiques forment un faisceau projectif au faisceau (a^2, b, c, d, e, f), et ces deux faisceaux engendrent une courbe du sixième ordre qui se décompose en une droite et la courbe du cinquième ordre cherchée.

Il nous reste donc le problème suivant :

6° *Construire une courbe du sixième ordre dont on connaît six points doubles et neuf points simples.*

La solution de ce problème se trouve indiquée dans l'*Essai sur la génération des courbes géométriques* de M. de Jonquières [1]. Nous allons la développer ici, en modifiant la démonstration du lemme sur lequel elle repose.

Soient $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ les six points doubles ; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 les neuf points simples donnés. Le problème serait résolu si l'on connaissait deux points x et y rendant projectifs les deux faisceaux

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 1,\ x)\ [3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9],$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 2,\ y)\ [3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9].$$

Que par les sept points $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, 1, et respectivement par chacun des points 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on fasse passer sept séries de cubiques : on déterminera sur une droite L passant par le point a_1 sept séries distinctes de couples de points en involution. Dans chacune des sept séries, il suffira de trouver les intersections de deux courbes avec la droite L et ces intersections peuvent être déterminées par le tracé de coniques en suivant la méthode donnée par M. Chasles [2].

Pareillement, si par les sept points $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, 2, et respectivement par les sept points 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 on fait passer des séries de cubiques, on détermine sur L sept autres séries de couples de points en involution.

Actuellement, si l'on détermine les sept couples de points $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ du premier système et les sept couples de points $A'_1, B'_1, A'_2, B'_2, \ldots$ du second système, qui sont en involution dans chaque système et qui se correspondent un à un, la question sera résolue, car les cubiques

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 1,\ A_1,\ B_1),$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 1,\ A_2,\ B_2),$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 1,\ A_3,\ B_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[1] *Loc. cit.*, § IX, p. 47, deuxième Section.

[2] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLI, § XI, p. 1195 ; décembre 1855.

passent évidemment par un même point x, et, de plus, elles correspondent une à une aux sept cubiques

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 2,\ A'_1,\ B'_1),$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 2,\ A'_2,\ B'_2),$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 2,\ A'_3,\ B'_3),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

qui passent toutes par un même point y.

Dans chacun des systèmes, il suffira de considérer trois courbes et de construire la droite qui passe par les deux points d'intersection inconnus des deux premières, puis la droite qui passe par les points d'intersection inconnus de l'une de ces courbes et de la troisième. Ces deux droites se couperont au point cherché. Ces constructions se feront par la méthode de M. Chasles ([1]).

Le problème est donc ramené au suivant :

Étant données sur une droite sept séries distinctes de couples de points en involution formant un premier système et sept autres séries de couples de points en involution formant un second système, on demande de déterminer quatorze couples de points conjugués appartenant aux quatorze séries respectivement et jouissant des propriétés suivantes, savoir, que les sept couples du premier système soient en involution et correspondent un à un aux sept couples de points du second système, qui doivent pareillement être en involution.

Que l'on prenne un cercle M et sur ce cercle un point fixe O. Les côtés des angles sous lesquels on voit du point O les couples de points conjugués de chacune des quatorze séries interceptent dans le cercle des cordes qui vont toutes concourir en un même point. Soient b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7 les points ainsi obtenus pour les sept premières séries, β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6, β_7 les points donnés par les involutions de la seconde série. Si l'on détermine deux points p et π qui rendent projectifs les deux faisceaux

$$(1) \qquad p(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ b_7),$$
$$(2) \qquad \pi(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_5,\ \beta_6,\ \beta_7),$$

([1]) CHASLES, *loc. cit.*, p. 1193, § VI. Remarque.

les quatorze droites pb et $\pi\beta$ interceptent dans le cercle des cordes qui, vues du point O, se projetteront sur la droite donnée suivant quatorze couples de points qui résolvent le problème proposé.

Nous avons étudié ci-dessus (VI) le système des points p et π qui rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5).$$

Supposons maintenant qu'à chacun de ces systèmes de points b et β viennent s'ajouter de nouveaux points b_6 et β_6, et proposons-nous de trouver les couples de points p et π qui rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6),$$
$$\pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6).$$

D'après le nombre des équations dont nous disposons pour déterminer les coordonnées des points p et π, chacun de ces deux points peut occuper un nombre simplement infini de positions. Cela veut dire que chacun des points p et π se trouve respectivement sur une courbe dont nous allons déterminer le degré.

Les points p et π qui satisfont à la question rendent projectifs les deux couples de faisceaux que l'on obtient en prenant un quelconque des six groupes de cinq points b et les groupes des points β correspondants. Ainsi, par exemple, ces points p et π rendront projectifs les couples de faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5),$$
$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_6) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_6).$$

Nous allons démontrer d'abord que la courbe des points p passe par b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6. Pour cela, désignons par p_5 et π_5 les points p et π qui rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5),$$

par p_6 et π_6 les points qui rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_6) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_6).$$

Au point b_0, considéré comme point p_5, correspondent tous les points d'une conique Γ_0 passant par β_1, β_2, β_3, β_4, β_5. A ce même point b_0,

considéré comme p_6, correspond un point que l'on détermine en décrivant sur β_1, β_2, β_3, β_4 une conique capable du rapport anharmonique

$$b_0(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)$$

(cette conique est précisément Γ_0), et sur β_1, β_2, β_3, β_6 une autre conique capable du rapport anharmonique

$$b_0(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_6);$$

cette conique marque sur Γ_0 le point qui dans les deux transformations $[p_5, \pi_5]^5$ et $[p_6, \pi_6]^5$ correspond au point b_0. Un raisonnement analogue montre que les points b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 et les autres points b_0 qui s'adjoignent aux autres groupes de cinq points b sont sur cette courbe des points p. Il en est de même des points β par rapport à la courbe des points π.

Faisons passer par les points b_1, b_2, b_3, b_4 une conique quelconque C et cherchons en combien de points elle coupe la courbe des points p.

Soit p un point quelconque de cette conique. Pour trouver son correspondant dans $[p_5, \pi_5]^5$, décrivons sur β_1, β_2, β_3, β_4 une conique Γ capable du rapport anharmonique

$$p(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4),$$

puis sur β_1, β_2, β_3, β_5 une conique Γ' capable du rapport anharmonique

$$p(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_5).$$

Les coniques Γ et Γ' ont trois points β_1, β_2, β_3 communs; le quatrième point d'intersection sera le point π_5 cherché.

Le point correspondant de p dans $[p_6, \pi_6]^5$ s'obtient en décrivant sur β_1, β_2, β_3, β_4 la conique capable de

$$p(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)$$

(c'est la conique Γ ci-dessus), puis sur β_1, β_2, β_3, β_6 la conique capable du rapport anharmonique

$$p(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_6),$$

Cette seconde conique marquera sur Γ le point π_6 cherché.

Les points π_5 et π_6 situés sur la même conique Γ sont généralement différents entre eux. Mais la conique Γ est homographique de la conique C, qui passe par p, b_1, b_2, b_3, b_4, et à un point π_5 de Γ correspond un seul point p de C, et par suite un seul point π_6 de Γ. De même, à un point π_6 de Γ correspond un seul point π_5 de cette même courbe. Les points π_5 et π_6 marquent donc des divisions projectives sur Γ, et ces divisions ont deux points doubles. Donc il n'existe sur la conique C que deux points autres que b_1, b_2, b_3, b_4 de la courbe des points p qui satisfont à la question, et à ces deux points correspondent deux points de Γ. Nous concluons donc que *les courbes cherchées des points p et π qui rendent projectifs les faisceaux*

$$p(b_i) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_i) \; (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

sont deux courbes du troisième ordre passant respectivement par les points b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 et par les six points β_0 qui viennent s'adjoindre à chacun des six groupes de cinq points, b_i et par les points β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6 et les six points β_0 qui viennent s'adjoindre aux groupes de cinq points $\beta_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Cela établi, il nous sera facile de trouver les systèmes de points p et π qui rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7),$$
$$\pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7).$$

Le problème est déterminé ; il n'y a qu'un nombre limité de solutions, parce que nous disposons d'autant d'équations qu'il y a d'inconnues.

Pour que ces deux points p et π rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_i) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_i) \; (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),$$

il suffit qu'ils rendent projectifs en même temps les deux couples de faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6), \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6),$$

et

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_7), \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_7).$$

Or, les points p et π qui rendent projectifs les deux premiers faisceaux appartiennent respectivement aux courbes C_3 et Γ_3. De

même, les points p et π qui rendent projectifs le troisième et le quatrième faisceau appartiennent à deux courbes C'_3 et Γ'_3. Les courbes C_3 et C'_3 ont en commun les points b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ainsi que le point b_0 qui s'adjoint au groupe commun b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 et se coupent par conséquent en trois autres points p_0, p'_0, p''_0. Les courbes Γ_2 et Γ'_3 se coupent aussi en trois points π_0, π'_0, π''_0 autres que les points β [1]. En outre, chacun des points p_0 correspond à un des points π_0, comme il est aisé de le voir. Donc *il y a trois couples de points p et π qui rendent projectifs les faisceaux*

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7) \quad [2].$$

Il résulte de là qu'*il existe trois courbes du sixième ordre qui ont six points doubles donnés et qui passent en outre par sept points simples donnés.*

Nous avons trouvé plus haut (XI, 3°) dix points simples de la courbe du sixième ordre au lieu de sept que nous cherchions ; un des trois points non utilisés jusqu'ici servira à reconnaître celle des trois solutions qu'il faut choisir.

(1) Ces trois points se construisent par des intersections de coniques, en suivant la méthode de M. Chasles, *Comptes rendus*, décembre 1855, p. 1190.

(2) *Voir*, au sujet de ces deux dernières questions, DE JONQUIÈRES, *loc. cit.*, p. 22, et RUD. STURM, *loc. cit.*

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

B. BONCOMPAGNI. — Lettera inedita di Carlo-Federico Gauss a Sofia Germain. Firenze, calcografia ed autografia. Achille, Paris, 1879.

La Lettre inédite de Gauss dont M. le prince Boncompagni vient de publier sous ce titre une reproduction photolithographique ([1]) est datée de « Brunsvic, ce 30 april 1807, jour de ma naissance ».

Les circonstances qui ont précédé cette Lettre sont fort romanesques. Sophie Germain avait lié correspondance avec Gauss sous le pseudonyme d'un amateur nommé Leblanc ([2]). Gauss répondait sous le couvert du savant orientaliste Silvestre de Sacy ([3]).

Pendant la campagne de Prusse, un ami de la famille Germain, le général Pernety, fut chargé de diriger le siège de Breslau. Sophie Germain en profita pour recommander au général l'illustre géomètre, qui reçoit bientôt mille politesses du gouverneur de la ville de Brunswick et d'un chef de bataillon nommé Chantel, dépêché à cet effet. Étonné, Gauss demande naturellement à qui il est redevable de ces gracieusetés. On lui nomme une femme : il ne la connaît point. On écrit alors à Paris, et tout s'éclaircit par une Lettre de Sophie Germain ([4]).

La réponse, comme on peut le prévoir, débute par les plus chaudes félicitations et par les témoignages de la plus vive reconnaissance.

Vient ensuite une importante critique de ces deux théorèmes trop généralement énoncés par Sophie Germain :

« Si la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ de deux nombres quelconques est de la forme $hh + nff$, la somme de ces nombres eux-mêmes sera de la meme forme ».

([1]) L'histoire du recueil autographe dont elle est extraite sera prochainement exposée par l'éditeur.

([2]) *OEuvres philosophiques de Sophie Germain*. Édition Stupuy. Paris, 1879, p. 298-302.

([3]) *Ibid.*, p. 302.

([4]) On voit, par le début de la réponse, que cette Lettre fut écrite le 20 février 1807.

« Si l'un des facteurs de la formule $yy + nzz$ (n étant un nombre premier) est de la forme $(1, 0, n)$, l'autre appartient necessairement à la meme forme ».

Enfin, nous remarquons dans cette Lettre les deux énoncés suivants :

I. Soit p un nombre premier de la forme $3n + 1$. Je dis que 2 (c. a d. $+2$ et -2) est residu cubique de p, si p se reduit à la forme

$$xx + 27yy;$$

que 2 est non-residu cubique de p, si $4p$ se reduit a cette forme. P. E.

$$7,\ 13,\ 19,\ 31,\ 37,\ 43,\ 61,\ 67,\ 73,\ 79,\ 97.$$

Vous ne trouverés que

$$31 = 4 + 27, \quad 43 = 16 + 27$$

et

$$2 \equiv 4^3 (\text{mod. } 31), \quad 2 \equiv (-9)^3 (\text{mod. } 43).$$

II. Soit p un nombre premier de la forme $8n + 1$. Je dis que $+2$ et -2 seront residus ou non-residus biquarrés de p suivant ce que p est ou n'est pas de la forme

$$xx + 64yy.$$

Par ex. parmi les nombres

$$17,\ 41,\ 73,\ 89,\ 97,\ 113,\ 137,$$

vous ne trouvez que

$$73 = 9 + 64, \quad 89 = 25 + 64, \quad 113 = 49 + 64,$$

et

$$25^4 \equiv 2 (\text{mod. } 73), \quad 5^4 \equiv 2 (\text{mod. } 89), \quad 20^4 \equiv 2 (\text{mod. } 113).$$

La forme de ces énoncés est certainement inédite. Le premier se trouve, sous une forme beaucoup plus générale, démontré dans le célèbre Mémoire de Jacobi, *De residuis cubicis commentatio numerosa* [1]; le second a été communiqué par Gauss à la Société

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 2, p. 66-69; 1827.

Royale de Göttingue en 1825 (¹) et démontré dans le VIe Volume des *Nouveaux Commentaires* (²).

Les autres passages de cette Lettre peuvent être facilement éclaircis et commentés.

Les notes savantes, dont toutes vos lettres sont si richement remplies, m'ont donné mille plaisirs. Je les ai étudiées avec attention, et j'admire la facilité, avec laquelle vous avez penetré toutes les branches de l'Arithmetique, et la sagacité avec laquelle vous les avez su generaliser et perfectionner.

Outre la Lettre qui est l'objet de cet article, nous possédons de la correspondance de Gauss et de Sophie Germain :

1° Une Lettre de Sophie Germain signée Leblanc, non datée, probablement la première de toutes (³);

2° Une Lettre de Gauss, datée de Brunswick le 20 août 1805 (⁴).

3° La réponse de Sophie Germain (⁵);

4° Une Lettre de Gauss, datée du 16 juin 1806, en réponse à la précédente (⁶);

5° Une Lettre de Gauss, datée du 19 janvier 1808 (⁷).

Entre la première et la seconde des pièces que nous venons de citer, il y a une lacune évidente pour le lecteur; entre la quatrième et la cinquième, il faut placer d'abord la Lettre de Sophie Germain, datée du 22 février 1807, à laquelle Gauss fait allusion au début de sa Lettre du 30 avril; on peut supposer ensuite une réponse à cette Lettre du 30 avril. Ces vides seraient fort regrettables si les quelques fragments inédits qui se rapportent aux *Disquisitiones arithmeticæ,* dans les papiers de Sophie Germain, ne nous offraient un moyen à peu près sûr de les combler.

Depuis cinq ans des travaux astronomiques — auquels pour le dire en

(¹) *Göttingische gelehrte Anzeigen,* der erste Band auf das Jahr 1825, cité par Jacobi (*De residuis cubicis commentatio numerosa*) dans le *Journal de Crelle,* t. 2, p. 66, lignes 10-13; 1827.

(²) *Gauss Werke,* 2ter Band, p. 65 et suivantes.

(³) *OEuvres philosophiques de Sophie Germain.* Édition Stupuy, p. 298.

(⁴) *Ibid.,* p. 306.

(⁵) *Ibid.,* p. 308.

(⁶) *Ibid.,* p. 302.

(⁷) *Ibid.,* p. 318.

passant je dois surtout la heureuse situation, dont j'ai joui pendant la vie de notre duc, le (*sic*) victime malheureux de son attachement fidel (*sic*) à la maison de Prusse.....

Ce duc est le duc Charles-Guillaume-Ferdinand, né le 9 octobre 1735 et mortellement blessé à la bataille d'Auerstaedt (1806); c'est à lui que sont dédiées les *Disquisitiones arithmeticæ*.

Soit p un nombre premier. Soient les $p-1$ nombres inferieurs à p partagés en deux classes

$$\text{A} \ldots 1, 2, 3, 4, \quad \ldots, \quad \tfrac{1}{2}(p-1),$$
$$\text{B} \ldots \tfrac{1}{2}(p+1), \quad \tfrac{1}{2}(p+3), \quad \tfrac{1}{2}(p+5), \quad \ldots, \quad p-1.$$

Soit a un nombre quelquonque non divisible par p. Multipliés tous les nombres A par a; prenés en les moindres residus selon le module p, soient, entre ces residus, α appartenants à A et β appartenants à B de sorte que $\alpha+\beta=\frac{1}{2}(p-1)$. Je dis, que a est residu quarré de p lorsque β est pair, non residu lorsque β est impair.

On peut tirer de cette proposition plusieurs consequences très remarquables; entre-autres, elle donne le moïen d'étendre l'induction, par laquelle on rassemble des cas speciels du theoreme fondamental *aussi loin qu'on veut*, ce qui ne pourroit se faire par les methodes exposés, art. **106-124**.

J'ai donné dans mon ouvrage deux demonstrations rigoureuses de ce fameux theoreme, et j'en possede encor *trois autres* toutes entierement differentes entre elles; deux d'entre elles même peuvent être conduites de deux differentes manieres chaqu'une: ainsi je pourrois soutenir que je peus le demontrer de *sept* manieres differentes. Les autres demonstrations que je prefererois pour l'elegance aux deux données dans mon ouvrage, seront publiées aussitot que j'y trouverai l'occasion.

Des trois démonstrations ultérieures que Gauss mentionne dans ce passage, la première a été communiquée à la Société Royale des Sciences de Göttingue, le 15 janvier 1808, et imprimée dans le XVIe volume des *Commentaires* de cette Société (1); la seconde a été communiquée à la même Société le 24 août 1818 et imprimée dans le Volume I de ses *Nouveaux Commentaires* (2); la troisième

(1) *C.-F. Gauss Werke*, t. II, p. 4-8. Göttingue, 1808.
(2) *Ibid.*, t. II, p. 47-64; 1811.

a été communiquée le 10 février 1817 et imprimée dans le IVe Volume des *Nouveaux Commentaires* (¹).

A propos des corrections suivantes aux *Disquisitiones arithmeticæ* :

Page 146 [cas (4)] l. 21 lisés comme il suit : « Facile vero perspicitur, ex ista aequatione deduci posse haec $a'p\mathrm{R}h$, ...(α), $\pm ah\mathrm{R}a'$... (β), $\pm ah\mathrm{R}p$... (γ). Ex (α) sequitur, perinde ut in (2), h vel utriusque a', p vel neutrius residuum esse. Sed casus prior ideo est impossibilis, quod ex $h\mathrm{R}a'$ et (β) sequeretur $a\mathrm{R}a'$ contra hypoth. Quamobrem necessario est $h\mathrm{N}p$ adeoque, per (γ) $a\mathrm{N}p$. Q. E. D. »

Au reste à la page 144 il se trouve une faute d'impression non indiquée, savoir art. 139, ligne 3, au lieu de $\pm a\mathrm{N}p$, il faut lire $\pm a\mathrm{R}p$.

On peut remarquer que le second *lapsus* a été corrigé dans la traduction française (²).

J'aurois repondu plus tot à votre lettre, mais la decouverte d'une nouvelle planete par Mr. Olbers m'a un peu distrait.

Cette nouvelle planète est *Vesta*, entrevue pour la première fois, comme on sait, le 29 mars 1807 (³).

Par le premier essai que j'ai fait sur son orbite, je trouve son mouvement considerablement plus vite que celui de Cérès, Pallas et Junon, savoir 978″ par jour. L'inclinaison de l'orbite de 7° 6′. L'excentricité 0,1.

Les chiffres exacts sont pour le moyen mouvement de Vesta 909,978″, pour son inclinaison 7° 5′ 49″,5, pour son excentricité 0,097505 (⁴).

Je viens d'achever un ouvrage etendu sur les methodes, qui me sont propres, à determiner les orbites des planetes. Mais quoique je l'aie ecrit en allemand, je trouve beaucoup de difficulté d'y engager un libraire.

Il s'agit dans ce passage du fameux Ouvrage de Gauss imprimé

(¹) *C.-F. Gauss Werke*, t. II, p. 159-164; 1818.

(²) *Recherches arithmétiques*, trad. Poullet-Delisle. Paris, 1807, p. 103.

(³) *Astronomisches Jahrbuch für Berlin*, 1807, p. 211.

(⁴) *Monatliche Correspondenz*, Band XV, p. 590-600; Juni 1807. *Gauss Werke*, t. VI, p. 287.

en latin sous le titre : *Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium*. Hamburgi, sumtibus Friderici Perthes et J.-H. Besser, 1809. Dans une Lettre datée du 19 janvier 1808, Gauss écrit à Sophie Germain (¹).

L'ouvrage sur le calcul des orbites des planètes dont je vous ai parlé dans ma dernière lettre est enfin sous presse. J'espère qu'il sera achevé dans quelques mois. Je n'ai pas redouté la peine de le traduire *en latin* afin qu'il puisse trouver un plus grand nombre de lecteurs.

Ces curieux détails et les précieuses remarques que nous avons citées constituent pour M. le prince Boncompagni un nouveau titre à la reconnaissance des géomètres. C. H.

GRAM (J.-P.). — OM RÆKKEUDVIKLINGER, BESTEMTE VID HJÆLP AF DE MINDSTE KVADRATERS METHODE (²). — Kjöbenhavn, 1879. In-8°, 122 pages.

Soit donnée la forme d'une série convergente à coefficients inconnus, qui doit représenter soit une fonction qui prend des valeurs données pour certaines valeurs de l'argument, soit une fonction donnée, et supposons qu'on veuille se contenter d'un nombre de termes de cette série fixé d'avance. L'auteur s'est proposé de déterminer les coefficients de manière que la série donne alors la meilleure approximation aux valeurs données ou, dans un intervalle donné, à la fonction donnée, ce qui n'a pas lieu ordinairement si l'on prend les coefficients des premiers termes de la série infinie qui représenterait exactement la fonction. L'auteur regarde comme la meilleure l'approximation où la somme des carrés des différences des valeurs données o et de celles qui résultent de la série, ces carrés étant multipliés par les poids v, est un minimum; dans le cas d'une fonction continue, la somme sera remplacée par une intégrale définie.

L'auteur résout son problème en substituant aux fonctions qui

(¹) *OEuvres philosophiques de Sophie Germain*. Édition Stupuy, p. 320.

(²) *Sur des développements en séries au moyen de la methode des moindres carrés*. Thèse soutenue à l'Université de Copenhague.)

forment, aux coefficients inconnus près, les termes de la série donnée, des fonctions linéaires ψ de ces fonctions données, qui dépendent encore du poids v et qui satisfont à la condition

$$\Sigma v \psi_i \psi_k = 0,$$

la somme Σ étant étendue à toutes les valeurs de l'argument pour lesquelles on connaît les valeurs o de la fonction cherchée. En faisant usage de ces nouvelles fonctions ψ, il faut prendre le nombre demandé de termes de la série suivante :

$$y = \frac{\psi_1 \Sigma v \psi_1(o)}{\Sigma v \psi_1^2} + \frac{\psi_2 \Sigma v \psi_2(o)}{\Sigma v \psi_2^2} + \frac{\psi_3 \Sigma v \psi_3(o)}{\Sigma v \psi_3^2} + \ldots.$$

Cette série s'appelle une série d'interpolation.

Si le nombre des termes est égal à celui des valeurs données o, l'expression trouvée sera exacte. On peut se demander si la même chose a lieu dans le cas où la série doit représenter une fonction continue donnée, si l'on prend un nombre infini de termes. Cela dépend de certaines conditions de convergence discutées par l'auteur.

L'auteur applique les développements trouvés à des fonctions continues données. La série, devant remplacer dans l'intervalle depuis 0 à 1 (et d'autres intervalles donnés peuvent se réduire à celui-ci) une série développée suivant des puissances de x, sera développée suivant des fonctions sphériques. Les séries de Fourier et les développements suivant des fonctions de Bessel ou des fonctions cylindriques sont aussi des séries d'interpolation. Ces développements utiles se présentent ainsi d'un point de vue commun.

L'auteur applique ensuite sa méthode à des fonctions dont les valeurs sont données pour des arguments équidistants et à des égalisations de résultats numériques trouvés par observation.

HEIBERG (J.-L.). — QUÆSTIONES ARCHIMEDEÆ. Inest de arenæ numero libellus. — Hauniæ, 1879. In-8°, 168 pages en latin et 30 pages en grec [1].

L'auteur philologue, qui prépare une édition grecque des œuvres

---

(1) Thèse soutenue à l'Université de Copenhague.

d'Archimède, s'occupe ici de la vie, des écrits, des machines, de l'Arithmétique et du dialecte du grand géomètre grec, et ajoute, comme spécimen de l'édition qu'il se propose, sa restauration du texte grec du Mémoire sur le nombre des grains de sable (*Arenaria*). Le Chapitre sur l'Arithmétique d'Archimède, où il expose et critique, par exemple, les différentes hypothèses sur le calcul des racines carrées d'Archimède, montre qu'il possède les connaissances mathématiques, et en particulier des Mathématiques de l'antiquité, indispensables pour la tâche qu'il s'est proposée.

KLEIN (F.). — WEITERE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DAS IKOSAEDER. — Mathem. Ann., t. XII, p. 503-560.

GORDAN (P.). — UEBER DIE AUFLÖSUNGEN DER GLEICHUNGEN 5-TEN GRADES. — Math. Ann., t. XIII, p. 375-404.

KLEIN (F.). — UEBER DIE TRANSFORMATION DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN UND DIE AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN 5-TEN GRADES. — Math. Ann., t XIV, p. 111-172.

On a rendu compte dans le *Bulletin* des recherches faites antérieurement sur les formes binaires qui se reproduisent par des transformations linéaires; on a indiqué comment l'étude de la forme binaire du douzième degré, représentée géométriquement par les douze sommets d'un icosaèdre régulier, se relie étroitement à la théorie de l'équation générale du cinquième degré (1). C'est cette connexion même entre les deux questions que M. Klein et M. Gordan ont prise pour point de départ de leurs recherches sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Dans le premier des Mémoires dont nous rendons compte, on montre comment les soixante mouvements de rotation qui ramènent l'icosaèdre sur lui-même se décomposent en douze sous-groupes et comment on est ainsi conduit à une résolvante du cinquième degré. La liaison de

---

(1) D'un autre côté, ces recherches trouvent une application directe dans la théorie des équations linéaires du second ordre intégrables algébriquement.

cette dernière avec les racines de l'*équation icosaédrique* conduit aux développements algébriques obtenus par MM. Kronecker et Brioschi et dont une partie était restée sans démonstration, et fournit une méthode très simple qui ramène au problème de l'icosaèdre la résolution de l'équation générale du cinquième degré.

Dans son Mémoire, M. Gordan obtient explicitement l'expression des racines d'une équation du cinquième degré au moyen des irrationnelles icosaédriques, et cela sous une forme appropriée au calcul numérique. Les méthodes algébriques étant ainsi exposées et poussées suffisamment loin, M. Klein, dans le dernier Mémoire, tourne ses efforts du côté des fonctions elliptiques; pour approfondir la question, il est nécessaire de donner à la théorie de la transformation des fonctions elliptiques une base nouvelle : le travail de M. Klein sert ainsi de transition à des recherches ultérieures (¹).

On peut dire, en premier lieu, comme résultat définitif de ces divers travaux, que la forme binaire du douzième degré représentée géométriquement par l'icosaèdre constitue la base véritable d'une théorie rationnelle de l'équation du cinquième degré. En second lieu, les remarques qui suivent ne sont pas sans importance pour la théorie des équations algébriques.

1° Le fondement de toutes les recherches sur les équations algébriques se trouve dans la théorie de Galois ; mais cette théorie ne fournit pas tous les éléments dont on a besoin pour le problème de la résolution. Deux équations peuvent avoir le même groupe (au sens de Galois) sans qu'il soit possible de passer rationnellement de l'une à l'autre, et la résolution d'une des équations peut être essentiellement plus facile que celle de l'autre : par exemple, l'équation icosaédrique est une équation du soixantième degré, dont le groupe embrasse soixante substitutions ; elle est, au sens de Galois, sa propre résolvante ; l'équation générale du cinquième degré, en lui adjoignant la racine carrée de son discriminant, a le même groupe ; mais il n'est pas possible de la réduire à une équation icosaédrique tant qu'on ne lui a pas adjoint au moins une telle *racine carrée*, laquelle n'a aucune influence sur le caractère du groupe de

(¹) *Ueber die Transformation 7-ten Ordnung der elliptischen Functionen* (*Math. Ann.*, t. XIV).

Galois. Un travail de M. Kronecker, de 1861, contient déjà des résultats analogues.

2° La théorie des invariants joue également un rôle important dans les mêmes recherches ; mais les choses ne se passent pas comme pour les équations des deuxième, troisième et quatrième degrés ; pour ces équations, il est avantageux de regarder le premier membre comme une forme binaire et d'étudier cette forme dans le sens de la théorie des invariants. C'est de cette façon que, dans les travaux de M. Brioschi et de M. Hermite, est traité le premier membre de l'équation du cinquième degré, dont les invariants servent de point de départ aux recherches ultérieures. Mais les méthodes qui réussissent pour les équations dont le degré est inférieur à 5 ne présentent plus le même avantage quand on veut les appliquer aux équations de degré supérieur. Les racines de l'une des premières équations jouissent en effet de cette propriété de pouvoir se permuter au moyen de transformations linéaires binaires, ce qui n'a plus lieu pour l'équation du cinquième degré. Il est beaucoup plus avantageux de relier les équations de degré supérieur à des formes qui se reproduisent par des transformations linéaires, mais qui ne sont plus nécessairement binaires. Pour l'équation du cinquième degré, il existe encore, en fait, une telle forme binaire ; seulement elle est du douzième degré. Le système qui, au sens de la théorie des invariants, appartient à cette forme, et qui d'ailleurs possède le caractère le plus simple, joue dans ces recherches le rôle le plus important.

1. L'icosaèdre est une forme binaire déterminée du douzième ordre $f(z_1, z_2) = 0$, dont le système complet se réduit au hessien H et au déterminant fonctionnel $(f, H) = T$, dont le carré s'exprime linéairement au moyen de f^5 et de H^3 ; on peut donner à f la forme canonique

$$f = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}), \tag{1}$$

et l'on a

$$T^2 = 12 f^5 - 12^4 H^3. \tag{2}$$

On peut énoncer ainsi le problème fondamental : *Étant données les valeurs de f et de T, trouver les valeurs correspondantes de z_1,*

η_2. Une fois ce problème résolu pour la forme canonique, il l'est aussi pour la forme générale. Le rapport $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ dépend, à cause de l'équation (1), d'une équation du soixantième degré ; c'est cette équation que l'auteur appelle *équation icosaédrique*. Elle a la forme suivante, quand on emploie la forme canonique :

$$(3) \qquad \frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad 1728\,\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X.$$

Dans le cas général, au contraire, elle est

$$(3\,bis) \qquad -\frac{5 \cdot 144 \cdot H^3(\eta_1, \eta_2)}{7 \cdot B f^5(\eta_1, \eta_2)} = X,$$

où B est un invariant rationnel et du premier degré par rapport aux coefficients de f, X est le *paramètre* de l'équation icosaédrique. La propriété capitale de cette équation consiste en ce que les soixante racines $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ se déduisent d'une racine quelconque au moyen de substitutions linéaires, indépendantes de X. Pour la forme canonique, les racines sont

$$0, \quad \infty, \quad (\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^\nu, \quad (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^\nu, \quad \left[\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right],$$

d'où l'on déduit les soixante substitutions

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \eta' = \varepsilon^\nu \eta, \\ \eta' = -\dfrac{\varepsilon^\nu}{\eta}, \\ \eta' = \varepsilon^\mu \dfrac{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\nu}{\eta - \varepsilon^\nu(\varepsilon + \varepsilon^4)}, \\ \eta' = -\varepsilon^\mu \dfrac{\eta - \varepsilon^\nu(\varepsilon + \varepsilon^4)}{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\nu}, \\ (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4). \end{array}\right.$$

Ces substitutions, au moyen de transformations linéaires, donnent les substitutions correspondantes pour la forme générale. De ce groupe de soixante substitutions d'une variable unique η on peut déduire un groupe de soixante couples de substitutions binaires à

déterminant $+1$, en remplaçant η par $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ et η' par $\frac{\eta'_1}{\eta'_2}$ et en séparant les numérateurs et les dénominateurs.

Toute fonction des racines de l'équation icosaédrique peut, au moyen des formules (4), s'exprimer au moyen d'une seule racine. Ces substitutions (4) forment le groupe de Galois pour l'équation icosaédrique. On obtient immédiatement les résultats suivants au moyen de la représentation conforme (Schwarz, *Journal de Borchardt*, t. 70). La sphère des η est décomposée par les plans de symétrie de l'icosaèdre en cent vingt triangles alternativement égaux et symétriques dont les angles sont $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}$; les soixante triangles d'une espèce, les soixante triangles de l'autre représentent les demi-plans positifs ou négatifs des X. Les soixante racines d'une équation icosaédrique sont toujours représentées par soixante points homologues des triangles correspondants et les permutations dans le groupe de Galois s'obtiennent par les soixante rotations qui ramènent l'icosaèdre sur lui-même. Au moyen de ces soixante rotations, on peut former des sous-groupes de 2, 3, 5, 4, 6, 10, 12 substitutions, dont les trois premiers appartiennent au type de la division du cercle, les trois suivants au type de la double pyramide, et le dernier au type du tétraèdre. Les groupes de points qui, pour ces sous-groupes, restent invariables fournissent des résolvantes de l'équation de l'icosaèdre, et les degrés de ces résolvantes sont respectivement 30, 20, 12, 15, 10, 6, 5.

On obtient une résolvante du sixième degré au moyen des six couples de points opposés de l'icosaèdre. Soit $\varphi(\eta_1, \eta_2) = 0$ un tel couple de points, dont le déterminant soit égal à $+5$, $z = \varphi^2$ sera une fonction à six valeurs, racine de l'équation

$$z^6 - 10 f z^3 + 144 \mathrm{H} z + 5 f^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est égal, sauf un facteur numérique, à T^4. Lorsque l'on donne, comme on l'a supposé, la valeur de T, on connaît ainsi la racine quatrième du discriminant; dans les autres cas, la racine carrée de ce discriminant est connue rationnellement. Cette équation est un cas spécial de l'équation du multiplicateur de Jacobi pour la transformation du cinquième ordre dans la théorie des fonctions elliptiques, et c'est là le point de

départ des recherches de M. Kronecker sur la résolution de l'équation du cinquième degré.

La résolvante du cinquième degré correspond au sous-groupe du type du tétraèdre. Pour un tel sous-groupe, douze rotations laissent invariables deux tétraèdres réguliers τ_1 et τ_2 formant ensemble les arêtes d'un cuboïde (*Würfel*) W, puis un octaèdre t et l'agrégat des douze points correspondants. Mais pour les fonctions les plus simples qui soient racines de la résolvante du cinquième degré, on doit évidemment choisir $t(\eta_1, \eta_2)$ et $W(\eta_1, \eta_2)$, parce que ce ne sont pas les fonctions $\tau_1(\eta_1, \eta_2)$ et $\tau_2(\eta_1, \eta_2)$ qui se reproduisent, mais bien leurs cubes. On obtient les cinq octaèdres $t(\eta_1, \eta_2)$ au moyen de l'équation du cinquième degré

$$(6) \qquad t^5 - 10t^3f + 45tf^2 - 12T = 0,$$

qui est un cas particulier de la résolvante de Brioschi pour l'équation de Jacobi du sixième degré; quant à l'équation en W, elle est

$$(7) \qquad W^5 + 40f^2W^2 - 720fHW + 12^4H^2 = 0.$$

Des valeurs de t_ν et de W_ν on déduit, par le procédé suivant, une résolvante générale dont les racines y satisfont aux conditions $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$. Posant

$$(8) \qquad \begin{cases} \sigma_\nu = 24f^2 - 7ft_\nu^2 + t_\nu^4 \\ y_\nu = \dfrac{\lambda f W_\nu}{H} + \dfrac{\mu\sigma_\nu}{f^2}, \end{cases}$$

où λ, μ sont des constantes arbitraires, on obtiendra une équation du cinquième degré

$$(9) \qquad y^5 + 5Ay^2 + 5By + C = 0,$$

dont les coefficients dépendent seulement du paramètre

$$X = 1728\,\frac{H^3}{f^5}.$$

En choisissant le rapport $\dfrac{\lambda}{\mu}$ de façon que $A = 0$, ce qui exige la résolution d'une équation du troisième degré, cette équation prendra la forme donnée par Jerrard.

Pour étudier l'équation générale (du sixième degré) du multiplicateur de Jacobi, équation qu'il introduit dans la seconde Partie de son Mémoire, M. Klein part encore du problème icosaédrique sous la forme canonique :

Étant donné un icosaèdre sous la forme canonique, ainsi que les valeurs numériques des invariants simultanés que possède cet icosaèdre, joint à une certaine forme quadratique

$$q = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2,$$

on se propose de déterminer les coefficients de cette dernière forme.

Le système simultané se compose du discriminant $A = A_0^2 + A_1 A_2$ de la forme quadratique et de trois formes B', C', D, entre lesquelles existe une relation. Le problème, en lui-même, admet soixante solutions, et, si l'on connaît une des formes quadratiques qui constituent ces solutions, on obtient les cinquante-neuf autres en appliquant à x_1, x_2 les cent vingt substitutions binaires icosaédriques.

On n'obtient ainsi que soixante formes, parce qu'à une substitution binaire en correspond une autre obtenue en changeant seulement le signe des variables. Ce groupe de substitutions est encore le groupe de Galois du nouveau problème.

En regardant les coefficients de la forme quadratique comme les coordonnées trimétriques d'un point d'un plan, on obtient une figure liée étroitement à la représentation plane de la *surface diagonale* du troisième ordre de Clebsch.

Si la forme quadratique est le carré d'un binôme, en sorte que

$$q = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = (\eta_1 x_2 - \eta_2 x_1)^2,$$

le point $A_0 : A_1 : A_2$ se trouve sur la conique $A = 0$, dont les points représentent le système de quantités $\eta_1 : \eta_2$. La forme $B = 0$ représente un système de quinze droites obtenues en joignant les six points fondamentaux qui répondent à la séparation de f en facteurs du second degré ; cette figure forme dix hexagones de Brianchon.

Les courbes $B' = 0$, $C' = 0$ ne s'interprètent pas aussi simplement ; mais, à l'aide de l'équation $A = 0$, on peut les modifier de

manière qu'elles aient aux points fondamentaux des points multiples de l'ordre le plus élevé possible. On obtient ainsi deux expressions B et C qui, égalées à zéro, représentent des courbes de degrés 6 et 10, d'espèces 4 et 0, ayant aux points fondamentaux : la première, des points doubles ; la seconde, des couples de points de rebroussement (points quadruples).

L'équation du sixième degré de Jacobi est définie par les équations

$$(z - A)^6 - 4A(z - A)^5 + 10B(z - A)^3 - C(z - A) + 5B^2 - AC = 0,$$
$$\sqrt{z_\nu} = A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{-\nu} A_2 ;$$

la racine quatrième de son discriminant est, à un facteur numérique près, égal à D. Ainsi, le problème icosaédrique se confond avec la résolution de l'équation de Jacobi, en adjoignant à cette dernière la racine quatrième de son discriminant.

Pour effectuer le calcul, on montre que les racines de l'équation quadratique

$$q = A_1 x_1 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = 0,$$

si on les désigne par $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, dépendent des équations icosaédriques

$$1728 \frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X_1,$$
$$1728 \frac{H^3(\zeta_1, \zeta_2)}{f^5(\zeta_1, \zeta_2)} = X_2,$$

dont les paramètres X_1, X_2 sont des fonctions rationnelles de $\sqrt{A}$, B, C, D.

Le calcul de ces paramètres s'effectue complètement au moyen d'une équation quadratique, et l'on obtient finalement

$$(11) \quad \begin{cases} A_0 = \eta_2 \zeta_2, \quad A_2 = - \eta_1 \zeta_1, \\ A_0 = - \dfrac{\eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1}{2}. \end{cases}$$

Dans la troisième Partie de son Mémoire, M. Klein expose une méthode nouvelle, fondée sur l'équation icosaédrique, pour la résolution des équations du cinquième degré dans lesquelles la somme

des racines et celle de leurs carrés sont nulles, ainsi que cela a lieu dans l'équation (9), obtenue précédemment comme une résolvante.

Toute équation du cinquième degré peut être ramenée à cette forme au moyen de transformations rationnelles. L'auteur emploie les considérations géométriques qui suivent. Les cinq racines y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 d'une équation du cinquième degré, liées entre elles par l'équation de condition $\Sigma y = 0$, sont regardées comme les *coordonnées pentaédriques* d'un point de l'espace, pouvant prendre en général cent vingt positions différentes obtenues par la permutation des cinq racines; les permutations reviennent à des collinéations de l'espace. Si maintenant on a aussi $\Sigma y^2 = 0$, les cent vingt points sont situés sur une surface ψ du second degré; les génératrices de cette surface sont transformées comme il suit par les cent vingt collinéations : pour les soixante collinéations qui résultent de permutations paires des racines, chaque faisceau se reproduit; pour les soixante autres collinéations, les deux faisceaux s'échangent. Les génératrices d'une même espèce constituent une multiplicité *rationnelle* de première dimension, susceptible d'être représentée au moyen d'un paramètre λ. Une collinéation qui ramène sur lui-même un faisceau de génératrices revient à une transformation linéaire de λ. Il suit de là, d'après un théorème général, que les soixante valeurs de λ relatives aux soixante génératrices d'un même ensemble dépendent d'une équation icosaédrique. Les paramètres des génératrices sont des fractions dont les termes sont des fonctions linéaires et homogènes des y. Ces paramètres sont choisis de façon que l'équation icosaédrique se présente sous forme canonique; cela étant fait, on a les racines y en fonction rationnelle des racines de cette équation, ou en fonction rationnelle d'une seule de ces racines.

La forme canonique du paramètre se déduit de l'étude des groupes particuliers de génératrices de chaque faisceau, de ces groupes qui, au lieu de soixante, comprennent douze, vingt et trente droites. On parvient ainsi à former l'équation icosaédrique au moyen des coefficients de l'équation du cinquième degré. Dans les formules finales pour les racines y entre la racine carrée du discriminant de l'équation du cinquième degré, et ainsi cette racine carrée, qui n'a aucune influence sur le nombre des substitutions

du groupe de Galois, est nécessaire pour la résolution de l'équation du cinquième degré.

Relativement à la résolution d'une équation icosaédrique, il convient encore de dire qu'elle peut s'obtenir, ainsi qu'on le montre dans les §§ 7-9 de la première Section, au moyen d'une série hypergéométrique, par le quotient de deux solutions particulières de l'équation différentielle hypergéométrique.

II. Dans le travail de M. Gordan, la relation entre l'équation icosaédrique et la résolution de l'équation du cinquième degré où l'on suppose nulles les sommes des racines et des carrés des racines est établie de telle façon, que les expressions qui entrent dans les formules se présentent comme les covariants d'une certaine forme doublement binaire, dont l'auteur cherche d'abord à constituer le système complet.

Représentons par y_0 l'icosaèdre

$$y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10}),$$

par y_1 sa forme hessienne, par y_3 le déterminant fonctionnel de y_0 et de y_1; y_1, y_2, y_3 forment le *système complet* relativement aux cent vingt substitutions linéaires, c'est-à-dire à toutes les fonctions entières qui ne changent point par les substitutions icosaédriques.

Si maintenant on considère une forme avec deux séries de variables y_1, y_2 et x_1, x_2, et qu'on applique aux y une de ces substitutions et aux x la substitution obtenue en changeant la racine cinquième de l'unité ε en ε^2, on peut se demander quelles sont celles de ces formes qui se reproduisent par cette transformation simultanée et chercher à constituer le *système complet* au moyen duquel pourront être composées toutes les formes jouissant de cette propriété.

On obtient, comme forme de moindre degré en x et en y,

$$(12) \qquad f = y_1^3 x_1^2 x_2 + y_1^2 y_2 x_2^3 + y_1 y_2^2 x_1^3 - y_2^3 x_1 x_2^2.$$

On se propose ensuite de trouver les covariants de f, en supposant qu'on fasse subir aux variables x et y des transformations linéaires indépendantes l'une de l'autre. En employant le procédé

connu sous le nom de *Ueberschiebung*, on pose symboliquement

$$F = a_x^k \alpha_y^l \quad \text{et} \quad \Phi = b_x^m \beta_y^n.$$

$$(F, \Phi)_{\lambda\mu} = (ab)^\lambda a_x^{k-\lambda} b_x^{m-\lambda} (\alpha\beta)^\mu \alpha_y^{l-\mu} \beta_y^{n-\mu}.$$

On obtient trente-six formes, dont toutes les autres sont des fonctions *entières;* ces trente-six formes s'expriment rationnellement au moyen de cinq d'entre elles.

Pour l'équation du cinquième degré, il y a lieu, ainsi qu'on l'a vu précédemment, de considérer les sous-groupes du type du tétraèdre. Pour les sous-groupes, trois formes fondamentales, que nous désignerons par g_1, g_2, g_3, et qui sont du sixième, du huitième et du douzième degré, restent invariables. On peut maintenant chercher le système complet des formes avec deux séries de variables qui se reproduisent quand on fait subir à y et à x deux de ces transformations, dont la seconde se déduira de la première par le changement de ε en ε^2; la forme la plus simple à laquelle on parvienne est la forme bilinéaire

$$(13) \qquad \chi = -y_1(x_1 + x_2) - y_2(x_1 - x_2).$$

En appliquant le même procédé que précédemment (*Ueberschiebung*) aux formes g_1, g_2, g_3, χ, on obtient un système de vingt formes; les formes icosaédriques peuvent être composées avec elles; elles s'expriment toutes rationnellement au moyen de cinq d'entre elles. On a en particulier l'équation

$$(14) \qquad \chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi - \psi = 0,$$

dans laquelle les formes icosaédriques φ et ψ sont définies par les équations

$$(15) \qquad \varphi = \frac{9}{4}(f, f)_{1.1}, \quad \psi = 12(f, \varphi)_{1.1}.$$

En regardant χ comme inconnue, f, φ, ψ comme données, et en appliquant à x et à y les cent vingt substitutions, on obtient les cinq racines de l'équation (15)

$$(16) \qquad \chi_\nu = -\varepsilon^{\nu} x_1 y_1 + \varepsilon^{2\nu} x_1 y_2 - \varepsilon^{3\nu} x_2 y_1 - \varepsilon^{4\nu} x_2 y_2.$$

Mais le produit des différences de ces χ_ν, égal à la racine carrée du

discriminant de l'équation, est une forme Δ que l'on peut construire avec les formes du système icosaédrique.

Regardant cette racine carrée comme donnée, on peut déduire des relations du système icosaédrique une forme C à l'aide de laquelle on peut déterminer le rapport $\frac{y_2}{y_1}$ par une équation icosaédrique, puis trouver χ sous forme rationnelle.

Dans le dernier paragraphe, M. Gordan reprend la question avec la forme de Jerrard et établit la connexion de sa solution avec celle de M. Hermite.

III. Dans le troisième Mémoire, M. Klein établit cette connexion d'une manière nouvelle. Le point de départ de ses recherches est dans une certaine représentation géométrique de la dépendance du rapport des périodes $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ de l'intégrale elliptique $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ et l'invariant absolu $\frac{g_2^3}{\Delta}$ de la forme binaire biquadratique $f(x)$. Si cet invariant parcourt un demi-plan positif (ou négatif), ω se meut sur un triangle dont les côtés sont formés par des arcs de cercle. Aux sommets de ce triangle, dont les angles sont $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, o, correspondent les valeurs de J, savoir o, 1, ∞. Le plan des ω, d'après le principe de symétrie, est entièrement recouvert de tels triangles, ainsi que M. Dedekind l'a montré dans son Mémoire sur les fonctions modulaires. Ces figures triangulaires jouent le même rôle dans la théorie de la transformation que les parallélogrammes dans celle des fonctions doublement périodiques. Soit J' l'invariant d'une intégrale elliptique se déduisant de la précédente par une transformation du $n^{\text{ième}}$ ordre, n étant un nombre premier. J' et J sont liés entre eux par une équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré; la considération du triangle permet d'étudier le système de ramification (*Verzweigung*) de J', regardé comme fonction de J. L'espèce p de la surface de Riemann à employer est nulle pour $n = 2, 3, 5, 7, 13$, et l'on peut ainsi exprimer J et J' en fonctions rationnelles d'un paramètre τ. Ces fonctions rationnelles se déterminent complètement par la multiplicité de certains facteurs, en sorte qu'il y a là une méthode nouvelle pour l'étude des équations de transformation. Pour $n = 5$, 7, 13, on a les équations qui suivent, équations où l'on suppose J

et J' exprimés de la même façon au moyen de τ et de τ', et où l'on a donné les relations entre τ et τ' :

Transformation du cinquième ordre,

$$\begin{aligned} J : J-1 : 1 &= (\tau^2 - 10\tau + 5)^3 \\ &: (\tau^2 - 22\tau + 125)(\tau^2 - 4\tau - 1)^2 : -1728\tau, \end{aligned}$$

$$\tau\tau' = 125;$$

Transformation du septième ordre,

$$\begin{aligned} J : J-1 : 1 &= (\tau^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3 \\ &: (\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7)^2 : 1728\tau, \end{aligned}$$

$$\tau\tau' = 49;$$

Transformation du treizième ordre,

$$\begin{aligned} J &: J-1 : 1 \\ &= (\tau^2 + 5\tau + 13)(\tau^4 + 7\tau^3 + 20\tau^2 + 19\tau + 1)^3 \\ &\quad : (\tau^2 + 6\tau + 13)(\tau^6 + 10\tau^5 + 46\tau^4 + 108\tau^3 + 122\tau^2 + 38\tau - 1)^2 \\ &\quad : 1728\tau, \end{aligned}$$

$$\tau\tau' = 13.$$

La variable τ est une fonction de $q = e^{i\pi\omega}$ qui, dans les cas considérés, est égale à

$$125\,M^2, \quad 49\,M^2, \quad 13\,M,$$

où

$$M = \frac{1}{n}\,\frac{q^{\frac{1}{6n}}\,\Pi\left(1 - q^{\frac{2\nu}{n}}\right)^2}{q^{\frac{1}{6}}\,\Pi(1 - q^{2\nu})^2}.$$

M. Klein se pose ensuite la question suivante : Quelle est la relation de l'équation de Jacobi du sixième ordre et de l'équation icosaédrique avec l'équation de transformation ainsi obtenue pour $n = 5$?

Le passage de l'équation de Jacobi du sixième degré, dans le cas où $A = 0$, se fait immédiatement en posant $\tau = z^3$ dans l'équation obtenue pour $n = 5$ entre J et τ et en prenant les racines cubiques des deux membres.

On obtient ainsi

$$z^6 - Mz^3 + 12\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}z + 5 = 0,$$

équation qui a été utilisée par M. Kronecker dans sa résolution de l'équation du cinquième degré, qui, toutefois, se présente dans son travail sous une forme plus compliquée, parce qu'il considère le module k^2 au lieu des invariants rationnels g_2 et Δ.

Pour l'équation icosaédrique, elle s'obtient en formant la résolvante de Galois de l'équation qui relie J et J′ (pour $n = 5$), et c'est de plus la forme la plus simple de cette résolvante. Sa racine, regardée comme fonction de J, se ramifie de façon que, des soixante feuillets de la surface de Riemann il y en ait trois, quatre et cinq qui, respectivement, se réunissent pour $J = 1, 2, \infty$.

Par suite, p est encore nul, et l'on peut obtenir la résolvante de Galois sous sa forme la plus simple en introduisant comme inconnue la fonction η, qui, sur la surface de Riemann, ne prend qu'une fois chaque valeur, et l'on trouve l'équation icosaédrique

$$J = 1728\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}.$$

La relation entre η et ω se représente géométriquement de la façon suivante : η se meut sur un des cent vingt triangles aux angles $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$ que les plans de symétrie de l'icosaèdre découpent sur la sphère lorsque ω se meut sur un des triangles dont nous avons précédemment expliqué la formation. Analytiquement cette relation s'obtient au moyen de la formule connue

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = q^{-\frac{2}{5}}\frac{1 + q^2 - q^6 - q^{14} - q^{16} - q^{28} + \ldots}{-1 + q^{10} + q^{20} - q^{50} + \ldots}.$$

La signification de l'équation icosaédrique dans la transformation du cinquième degré se trouve ainsi complètement établie; finalement M. Klein déduit de la théorie de l'icosaèdre les formules utilisées par MM. Hermite et Brioschi pour la résolution de l'équation du cinquième degré. Il reste à prouver que pour les irrationnelles icosaédriques existent des équations modulaires. Or, si J et J′ sont

liés par une transformation du $n^{\text{ième}}$ ordre, n étant un nombre premier différent de f, il y a aussi entre les irrationnelles icosaédriques correspondantes η, η' une équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré. En prenant $n = 2$, on tombe sur une équation du troisième degré qui fournit le moyen de passer de l'icosaèdre à la forme de Jerrard et résout ainsi la question posée.

HATTENDORFF (K.). — ALGEBRAISCHE ANALYSIS. Hannover, 1877. — In-8°. 298 pages.

M. Hattendorff se plaint dans sa Préface du dédain que professent pour les méthodes purement algébriques les étudiants en Mathématiques, qui, à peine sortis du Gymnase, veulent, sans avoir reçu la préparation suffisante, aborder de suite le Calcul infinitésimal. Son Livre est destiné à leur faciliter cette préparation.

Il est divisé en deux Parties, dont la première est consacrée aux nombres réels, la seconde aux nombres complexes.

Après avoir introduit la notion de limite, M. Hattendorff applique cette notion à la détermination de la mesure du cercle, regardé comme limite de polygones réguliers inscrits ou circonscrits dont le nombre de côtés augmente indéfiniment, à la définition du nombre π, à la recherche de la valeur limite de $\frac{\sin x}{x}$ pour $x = 0$, à la définition du nombre e, obtenu sans l'intermédiaire de la série, comme la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)$, pour m infini.

L'auteur s'occupe ensuite des séries tant à termes positifs qu'à termes positifs ou négatifs; la règle de convergence de Gauss, dans toute sa généralité, aurait pu être donnée dans ce Chapitre. Puis il introduit les séries doublement infinies, dont on devrait, aussi bien, dire quelques mots dans les Cours de Mathématiques spéciales; le théorème sur la multiplication des séries trouve là sa place naturelle.

Vient ensuite la définition des fonctions continues et uniformes: les fonctions entières, les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable, tant qu'elles sont convergentes, sont continues.

Ces préliminaires établis, on passe à l'étude des fonctions simples $(1+x)^m$, a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctang} x$ et des séries qui les représentent.

Telles sont les matières contenues dans la première Partie.

L'introduction des nombres complexes exige des définitions nouvelles pour les opérations élémentaires, pour la fonction exponentielle et la fonction logarithmique, les fonctions circulaires ; la fonction exponentielle, dont la définition est le point de départ de toutes les autres définitions, est regardée comme la limite, pour m infini, de

$$\left(1+\frac{x+iy}{m}\right).$$

Il est ensuite nécessaire d'étendre aux nombres complexes la notion des séries infinies, de préciser ce qu'il faut entendre par la fonction d'une quantité complexe et par la continuité d'une telle fonction, d'étendre enfin les notions ainsi acquises aux fonctions et aux séries simples déjà étudiées ; enfin, tout en restant dans le domaine de l'Algèbre, il convient d'introduire la notion de dérivée et de montrer le parti qu'on peut en tirer dans cette science ; les propositions fondamentales sur la possibilité de développer en série une fonction continue et uniforme et sur la forme de ce développement trouvent là leur place.

M. Hattendorff passe ensuite à l'étude des produits infinis ; $\sin x$ et $\cos x$ sont mis sous cette forme. Quelques mots sont même consacrés aux fonctions doublement périodiques et à la transformation, par une méthode due à Cauchy, des produits qui figurent au numérateur et au dénominateur de ces fonctions en séries infinies.

Après la décomposition en facteurs, vient naturellement la décomposition en fractions simples. C'est dans ce Chapitre que sont placés le théorème sur la variation du logarithme d'une fonction dont la variable indépendante ou plutôt le point qui la figure décrit un contour simple, et le théorème fondamental sur la décomposition en facteurs d'une fonction entière, qui peut en être regardé comme une conséquence ; on peut ensuite aborder la décomposition des fractions rationnelles, et, plus généralement, du quotient

de deux produits infinis; l'application à la fonction tang$x$ est tout indiquée.

Enfin le dernier Chapitre est consacré aux fractions continues.

MÉLANGES.

SUR LES SYSTÈMES DESMIQUES DE TROIS TÉTRAÈDRES;

Par M. CYPARISSOS STEPHANOS.

Les systèmes de trois tétraèdres formant trois surfaces d'un faisceau du quatrième ordre, systèmes qu'on peut appeler *desmiques* (de δέσμη, faisceau), jouent dans la Géométrie de l'espace le même rôle que les systèmes de quatre triangles appartenant à un même faisceau de cubiques dans la Géométrie du plan.

Cependant, tandis que ces derniers systèmes ont été l'objet des recherches de plusieurs géomètres et que leurs propriétés sont maintenant bien connues, l'existence des systèmes desmiques de trois tétraèdres à peine, autant que nous savons, a été entrevue.

Dans le présent travail, nous avons tenté d'exposer quelques-unes des propriétés les plus remarquables d'un système desmique de trois tétraèdres, en nous réservant de compléter cette étude, dans une certaine mesure, une autre fois, à l'aide de considérations différentes.

Premières propriétés d'un système desmique de trois tétraèdres.

1. On remarque sur trois tétraèdres A, B, C d'un système desmique douze sommets E, douze faces F et dix-huit arêtes G [1].

---

[1] Il convient de noter ici que la recherche que nous allons entreprendre se rapporte à des tétraèdres n'offrant aucune particularité projective dans la disposition de leurs faces.

Nous n'examinerons donc pas ici les faisceaux ponctuels de cônes concentriques du quatrième ordre comprenant trois cônes formés de quatre plans. Nous remarquerons seulement qu'on arrive à des faisceaux de ce genre en projetant d'un point de l'espace la section plane d'un faisceau comprenant trois tétraèdres proprement dits.

Nous dirons qu'un point E et un plan F sont *opposés* lorsqu'ils forment deux éléments opposés d'un des tétraèdres A, B, C; nous appellerons de même deux droites G *opposées* lorsqu'elles forment deux arêtes opposées d'un de ces mêmes tétraèdres.

Nous emploierons aussi quelquefois, pour abréger, les expressions *un couple de droites* G, *un couple d'arêtes d'un tétraèdre*, au lieu de ces autres *un couple de droites* G *opposées, un couple d'arêtes opposées d'un tétraèdre.*

2. Les seize droites L formant l'intersection commune des trois tétraèdres A, B, C d'un système desmique sont distribuées par quatre sur les douze plans F. Par chacune de ces droites L passent trois plans F appartenant respectivement aux tétraèdres A, B, C.

Par le point d'intersection e de deux droites L *situées dans un plan* F *passent toujours deux autres droites* L. *Ces quatre droites* L *prises deux à deux déterminent six plans* F, *groupés en trois paires; les plans de ces paires appartiennent respectivements aux tétraèdres* A, B, C *et se coupent suivant trois droites* G *passant par e.*

Toute droite L est rencontrée par neuf autres droites L, situées par trois sur les trois plans F passant par la première et convergeant aussi par trois vers trois points *e* situés sur la première.

Les droites L *se rencontrent donc quatre par quatre, en* $\frac{16.3}{4} = 12$ *points e.*

3. Sur toute droite G se trouvent $\frac{12.3}{18} = 2$ points *e*. Les huit droites L passant par ces deux points sont situées par quatre sur les deux plans F dont l'intersection est formée par la droite G considérée.

Par ces mêmes points passent deux à deux les faces des tétraèdres A, B, C, auxquels n'appartient pas la droite G considérée, de manière que les arêtes de ces tétraèdres qui passent par l'un de ces points sont opposées à celles qui passent par l'autre.

Pour que deux tétraèdres déterminent un faisceau du quatrième ordre comprenant un troisième tétraèdre, il faut donc que chacune des arêtes de l'un rencontre deux arêtes opposées de l'autre.

ou bien *il faut que chaque couple d'arêtes opposées de l'un s'appuie sur un couple d'arêtes opposées de l'autre.*

On peut dire de deux tétraèdres offrant entre eux cette dernière disposition qu'*ils s'appuient entre eux par leurs arêtes.*

4. Considérons maintenant un point $e(e_0)$ et les trois droites G appartenant respectivement aux tétraèdres A, B, C et passant par ce point. Sur chacune de ces trois droites se trouve un nouveau point e par lequel passent les droites G opposées aux deux autres : ces trois points e_1, e_2, e_3 forment donc un triangle dont les trois côtés e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2 coïncident respectivement avec les droites G opposées aux trois droites e_0e_1, e_0e_2, e_0e_3. Les quatre points e_0, e_1, e_2, e_3 forment ainsi les sommets d'un nouveau tétraèdre, dont les trois couples d'arêtes opposées appartiennent respectivement aux tétraèdres A, B, C.

On obtient de la sorte trois nouveaux tétraèdres a, b, c, ayant pour sommets les douze points e.

Nous avons vu précédemment que deux quelconques des tétraèdres d'un système desmique s'appuient entre eux par leurs arêtes. Nous découvrons maintenant de plus que les couples d'arêtes de deux quelconques de ces tétraèdres appuyés sur un même couple d'arêtes du troisième s'appuient aussi entre eux de façon à former avec ce troisième couple les six arêtes d'un nouveau tétraèdre.

Pour que trois tétraèdres A, B, C *appartiennent à un même faisceau du quatrième ordre, il faut donc que de leurs arêtes se composent trois nouveaux tétraèdres a, b, c, ayant avec chacun des premiers un couple commun d'arêtes.*

5. Par chacune des quatre droites L situées sur une face d'un des tétraèdres A, B, C passe une face de chacun des deux autres tétraèdres. *Deux quelconques de ces tétraèdres sont donc situés en homologie (ou en perspective) de quatre manières différentes : les quatre faces du troisième tétraèdre sont les bases de ces homologies* (¹).

(¹) La seule mention que nous connaissions de deux tetraèdres situés en perspective de quatre manières differentes se trouve dans le Memoire de Cremona : *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell' esagrammo di Pascal*, n° 33 (*R. Accad. dei Lincei, Mem. della classe di Scienze fis., matem. e natur.*, 1877).

Réciproquement : *Lorsque deux tétraèdres sont situés en homologie de quatre manières différentes, le tétraèdre formé par les quatre bases d'homologie appartient au faisceau déterminé par les deux premiers.* En effet, les seize droites suivant lesquelles les quatre bases d'homologie coupent les faces de l'un de ces tétraèdres coïncident avec les droites suivant lesquelles les mêmes bases coupent les faces de l'autre.

6. Tâchons maintenant de préciser la nature des quatre homologies suivant lesquelles on peut faire correspondre entre eux deux tétraèdres d'un système desmique.

Dans toute correspondance homologique entre deux espaces, deux droites homologues, si elles ne se confondent pas, se rencontrent en un point coïncidant avec son homologue, situé dans la base d'homologie, et déterminent un plan coïncidant aussi avec son homologue, passant par le centre d'homologie. Une droite ne peut être sa propre homologue que si elle appartient à la base d'homologie ou si elle passe par le centre d'homologie. On sait de plus que pour qu'une homologie soit involutive il suffit que deux éléments distincts de l'espace se permutent entre eux par elle.

Conformément à cela, dans toute correspondance homologique entre deux tétraèdres A et B d'un système desmique, à tout couple d'arêtes de A correspond celui des couples d'arêtes de B sur lequel il s'appuie. Le tétraèdre a déterminé par deux couples homologues a de plus deux arêtes appartenant au troisième tétraèdre C du système et coïncidant avec leurs homologues. En effet, l'une de ces deux arêtes est située sur la base d'homologie et joint deux sommets de a correspondant à eux-mêmes, tandis que l'autre passe par le centre d'homologie et forme l'intersection de deux faces de a correspondant à elles-mêmes.

Le tétraèdre a se transforme donc en lui-même, de sorte que ses deux autres sommets situés sur l'arête passant par le centre d'homologie se permutent entre eux et que ses deux autres faces passant par l'arête appartenant à la base d'homologie se permutent aussi entre elles.

Nous reconnaissons ainsi que :

Les quatre correspondances homologiques de deux des tétraèdres A, B, C *d'un système desmique doivent être involutives.*

7. Nous venons de voir comment dans toute correspondance homologique entre les tétraèdres A et B, aussitôt qu'une arête de C est située sur la base d'homologie, l'arête opposée passe par le centre d'homologie. On en déduit que :

Dans toute correspondance homologique de deux des tétraèdres d'un système desmique, ayant pour base une face F *du troisième tétraèdre, le centre d'homologie coïncide avec le sommet* E *opposé à cette face.*

De ce fait il s'ensuit que :

Les points E *opposés aux trois plans* F *passant par une droite* L *sont situés sur une même droite* Λ.

Ces droites Λ sont donc au nombre de seize et convergent par quatre aux quatre sommets de chacun des tétraèdres A, B, C. Par conséquent :

Les sommets de trois tétraèdres appartenant à un même faisceau ponctuel du quatrième ordre forment trois enveloppes de la quatrième classe appartenant à un même faisceau tangentiel.

8. A ce même fait se rattachent les particularités suivantes :

Deux sommets quelconques d'un des tétraèdres A, B, C sont séparés harmoniquement par les arêtes opposées des deux autres tétraèdres sur lesquelles s'appuie la droite G joignant ces deux sommets.

Deux quelconques des trois points E situés sur une droite Λ sont séparés harmoniquement par le troisième point E et le plan F opposé à ce point.

Deux faces quelconques d'un des tétraèdres A, B, C sont séparées harmoniquement par les arêtes opposées des deux autres tétraèdres sur lesquelles s'appuie la droite d'intersection G de ces deux plans.

Deux quelconques des trois plans F passant par une droite L sont séparés harmoniquement par le troisième plan F et le point E opposé à ce plan.

TÉTRAÈDRES APPUYÉS ENTRE EUX PAR LEURS ARÊTES.

9. Nous avons supposé jusqu'à présent qu'il était possible de construire trois tétraèdres appartenant à un même faisceau : nous avons

été conduit ainsi à un certain nombre de propriétés de ces tétraèdres et reconnu entre autres (n° 3) que deux quelconques de ces tétraèdres doivent s'appuyer entre eux par leurs arêtes.

Il convient donc d'examiner ici les propriétés de deux tétraèdres A et B appuyés entre eux par leurs arêtes. Cette étude nous conduira ensuite au résultat important que deux tétraèdres offrant cette disposition appartiennent toujours à un système desmique de trois tétraèdres.

10. Nous allons d'abord montrer comment, étant donnés le tétraèdre A et un sommet B_0 de B, on peut construire ce second tétraèdre d'une manière unique.

Le tétraèdre B aura pour arêtes passant par B_0 trois droites $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$, $\overline{B_3}$ appuyées respectivement sur les trois couples d'arêtes opposées de A. Les plans $\overline{B_2 B_3}$, $\overline{B_3 B_1}$, $\overline{B_1 B_2}$ en seront ainsi des faces.

Considérons la section du tétraèdre A par un de ces plans, $\overline{B_2 B_3}$ par exemple : les traces des quatre faces de A sur ce plan déterminent un quadrilatère complet dont les trois couples de sommets opposés sont formés par les traces des arêtes opposées de A. Des trois diagonales de ce quadrilatère, deux passent par B_0 et coïncident avec les droites $\overline{B_2}$ et $\overline{B_3}$, tandis que la troisième $\overline{B'_1}$ s'appuie sur les deux arêtes opposées de A que $\overline{B_1}$ rencontre. Il convient de remarquer ici que $\overline{B'_1}$ coupe les droites $\overline{B_2}$ et $\overline{B_3}$ en des points déterminés simplement par les points où chacune de ces droites rencontre les arêtes de A; ainsi, par exemple, le point $(\overline{B_3 B'_1})$ est le conjugué harmonique du point B_0 par rapport aux deux points de rencontre de la droite $\overline{B_3}$ avec deux arêtes opposées de A.

On obtient de la sorte trois droites $\overline{B'_1}$, $\overline{B'_2}$, $\overline{B'_3}$, situées respectivement dans les plans $\overline{B_2 B_3}$, $\overline{B_3 B_1}$, $\overline{B_1 B_2}$ et appartenant de plus à un même plan. En effet, ces droites se rencontrent deux à deux suivant trois points distincts $(\overline{B'_2 B'_3})$, $(\overline{B'_3 B'_1})$, $(\overline{B'_1 B'_2})$ situés respectivement sur les droites $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$, $\overline{B_3}$ et coïncidant avec les points conjugués harmoniques du point B_0 par rapport aux couples d'arêtes de A que ces droites rencontrent.

Les droites $\overline{B'_1}$, $\overline{B'_2}$, $\overline{B'_3}$, appuyées respectivement sur des arêtes de A rencontrées par $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$, $\overline{B_3}$, forment avec ces dernières droites

les six arêtes du tétraèdre B. Ce tétraèdre est ainsi déterminé d'une manière unique.

11. Comme la disposition mutuelle des deux tétraèdres A et B a été définie au moyen de droites (leurs arêtes), qu'on peut considérer soit comme séries de points, soit comme axes de faisceaux de plans, il s'ensuit qu'à toute propriété relative à des sommets, des arêtes et des faces des deux tétraèdres, correspond, suivant le principe de dualité, une autre propriété relative à des faces, des arêtes et des sommets de ces mêmes tétraèdres.

Ainsi, étant donné le tétraèdre A, nous pouvons procéder à la construction du tétraèdre B, en partant, non plus d'un de ses sommets, mais d'une de ses faces, car nous pouvons d'abord construire les trois arêtes de B situées sur la face donnée et ensuite ses trois autres arêtes passant par ses trois sommets ainsi déterminés.

12. *De même que deux sommets quelconques de* B *sont séparés harmoniquement par les deux arêtes de* A *que rencontre l'arête de* B *déterminée par ces deux sommets* (nº 10), *de même deux faces quelconques de* B *sont séparées harmoniquement par les deux arêtes de* A *que rencontre l'arête de* B *suivant laquelle se coupent ces deux faces.*

Il suit de là que :

Le plan polaire de tout sommet de B, par rapport au tétraèdre A considéré comme surface du quatrième ordre, coïncide avec la face de B opposée à ce sommet.

Le point polaire de toute face de B par rapport à l'enveloppe de la quatrième classe formée par les sommets de A coïncide avec le sommet de B opposé à cette face.

En un mot, *le tétraèdre* B *est autopolaire par rapport au tétraèdre* A, et, comme les deux tétraèdres A et B sont liés entre eux par des relations réciproques, on peut dire que *les deux tétraèdres* A *et* B *sont autopolaires entre eux.*

On peut démontrer de plus que, réciproquement, *pour qu'un tétraèdre soit autopolaire par rapport à un autre, il faut que ces deux tétraèdres s'appuient entre eux par leurs arêtes.*

13. *Le tétraèdre* B *se transforme en lui-même dans chacune*

des trois homologies involutives gauches [1], *ayant pour axes les divers couples d'arêtes opposées de* A. Deux sommets de B sont homologues suivant une de ces homologies s'ils sont séparés harmoniquement par les axes d'homologie, et, par conséquent, s'ils déterminent une arête de B appuyée sur ces axes; de même, deux faces de B sont homologues si elles sont séparées harmoniquement par les deux axes d'homologie, et, par conséquent, si elles se coupent suivant une arête de B appuyée sur ces axes.

On déduit de là que *tout couple d'arêtes opposées de* B *est séparé harmoniquement par chacun des couples d'arêtes de* A *qu'il ne rencontre pas;* c'est-à-dire que sur toute droite appuyée sur le premier couple et l'un de ces derniers sont déterminés deux couples de points séparés harmoniquement entre eux.

14. Lorsque deux couples d'arêtes d'un tétraèdre s'appuient respectivement sur deux couples d'arêtes d'un autre, les droites de ces quatre couples sont situées sur une même surface du second ordre dont chaque système de génératrices renferme un couple d'arêtes de chacun des deux tétraèdres.

Supposons maintenant, de plus, que les couples d'arêtes de ces tétraèdres appartenant à un même système de génératrices soient séparés entre eux harmoniquement, et examinons la disposition mutuelle des troisièmes couples d'arêtes de ces tétraèdres.

On sait que, si deux droites s'appuient sur deux arêtes opposées d'un tétraèdre et sont en outre séparées harmoniquement par deux autres arêtes opposées du même tétraèdre, elles sont séparées aussi harmoniquement par le troisième couple d'arêtes de ce tétraèdre [2]. On peut démontrer de plus facilement que, *si deux droites sont séparées harmoniquement par deux couples d'arêtes d'un*

---

(1) Nous avons cru pouvoir désigner sous le nom d'*homologie gauche* toute homographie entre deux espaces dans laquelle les divers points de deux droites fixes (*axes d'homologie*) non contenues dans un même plan correspondent à eux-mêmes, à cause de l'analogie remarquable qu'on découvre entre cette correspondance et l'*homologie* de Poncelet. Staudt a examiné les propriétés de ces correspondances dans la *Geometrie der Lage* (n° 230, etc.) et les *Beiträge zur Geom. der Lage* (§ 6), et donné le nom de *geschaart-involutorisches System* à un espace dont les éléments sont associés en paires par l'effet d'une *homologie involutive gauche*.

(2) Staudt, *Beiträge zur Geom. der Lage*, n° 26.

tétraèdre, elles s'appuient sur le troisième couple d'arêtes du même tétraèdre.

Il résulte de là d'abord que tout couple d'arêtes de l'un des tétraèdres, appartenant à la surface du second ordre, est séparé harmoniquement par le couple d'arêtes de l'autre qui n'appartient pas à cette surface; puis on voit que les deux couples d'arêtes de ces tétraèdres qui ne sont pas situés sur la surface du second ordre s'appuient l'un sur l'autre. On peut donc conclure que :

Lorsque deux couples d'arêtes d'un tétraèdre s'appuient respectivement sur deux couples d'arêtes d'un autre et que ceux de ces quatre couples qui ne se rencontrent pas sont séparés entre eux harmoniquement, les troisièmes couples d'arêtes de ces tétraèdres s'appuient aussi entre eux.

CONSTRUCTION EFFECTIVE D'UN SYSTÈME DESMIQUE DE TROIS TÉTRAÈDRES.

15. Lorsque deux tétraèdres A et B s'appuient entre eux par leurs arêtes, tout couple d'arêtes de A détermine avec le couple d'arêtes de B sur lequel il s'appuie quatre points et quatre plans formant les sommets et les faces d'un nouveau tétraèdre ayant pour arêtes les droites de ces deux couples. On obtient ainsi trois nouveaux tétraèdres a, b, c, dont chacun contient un nouveau couple d'arêtes; ces trois nouveaux couples doivent appartenir à un même tétraèdre C si les tétraèdres A et B sont situés en perpective de quatre manières différentes (n°s 4, 5).

Considérons deux des tétraèdres a, b, c; puisque deux couples d'arêtes de l'un s'appuient respectivement sur deux couples d'arêtes de l'autre, et qu'en outre de ces quatre couples, appartenant aussi aux tétraèdres A et B, ceux qui ne se rencontrent pas sont séparés entre eux harmoniquement (n° 13), il s'ensuit que les couples d'arêtes de ces tétraèdres qui n'appartiennent pas aux tétraèdres A et B s'appuient l'un sur l'autre (n° 14). Cela étant vrai pour deux quelconques des tétraèdres a, b, c, on voit que :

Les arêtes de ces tétraèdres a, b, c *qui n'appartiennent pas aux tétraèdres* A *et* B *forment, en effet, les arêtes d'un nouveau tétraèdre* C.

Le tétraèdre C *s'appuie manifestement par ses arêtes sur chacun des tétraèdres* A *et* B.

16. Considérons maintenant l'homologie involutive ayant pour centre un des sommets de C et pour base la face opposée à ce sommet, et arrêtons-nous en particulier sur deux arêtes opposées de C, dont l'une va passer par le centre d'homologie, tandis que l'autre est située sur la base d'homologie. Ces deux arêtes de C déterminent avec les deux arêtes de A sur lesquelles elles s'appuient un des tétraèdres a, b, c, qui se transforme en lui-même. En effet, d'abord les sommets de ce tétraèdre situés dans la base d'homologie correspondent à eux-mêmes; puis ses deux autres sommets, situés sur l'arête passant par le centre d'homologie, se permutent entre eux, parce qu'ils sont séparés harmoniquement par les sommets de C situés sur cette arête (n° 12), c'est-à-dire par le centre et la base d'homologie. De même, les faces de ce tétraèdre passant par le centre d'homologie correspondent à elles-mêmes, tandis que ses deux autres faces, passant par l'arête située dans la base d'homologie, se permutent entre elles. Les arêtes de ce tétraèdre ont donc pour droites homologues des arêtes du même tétraèdre, et, par conséquent, le troisième couple d'arêtes de ce tétraèdre appartient au tétraèdre homologue de A.

Et comme cela a lieu pour chacun des tétraèdres a, b, c, il s'ensuit que le tétraèdre homologue de A coïncide avec B. Ainsi se trouve démontré que :

Les deux tétraèdres A *et* B *se transforment entre eux dans toute homologie involutive ayant pour centre un sommet de* C *et pour base la face opposée à ce sommet* [1].

Les trois tétraèdres A, B, C *forment donc un système desmique.*

Nous avons vu précédemment (n° 4) que, pour que trois tétraèdres A, B, C appartiennent à un même faisceau, il faut que de leurs arêtes on puisse former trois nouveaux tétraèdres a, b, c ayant avec chacun des premiers un couple commun d'arêtes. Le fait impor-

---

[1] Comme, dans ces quatre homologies, à tout couple de A correspond le couple de B sur lequel il s'appuie, on peut appeler *homologues* deux pareils couples d'arêtes des tétraèdres A et B.

tant que nous venons de prouver nous apprend maintenant que :

Lorsqu'on peut former avec les arêtes de trois tétraèdres A, B, C *trois nouveaux tétraèdres a, b, c ayant avec chacun des premiers un couple commun d'arêtes, les tétraèdres* A, B, C *appartiennent à un même faisceau.*

17. La possibilité de l'existence d'un système desmique étant ainsi démontrée, nous indiquons ici comment, d'après ce qui précède, on peut facilement construire un pareil système de trois tétraèdres A, B, C.

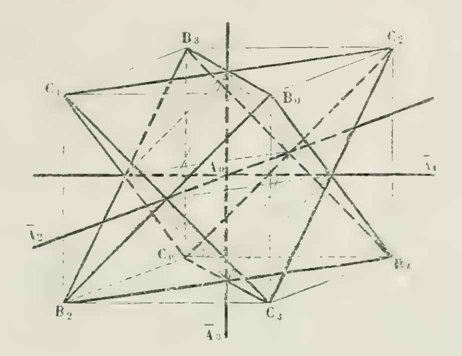
Étant donnés le tétraèdre A *et un sommet* B_0 *de* B, *on détermine les trois autres sommets de* B *en prenant les points conjugués harmoniques de* B_0 *par rapport aux trois couples d'arêtes opposées de* A, *et l'on construit les sommets du tétraèdre* C *en prenant les quatre points homologues de* B_0 *dans les quatre homologies involutives déterminées par un sommet de* A *et la face opposée à ce sommet.*

Étant donnés le tétraèdre A *et une face de* B, *on peut construire d'une manière analogue les trois autres faces de* B *et celles de* C.

18. On peut se faire une idée assez nette de la disposition mutuelle des trois tétraèdres A, B, C d'un système desmique en supposant que trois sommets de l'un d'eux, par exemple de A, coïncident avec trois points du plan à l'infini, lorsque les seuls éléments de ce tétraèdre qui restent en distance finie forment autour d'un point A_0 comme sommet un trièdre dont les faces et les arêtes $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ appartiennent au tétraèdre A. Nous pouvons même, en introduisant des conditions métriques nouvelles, supposer que les faces de ce trièdre soient deux à deux perpendiculaires entre elles.

Maintenant, si nous admettons pour sommet de B un point quelconque B_0 de l'espace, point que nous pouvons, sans restriction de la généralité, supposer comme également distant des trois faces du trièdre A_0, les trois autres sommets de ce tétraèdre coïncideront avec les points B_1, B_2, B_3, symétriques de B_0 par rapport aux arêtes $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ de A. Le tétraèdre C, d'autre part, aura pour som-

mets : 1° le point C_0, symétrique de B_0 par rapport au point A_0; 2° les trois points C_1, C_2, C_3, symétriques de B_0 par rapport aux trois faces $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_1}$, $\overline{A_1A_2}$ de A.



Les huit sommets des tétraèdres B et C forment ainsi les huit sommets d'un *cube* ayant pour axes les trois droites $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$, tandis que leurs arêtes coïncident avec les douze diagonales des carrés formés sur les douze faces de ce cube.

On peut maintenant se rendre aisément compte comment le tétraèdre C est l'homologue de B dans les quatre homologies involutives ayant pour centres les sommets de A et pour bases les faces respectivement opposées à ces sommets, homologies qui se présentent ici sous la forme de *correspondances de symétrie*. On voit tout d'abord qu'aux points B_0, B_1, B_2, B_3 correspondent, dans la symétrie ayant pour centre le point A_0, les points C_0, C_1, C_2, C_3, et que de même, dans les symétries ayant respectivement pour bases les plans

$$\overline{A_2A_3}, \quad \overline{A_3A_1}, \quad \overline{A_1A_2},$$

aux points B_0, B_1, B_2, B_3 correspondent les points

$$C_1, C_0, C_3, C_2, \quad C_2, C_3, C_0, C_1, \quad C_3, C_2, C_1, C_0.$$

On peut remarquer ici ce fait curieux que les quatre arrangements 0123, 1032, 2301, 3210 des quatre sommets de C correspondant aux divers sommets de B sont identiques avec ceux qui représentent les quatre modes de relation homographique existant entre deux groupes de quatre points d'une droite, offrant le même rapport anharmonique.

Le système des seize droites Λ sur chacune desquelles se trouve un sommet de chacun des tétraèdres A, B, C est ici formé : 1° par les douze arêtes du cube mentionné; 2° par les quatre diagonales de ce cube passant par son centre.

Les centres des six carrés formés sur les six faces de ce même cube déterminent les sommets d'un octaèdre régulier. Toute face de chacun des tétraèdres B et C contient trois sommets de cet octaèdre, de manière que les huit faces de ces tétraèdres constituent les faces de cet octaèdre, sans qu'aucune de leurs arêtes coïncidât avec quelqu'une des arêtes de l'octaèdre.

Le système des seize droites L par chacune desquelles passe une face de chacun des tétraèdres A, B, C est ici formé : 1° par les douze arêtes de l'octaèdre considéré; 2° par les quatre droites déterminées sur le plan de l'infini par les quatre paires des faces parallèles du même octaèdre.

PROPRIÉTÉS DE DEUX TÉTRAÈDRES D'UN SYSTÈME DESMIQUE PAR RAPPORT AU TROISIÈME.

19. Deux tétraèdres A, B d'un système desmique ont, par rapport au troisième C, diverses propriétés, dont on peut considérer comme primitives les suivantes :

Chacun des tétraèdres A, B est son propre homologue dans les trois homologies involutives gauches ayant pour axes deux arêtes opposées de C.

Les tétraèdres A et B se transforment entre eux par les quatre homologies involutives ayant pour centre un sommet de C et pour base la face opposée à ce sommet.

Dans toute homologie involutive gauche, une surface du second ordre ne peut être transformée en elle-même que si elle passe par les deux axes d'homologie ou bien si chacun de ces axes forme la polaire de l'autre par rapport à cette surface. De même, dans toute homologie involutive ordinaire, une surface du second ordre ne peut être transformée en elle-même que si le centre d'homologie a pour plan polaire, par rapport à cette surface, la base d'homologie.

Les surfaces donc du second ordre conjuguées par rapport au

tétraèdre C *sont les seules qui se transforment en elles-mêmes dans les sept homologies involutives déterminées par deux éléments opposés de* C.

D'où il s'ensuit que : *Aussitôt qu'une surface du second ordre, conjuguée par rapport au tétraèdre* C,

passe par un des sommets de l'un des tétraèdres A, B, *elle passe aussi par les sept autres sommets de ces deux tétraèdres.*

Les huit sommets des tétraèdres A et B forment donc les intersections d'un nombre doublement infini de surfaces du second ordre conjuguées par rapport au tétraèdre C.

20. Parmi les surfaces du réseau ponctuel ainsi constitué se trouvent quatre faisceaux ponctuels de cônes. Les cônes de chacun de ces faisceaux ont pour centre commun un des sommets de C et pour génératrices communes les quatre droites A passant par ce sommet.

Parmi les surfaces du même réseau, il y en a six formées de deux plans. Deux pareils plans se coupent suivant une arête de C et coïncident avec les deux faces *f* de l'un des tétraèdres *a*, *b*, *c* qui passent par cette arête.

touche une des faces de l'un des tétraèdres A, B, *elle touche aussi les sept autres faces de ces deux tétraèdres.*

Les huit faces des tétraèdres A et B forment donc les plans tangents communs à un nombre doublement infini de surfaces de la seconde classe conjuguées par rapport au tétraèdre C.

Parmi les enveloppes de la seconde classe comprises dans le réseau tangentiel ainsi constitué se trouvent quatre faisceaux tangentiels de coniques. Les coniques de chacun de ces faisceaux sont situées sur une face de C et ont pour tangentes communes les quatre droites L situées sur cette face.

Parmi les enveloppes du même réseau, il y en a six formées de deux points. Deux pareils points sont situés sur une arête de C et coïncident avec les deux sommets *e* d'un des tétraèdres *a*, *b*, *c* situés sur cette arête.

A la rigueur, à toute surface formée de deux plans *f* passant par une arête de C il faut associer l'enveloppe de la seconde classe formée par les deux points *e* situés sur la même droite, pour avoir ainsi un être géométrique du second ordre et de la seconde classe, comme le sont ceux compris dans les deux réseaux.

Ces deux réseaux ont en commun une infinité d'êtres géométriques du second ordre et de la seconde classe formant trois fais-

ceaux en même temps ponctuels et tangentiels. Les surfaces de chacun de ces faisceaux ont quatre génératrices communes formées par deux couples homologues d'arêtes des deux tétraèdres A et B; chacun de ces faisceaux contient donc deux êtres géométriques du second ordre et de la seconde classe constitués par deux plans f et deux points e situés sur l'intersection de ces deux plans.

Ces trois faisceaux ont deux à deux une surface commune. Sur chacune de ces trois surfaces se trouvent deux couples d'arêtes de A et les couples d'arêtes de B qui en sont les homologues (n° **14**).

21. Le tétraèdre C restant invariable, si l'on fait mouvoir un des sommets de A ou de B sur un plan Π, les sept autres sommets de A et de B décrivent des plans qui sont les homologues de Π dans les sept homologies involutives déterminées par deux éléments opposés de C et constituent par conséquent avec Π les faces de deux tétraèdres formant avec C un système desmique.

De même, si l'on suppose qu'une face de A ou de B se meut en passant par un point quelconque Σ, les sept autres faces de A et de B enveloppent sept points qui constituent avec Σ les sommets de deux tétraèdres formant avec C un système desmique.

Si maintenant un sommet de A ou de B parcourt une droite T, les sept autres sommets de A et de B décrivent aussi des lignes droites qui sont les homologues de T dans les sept homologies involutives déterminées par deux éléments opposés de C et coïncident avec les droites enveloppées par sept faces de A et de B lorsque la huitième passe par la droite T.

Toute surface du second ordre conjuguée par rapport au tétraèdre C et tangente à T touche nécessairement ces sept autres droites. De plus, ces sept droites sont situées sur une même surface du second ordre passant par la droite T et conjuguée par rapport au tétraèdre C.

Ces huit droites forment deux tétrades; chacune des droites de l'une de ces tétrades rencontre les quatre droites de l'autre suivant les points où elle perce les quatre faces de C; elle détermine, en outre, avec les mêmes droites quatre plans passant respectivement par les quatre sommets de C.

Le rapport anharmonique déterminé par les quatre faces de C sur chacune de ces huit droites est le même.

22. Les génératrices de toute surface du second ordre conjuguée par rapport au tétraèdre C se distribuent donc, par l'effet des sept homologies involutives déterminées par deux éléments opposés de C, en une infinité de groupes de huit droites analogues à celui que nous venons de considérer.

Les deux tétrades de chacun de ces groupes se transforment entre elles dans les quatre homologies involutives ayant pour centre un sommet de C et pour base la face opposée à ce sommet; elles se transforment en outre en elles-mêmes dans les trois homologies involutives ayant pour axes deux arêtes opposées de C.

Parmi ces divers groupes, il y en a trois formés par quatre droites prises deux fois chacune. Les génératrices de la surface qui s'appuient sur deux arêtes opposées de C forment les quatre droites doubles d'un pareil groupe.

Les tétrades formées de droites appartenant à un même système de génératrices de la surface du second ordre ont toutes un covariant commun du sixième ordre (celui-là que Clebsch dénote par T), formé par les trois couples de génératrices de ce système qui s'appuient respectivement sur les trois couples d'arêtes de C. Ces trois couples de génératrices sont séparés deux à deux entre eux harmoniquement.

SYSTÈMES DESMIQUES CONJUGUÉS.

23. Pour que trois tétraèdres A, B, C appartiennent à un même faisceau, nous savons qu'il faut et il suffit qu'on puisse construire avec leurs arêtes G trois nouveaux tétraèdres a, b, c ayant avec chacun des tétraèdres A, B, C un couple commun d'arêtes. Il résulte de cette relation des tétraèdres A, B, C avec les tétraèdres a, b, c que *ces derniers tétraèdres appartiennent aussi à un même faisceau.*

Deux pareils systèmes desmiques accompagnent inévitablement l'un l'autre; ils peuvent donc être appelés *systèmes desmiques conjugués.*

Comme tout couple de droites G appartient à un tétraèdre de chacun des deux systèmes desmiques, on peut représenter bien

convenablement les neuf couples de droites G par les symboles

$$\begin{array}{ccc} Aa, & Ab, & Ac, \\ Ba, & Bb, & Bc, \\ Ca, & Cb, & Cc. \end{array}$$

Deux de ces couples se rencontrent ou sont séparés entre eux harmoniquement suivant que leurs symboles ont une lettre commune ou non.

Nous avons déjà employé (n°s 4, 20) les lettres e et f pour désigner les sommets et les faces des tétraèdres a, b, c.

24. Par tout point e passent quatre droites L qui déterminent trois paires de plans F; les plans de ces paires appartiennent respectivement aux tétraèdres A, B, C (n° 2).

Sur tout plan f sont situées quatre droites A qui déterminent un quadrilatère complet, dont les trois paires de sommets opposés sont formées respectivement par des sommets E des tétraèdres A, B, C.

Par tout point E passent quatre droites Λ qui déterminent trois paires de plans f; les plans de ces paires sont formés respectivement par des faces des tétraèdres a, b, c.

Sur tout plan F sont situées quatre droites L qui déterminent un quadrilatère complet, dont les trois paires de sommets opposés sont formées respectivement par des sommets e des tétraèdres a, b, c.

Par chacune des droites G passent deux faces d'un tétraèdre de chacun des systèmes desmiques; ces deux couples de plans sont séparés entre eux harmoniquement.

Sur chacune des droites G sont situés deux sommets d'un tétraèdre de chacun des systèmes desmiques; ces deux paires de points sont séparées entre elles harmoniquement.

De même que par toute droite L passe une face de chacun des tétraèdres A, B, C, de même par toute droite Λ passe une face de chacun des tétraèdres a, b, c.

De même que sur toute droite Λ se trouve un sommet de chacun des tétraèdres A, B, C, de même sur toute droite L se trouve un sommet de chacun des tétraèdres a, b, c.

Les droites Λ *jouent donc, par rapport à l'un des systèmes desmiques, le même rôle que les droites* L *par rapport à l'autre.*

De même que les points E opposés aux plans F passant par une droite L sont situés sur la droite correspondante Λ (n° 7), de même les plans f opposés aux points e situés sur une droite Λ passent par la droite correspondante L.

25. Considérons deux tétraèdres quelconques, D et d, ayant un couple commun d'arêtes Dd. Toute face de chacun de ces tétraèdres passe par l'une de ces arêtes et coupe l'autre suivant un sommet du même tétraèdre; de même tout sommet de chacun de ces tétraèdres est situé sur l'une de ces arêtes et détermine avec l'autre un plan qui forme une face du même tétraèdre. Ainsi, à tout sommet de chacun de ces tétraèdres *correspond*, d'une manière réciproque, une face du même tétraèdre.

Deux faces des deux tétraèdres D et d, passant respectivement par les deux droites du couple Dd, se coupent suivant une droite coïncidant avec celle qui joint les sommets correspondant aux faces considérées. Les huit droites H ainsi obtenues peuvent être distribuées en quatre paires; deux droites H constituent une paire ou sont *conjuguées* si chacune forme l'intersection des faces opposées aux sommets des tétraèdres D et d situés sur l'autre.

Deux faces de D passant par l'une des droites Dd forment avec les faces de d passant par l'autre un tétraèdre ayant deux sommets communs avec chacun des tétraèdres D et d, et pour arêtes, à côté des droites Dd, quatre droites H. Tout sommet de ce nouveau tétraèdre appartient à celui des deux tétraèdres D, d auquel appartient aussi la face opposée à ce sommet; par conséquent, aussitôt qu'une droite H forme une arête de ce nouveau tétraèdre, la droite H qui en est la conjuguée forme l'arête opposée du même tétraèdre. On obtient ainsi deux tétraèdres ayant pour arêtes communes les droites Dd.

Les faces du tétraèdre D coupent celles de d suivant seize droites, dont quatre coïncident avec chacune des droites Dd et les autres avec les huit droites H. Ces mêmes seize droites forment les droites joignant les sommets de D aux sommets de d.

A toute combinaison de chacun des tétraèdres A, B, C avec chacun des tétraèdres a, b, c correspondent ainsi huit droites H. On obtient ainsi soixante-douze droites H.

Les faces des tétraèdres A, B, C coupent celles des tétraèdres a, b, c suivant $12.12 = 144$ droites, dont quatre coïncident avec chacune des droites G, tandis que les autres sont formées par les soixante-douze droites H. Ces mêmes cent quarante-quatre droites joignent les sommets des A, B, C aux sommets des a, b, c.

26. Chacun des neuf couples de droites G est rencontré par quatre autres appartenant aux deux tétraèdres qui contiennent ce couple, et il est séparé harmoniquement par les quatre couples restant (n° 23), qui sont situés sur une surface S_2 du second ordre, correspondant au couple considéré.

On a ainsi neuf surfaces S_2, dont quatre passent par tout couple de droites G correspondant aux quatre couples G séparés harmoniquement par le couple considéré.

Deux couples G séparés entre eux harmoniquement sont aussi séparés harmoniquement par un troisième couple de droites G. Il y a six pareils groupes de trois couples G, représentés par des symboles appartenant respectivement aux divers rangs et colonnes du Tableau :

$$\begin{matrix} \mathrm{A}a, & \mathrm{B}b, & \mathrm{C}c, \\ \mathrm{C}b, & \mathrm{A}c, & \mathrm{B}a, \\ \mathrm{B}c, & \mathrm{C}a, & \mathrm{A}b. \end{matrix}$$

Sur les trois couples G de chacun de ces groupes s'appuient deux droites imaginaires G′, formant deux génératrices communes aux trois surfaces du second ordre correspondant aux divers couples de ce groupe et comprenant par suite les deux autres couples du groupe. On obtient ainsi six couples de droites G′, qui peuvent être représentés par les symboles des couples G qu'ils rencontrent.

Sur chacune des surfaces S_2, celle par exemple qui correspond au couple Aa, sont situés deux couples de droites G′, formant les deux couples de génératrices de cette surface appuyés sur le couple Aa; ces deux couples G′ sont représentés par les symboles Aa.Bb.Cc et Aa.Cb.Bc.

27. Les trois couples de droites G′

$$\mathrm{A}a.\mathrm{B}b.\mathrm{C}c, \quad \mathrm{C}b\ \mathrm{A}c.\mathrm{B}a, \quad \mathrm{B}c.\mathrm{C}a.\mathrm{A}b$$

rencontrent chacun des couples

$$\mathrm{A}a.\mathrm{C}b.\mathrm{B}c, \quad \mathrm{B}b.\mathrm{A}c.\mathrm{C}a, \quad \mathrm{C}b.\mathrm{B}a.\mathrm{A}b.$$

Ces six couples de droites G′ appartiennent donc à une même surface (imaginaire) du second ordre S'_2.

Deux droites opposées G sont polaires l'une de l'autre par rap-

port à cette surface S'_2, parce qu'il y a deux couples de génératrices de cette surface appuyés sur ces deux droites et coïncidant avec deux couples de droites G'. *Chacun des tétraèdres* A, B, C, *a*, *b*, *c* *est donc conjugué par rapport à la surface* S'_2.

Par rapport à la même surface S'_2, toute droite L a pour polaire la droite Λ correspondante (n° 24); de même deux droites H conjuguées sont polaires l'une de l'autre.

Dans la corrélation polaire déterminée par la surface S'_2, chacune des surfaces S_2 se transforme en elle-même. Deux génératrices de S_2 sont polaires l'une de l'autre par rapport à S'_2 si elles sont séparées harmoniquement par le couple G auquel correspond cette surface S_2, et sur lequel s'appuient les génératrices communes à la surface S_2 considérée et à S'_2.

28. Les points d'intersection d'une droite G avec la surface S'_2 sont séparés harmoniquement par les couples de sommets E et *e* situés sur cette droite.

Les plans tangents menés à S'_2 par une droite G sont séparés harmoniquement par les couples de faces F et *f* passant par cette droite.

Les points d'intersection d'une droite Λ (ou L) avec la surface S'_2 forment la hessienne des trois sommets E (ou *e*) situés sur cette droite.

Les plans tangents de la surface S'_2 qui passent par une droite L (ou Λ) forment la hessienne des trois faces F (ou *f*) passant par cette droite.

La section de la surface S'_2 par un plan F (ou *f*) coïncide avec la conique qui forme une partie constituante de la hessienne de la courbe du quatrième ordre formée par les quatre droites L (ou Λ) situées dans ce plan.

Le cône circonscrit à la surface S'_2 et ayant pour sommet un des points E (ou *e*) forme une partie constituante de la hessienne du cône de la quatrième classe formé par les quatre droites Λ (ou L) passant par ce point.

FORMATION ET PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME REMARQUABLE DE QUINZE TÉTRAÈDRES.

29. Si nous représentons par 1, 2, 3 les trois couples de droites imaginaires correspondant aux rangs du Tableau

A*a*,	B*b*,	C*c*,
C*b*,	A*c*,	B*a*,
B*c*,	C*a*,	A*b*,

et par 4, 5, 6 les trois autres couples, correspondant aux colonnes du même Tableau, nous pourrons représenter les neuf couples de droites réelles correspondant respectivement aux divers éléments de ce Tableau par les symboles

$$(1)\qquad \begin{cases} 14, & 15, & 16, \\ 24, & 25, & 26, \\ 34, & 35, & 36. \end{cases}$$

Les couples représentés par deux de ces symboles sont séparés entre eux harmoniquement ou se rencontrent suivant que leurs symboles ont un indice commun ou non.

D'une manière analogue, nous pouvons représenter les six couples de droites imaginaires non plus par les symboles

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,$$

mais respectivement par ces autres :

$$(2)\qquad 23,\ 31,\ 12,\quad 56,\ 64,\ 45.$$

On remarquera que les couples représentés par deux de ces nouveaux symboles se rencontrent si leurs symboles n'ont pas d'indice commun, et que, de plus, deux couples imaginaires représentés par des symboles ayant un indice commun sont séparés entre eux harmoniquement. Par exemple, les trois couples 23, 31, 12 sont séparés deux à deux entre eux harmoniquement, parce qu'ils forment trois couples de génératrices de S'_2 appuyés respectivement sur les trois couples d'arêtes d'un quelconque des tétraèdres A, B, C, *a*, *b*, *c* (nº 22).

Si l'on compare maintenant les symboles (1) des couples réels et les symboles (2) des couples imaginaires, on s'aperçoit qu'un couple réel ne rencontre un autre imaginaire que si leurs symboles n'ont pas d'indice commun ; on peut démontrer de plus que deux couples pareils sont séparés harmoniquement aussitôt que leurs symboles ont un indice commun. Considérons, par exemple, les couples 24 et 23 ; le couple réel 24 forme avec les deux couples imaginaires 31 et 56, sur lesquels il s'appuie, un tétraèdre ; or, comme le couple 23 s'appuie sur le couple 56 et est séparé harmoniquement par le couple 31, il s'ensuit qu'il est séparé aussi harmoniquement par le couple 24 (nº 14).

On tire de tout cela que :

Deux quelconques des quinze couples de droites considérés sont séparés entre eux harmoniquement ou se rencontrent suivant que leurs symboles ont un indice commun ou non.

30. *Ces quinze couples de droites,* que nous désignerons par la seule lettre $\mathcal{G}$, *jouissent des propriétés communes résultant du caractère symétrique de leur représentation et correspondant aux propriétés combinatoires des symboles de ces couples.*

Il n'est donc pas étonnant que les propriétés de ces quinze couples $\mathcal{G}$ offrent la plus grande analogie avec celles d'un système de quinze droites de l'espace, situées par trois dans quinze plans et représentées par les quinze combinaisons de six indices différents, pris deux à deux, de manière que deux droites situées dans un même plan aient des symboles formés de quatre indices différents, système étudié à fond par Cremona dans le remarquable Mémoire déjà cité (n° 5, note).

En faisant une étude attentive de l'ensemble des quinze couples $\mathcal{G}$, on arrive à la détermination de six complexes linéaires situés deux à deux en involution, et l'on voit que toutes les propriétés de ces couples peuvent être déduites de la considération de six corrélations focales (*Nullsysteme*) correspondant aux symboles

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$

et qui, superposées deux à deux, donnent lieu aux quinze homologies involutives gauches ayant pour axes les divers couples de droites $\mathcal{G}$ (n°s 39, 40).

On s'engage ainsi sur un terrain qui est loin d'être inexploré. En effet, Félix Klein, dans son travail bien connu, *Zur Theorie der Liniencomplexe der ersten und zweiten Grades* [1], a fait connaître l'ensemble important des figures qu'on découvre par la considération simultanée de six complexes linéaires situés deux à deux en involution, complexes qu'il a nommés *fondamentaux* à l'égard de leur rôle envers les complexes du second ordre.

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. II; communiqué en extrait aux *Göttinger Nachrichten*, 1869.

Expliquer comment on peut, dans la foule des propriétés des couples $\mathcal{G}$, découvrir l'existence des six complexes fondamentaux, telle sera notre tâche principale dans ce qui suit; notre point de départ étant différent de celui de M. Klein et nos procédés purement géométriques, nous espérons ajouter quelque chose à la connaissance plus complète des figures déterminées par *six complexes fondamentaux*. Nous nous attacherons particulièrement au système des quinze tétraèdres dont les arêtes sont formées par des droites $\mathcal{G}$, et qui ont la propriété de constituer par trois *vingt systèmes desmiques de tétraèdres,* propriété que Klein n'a pas remarquée.

31. Tout couple de droites $\mathcal{G}$ est rencontré par six autres couples et séparé harmoniquement par les huit restant.

Deux couples $\mathcal{G}$ qui se rencontrent forment un quadrilatère gauche; le nombre de ces quadrilatères est $\frac{15.6}{2} = 45$. Aux deux couples d'un quadrilatère gauche correspond un troisième couple, qui forme avec les premiers les arêtes d'un tétraèdre. *Les quinze couples de droites $\mathcal{G}$ forment donc par trois les arêtes de* $\frac{45}{3} = 15$ *tétraèdres* T. Six de ces tétraèdres sont réels, les A, B, C, a, b, c, tandis que les neuf autres ont un seul couple d'arêtes réelles.

Tout couple $\mathcal{G}$ appartient à trois tétraèdres T; chacun des douze autres tétraèdres a un couple d'arêtes appuyé sur le couple considéré.

Les trente droites $\mathcal{G}$ se coupent par trois suivant les soixante sommets $\mathfrak{S}$ de ces quinze tétraèdres T *et sont situées par trois sur les soixante faces $\mathfrak{F}$ de ces mêmes tétraèdres. Sur chacune de ces droites $\mathcal{G}$ se trouvent six points $\mathfrak{S}$, formant trois paires de sommets appartenant respectivement à trois tétraèdres* T *et séparées deux à deux entre elles harmoniquement. Par chacune de ces droites passent aussi six plans $\mathfrak{F}$, formant trois paires de faces appartenant respectivement à trois tétraèdres* T *et séparées deux à deux entre elles harmoniquement.*

32. Considérons trois couples $\mathcal{G}$ formant un tétraèdre T. Chacun des douze autres couples $\mathcal{G}$ s'appuie sur un couple d'arêtes de ce

tétraèdre et est divisé harmoniquement par les deux autres; de ces douze couples, quatre rencontrent chacun des couples d'arêtes du tétraèdre considéré et forment avec ce couple les arêtes de deux tétraèdres T ayant les droites de ce couple pour arêtes communes.

Chacun des tétraèdres T a un couple d'arêtes commun avec six autres tétraèdres T; les huit tétraèdres restant s'appuient sur ce tétraèdre par leurs arêtes. Les paires de tétraèdres T appuyés entre eux par leurs arêtes sont donc en nombre de $\frac{15.8}{2} = 60$.

Considérons deux tétraèdres T, A′ et B′, appuyés entre eux par leurs arêtes; les couples homologues de ces tétraèdres déterminent trois nouveaux tétraèdres T, a', b', c', dont chacun contient un couple $\mathcal{G}$ non appartenant aux tétraèdres A′ et B′. Ces trois couples de droites $\mathcal{G}$ constituent les arêtes d'un nouveau tétraèdre T, C′, formant avec les tétraèdres A′ et B′ un système desmique, dont le conjugué est formé par les tétraèdres a', b', c'.

Les quinze tétraèdres T *se groupent ainsi par trois en* $\frac{60}{3} = 20$ *systèmes desmiques, formant dix paires de systèmes desmiques conjugués.*

Tout tétraèdre T appartient à quatre systèmes desmiques, dont chacun contient deux autres tétraèdres de ceux qui s'appuient sur le tétraèdre considéré. Les systèmes conjugués à ces quatre systèmes desmiques sont formés de tétraèdres ayant avec le tétraèdre considéré un couple commun d'arêtes.

Deux tétraèdres T *ayant un couple commun d'arêtes appartiennent donc de deux manières différentes à deux systèmes desmiques* T *conjugués.*

Les paires de tétraèdres T ayant un couple commun d'arêtes sont au nombre de quarante-cinq.

33. Deux couples de droites $\mathcal{G}$ séparés entre eux harmoniquement forment une *tétrade harmonique* de droites. Le nombre de ces tétrades est $\frac{15.8}{2} = 60$.

Comme deux couples $\mathcal{G}$ formant une tétrade harmonique ont des symboles (jk, ki) contenant trois indices différents i, j, k, il s'ensuit que les trois couples $\mathcal{G}$ dont les symboles contiennent deux

des trois autres indices *l*, *m*, *n* s'appuient sur les droites de cette tétrade et sont situés par conséquent sur la surface du second ordre contenant les droites de la tétrade.

Aux deux couples *jk* et *ki* d'une tétrade harmonique correspond un troisième couple *ij*, séparé harmoniquement par chacun de ces couples, et dont le symbole contient des indices appartenant respectivement aux symboles de ces mêmes couples. Ce troisième couple rencontre tous les trois couples $\mathfrak{G}$ appuyés sur les premiers; il est donc situé sur la surface du second ordre, déterminée par les droites de la tétrade harmonique.

On peut arriver à la même surface du second ordre en partant d'une quelconque des six tétrades harmoniques qu'elle contient.

Les quinze couples $\mathfrak{G}$ sont donc situés par six sur dix surfaces $\mathfrak{S}_2$ du second ordre.

De ces surfaces une est imaginaire et coïncide avec la surface S'_2, tandis que les neuf autres sont réelles (hyperboloïdes gauches) et coïncident nécessairement avec les neuf surfaces S_2, que nous avons déjà considérées (n° 27).

Chacune de ces surfaces $\mathfrak{S}_2$ peut être désignée indifféremment par un des symboles

$$ijk.lmn, \quad ijk \quad \text{ou} \quad lmn,$$

qui indiquent suffisamment les couples $\mathfrak{G}$ qui s'y trouvent.

Par chacun des couples $\mathfrak{G}$ passent $\frac{8}{2} = 4$ surfaces $\mathfrak{S}_2$, dont chacune contient trois couples rencontrant le couple considéré. *Par deux couples $\mathfrak{G}$ appuyés entre eux, passent donc* $\frac{3.4}{6} = 2$ *surfaces $\mathfrak{S}_2$. Deux surfaces $\mathfrak{S}_2$ se coupent,* par conséquent, *toujours suivant deux couples de droites $\mathfrak{G}$.*

Tout tétraèdre T dont un couple d'arêtes est situé sur une surface $\mathfrak{S}_2$ a aussi un autre couple d'arêtes situé sur la même surface.

34. Chacun des neuf couples $\mathfrak{G}$ situés en dehors de la surface *ijk.lmn* est formé de droites dont l'une est la polaire de l'autre par rapport à cette surface, car ce couple appartient à un tétraèdre T dont les deux autres couples sont situés sur la surface considérée.

Ces neuf couples $\mathfrak{G}$ constituent les arêtes de six tétraèdres T

conjugués par rapport à la surface $ijk.lmn$ et formant deux systèmes desmiques conjugués. Ainsi, ceux de ces neuf couples dont les symboles appartiennent aux divers rangs du Tableau

$$\begin{matrix} il, & jm, & kn, \\ km, & in, & jl, \\ jn, & kl, & im, \end{matrix}$$

déterminent trois tétraèdres d'un système desmique, tandis que les couples dont les symboles appartiennent aux diverses colonnes du même Tableau déterminent trois autres tétraèdres formant le système desmique conjugué.

Les dix paires de systèmes desmiques conjugués (nº **32**) *correspondent aux diverses surfaces* $\mathfrak{S}_2$. *Les deux systèmes* A, B, C *et* a, b, c *correspondent en particulier à la surface* $\mathbf{S}'_2$.

Chacun des tétraèdres T est conjugué par rapport à quatre surfaces $\mathfrak{S}_2$. Deux tétraèdres T ayant un couple commun d'arêtes sont simultanément conjugués par rapport à deux surfaces $\mathfrak{S}_2$.

Deux surfaces $\mathfrak{S}_2$ sont toujours conjuguées par rapport à deux tétraèdres T ayant pour arêtes communes les droites du couple $\mathcal{G}$ appuyé sur les deux couples $\mathcal{G}$ communs à ces deux surfaces. Les cinq couples $\mathcal{G}$ appartenant à ces deux tétraèdres forment les seuls couples $\mathcal{G}$ situés en dehors de ces deux surfaces.

35. A toute paire de systèmes desmiques T conjugués correspondent seize droites L et autant de droites Λ. Sur chacune de ces droites se trouve un sommet de chacun des tétraèdres de l'un des systèmes, en même temps que passe par elle une face de chacun des tétraèdres du système conjugué. Ainsi :

Les soixante points $\mathfrak{S}$ *sont situés par trois sur trois cent vingt droites* $\mathfrak{L}$, *par lesquelles passent aussi par trois les soixante plans* $\mathfrak{F}$. *Les trois tétraèdres ayant pour sommets les points* $\mathfrak{S}$ *situés sur une de ces droites appartiennent à un même système desmique, au système conjugué duquel appartiennent les tétraèdres dont les faces* $\mathfrak{F}$ *passent par la même droite.*

A toute paire de tétraèdres T ayant un couple commun d'arêtes correspondent huit droites H (nº **25**), sur chacune desquelles est

situé un sommet de chacun des deux tétraèdres, tandis que par elle passe une face de chacun de ces mêmes tétraèdres. Comme il y a quarante-cinq pareilles paires de tétraèdres T, il s'ensuit que :

Les soixante points $\mathfrak{S}$ *sont situés par deux sur* $8.45 = 360$ *droites* H, *par lesquelles passent aussi par deux les soixante plans* $\mathfrak{F}$. *A chacune de ces droites* H *correspondent deux tétraèdres* T, *ayant pour sommets les points* $\mathfrak{S}$ *situés sur cette droite et pour faces les plans* $\mathfrak{F}$ *qui y passent.*

Les soixante points $\mathfrak{S}$ déterminent, pris deux à deux, $\frac{60.59}{2} = 1770$ droites. De ces droites, $\frac{6.5}{2} = 15$ coïncident avec chacune des droites $\mathfrak{G}$, $\frac{3.2}{2} = 3$ coïncident avec chacune des droites $\mathfrak{L}$, et les autres coïncident avec les droites H. Le nombre 1770 égale en effet la somme

$$15.30 + 3.320 + 360.$$

Ces mêmes dix sept cent soixante-dix droites forment les intersections des soixante plans $\mathfrak{F}$ pris deux à deux.

36. Par tout point $\mathfrak{S}$ passent : 1° trois faces du tétraèdre T dont ce point $\mathfrak{S}$ est un sommet, faces formant un trièdre ayant pour arêtes les trois droites $\mathfrak{G}$ passant par ce point ; 2° deux faces de chacun des six tétraèdres T ayant avec le tétraèdre précédent un couple commun d'arêtes. De ces douze plans, quatre passent par chacune des arêtes du trièdre et coupent la face opposée de ce trièdre suivant quatre droites H ; les douze droites H ainsi obtenues sont les seules passant par le point $\mathfrak{S}$ considéré. Ces douze plans se coupent de plus par trois suivant seize droites $\mathfrak{L}$, les seules passant par le même point $\mathfrak{S}$.

Sur tout plan $\mathfrak{F}$ sont situés : 1° trois sommets du tétraèdre T dont ce plan $\mathfrak{F}$ forme une face, sommets déterminant un triangle ayant pour côtés les droites $\mathfrak{G}$ situées dans ce plan ; 2° deux sommets de chacun des six tétraèdres T ayant avec le tétraèdre précédent un couple commun d'arêtes. De ces douze points, quatre sont situés sur chaque côté du triangle et sont projetés du sommet opposé de ce triangle par quatre droites H ; les douze droites H ainsi obtenues sont les seules situées sur le plan $\mathfrak{F}$ considéré. Ces douze points sont situés de plus par trois sur seize droites $\mathfrak{L}$, les seules situées dans le même plan $\mathfrak{F}$.

Quant à la disposition des douze droites H et des seize droites $\mathfrak{L}$,

autour d'un point 𝔈 ou sur un plan 𝔉, nous pouvons remarquer ce qui suit.

Les douze droites H passant par un point 𝔈 sont situées par trois sur seize plans N.

Les seize droites 𝔏 passant par le même point sont situées par couples sur quarante-huit plans Q, dont chacun contient aussi une droite H passant par le point considéré.

Les douze droites H situées dans un plan 𝔉 convergent par trois vers seize points M.

Les seize droites 𝔏 situées dans le même plan passent par couples par quarante-huit points P, par chacun desquels passe aussi une droite H située dans le plan considéré.

Les soixante points 𝔈 *sont situés par quatre sur neuf cent soixante plans* N *et par six sur quatre cent quatre-vingts plans* Q. *Sur chacun des plans* N *sont situées une droite* 𝔏 *et trois droites* H; *tandis que sur chacun des plans* Q *sont situées quatre droites* 𝔏 *formant un quadrilatère complet, dont les trois diagonales sont des droites* H.

De même :

Les soixante plans 𝔉 *passent par quatre par neuf cent soixante points* M *et par six par quatre cent quatre-vingts points* P. *Vers chacun des points* M *convergent une droite* 𝔏 *et trois droites* H; *tandis que vers chacun des points* P *convergent quatre droites* 𝔏 *et trois droites* H *formant,* etc.

Par chacune des droites 𝔏 passent trois plans N contenant respectivement les points 𝔈 opposés aux plans 𝔉 passant par cette droite. Sur chacune de ces mêmes droites 𝔏 sont situés aussi trois points M, formant les traces des trois plans 𝔉 opposés aux trois points 𝔈 situés sur cette droite.

37. Tout couple de droites 𝔊 détermine une homologie involutive gauche, suivant laquelle deux points, ou deux droites, ou deux plans forment deux éléments homologues aussitôt qu'ils sont séparés harmoniquement par les droites du couple 𝔊 considéré, droites qui constituent les deux axes d'homologie.

Suivant chacune de ces homologies, les quatorze autres couples 𝔊 se transforment en eux-mêmes : d'abord les couples appuyés sur

les axes d'homologie, dont les droites correspondent à elles-mêmes, puis les couples séparés harmoniquement par les axes d'homologie, dont les droites se permutent. Tout tétraèdre T se transforme donc par cette homologie en lui-même; pareillement, toute surface $\mathfrak{S}_2$ se transforme en elle-même.

Ces quinze homologies $\mathcal{G}$ constituent *un groupe de transformations,* parce qu'on n'obtient pas de nouvelles homographies en multipliant ces transformations deux à deux. Ainsi, de la superposition de deux homologies involutives $\mathcal{G}$ dont les axes se rencontrent résulte l'homologie involutive $\mathcal{G}$ dont les axes s'appuient sur les axes des premières; d'autre part, la superposition de deux homologies involutives $\mathcal{G}$ dont les axes sont séparés entre eux harmoniquement donne lieu à l'homologie $\mathcal{G}$ dont les axes sont séparés harmoniquement par les axes de chacune des premières et sont de plus situés sur une même surface $\mathfrak{S}_2$ que ces axes.

38. De même, toute surface $\mathfrak{S}_2$ détermine une corrélation polaire suivant laquelle chacun des quinzes couples $\mathcal{G}$ se transforme en lui-même. En effet, les couples $\mathcal{G}$ situés sur cette surface ont des droites correspondant à elles-mêmes, tandis que les neuf autres couples ont des droites dont chacune est la polaire de l'autre par rapport à cette surface. Dans chacune de ces corrélations polaires, les quinze tétraèdres T se transforment en eux-mêmes; de même, les neuf autres surfaces $\mathfrak{S}_2$ se transforment en elles-mêmes.

Comme la corrélation polaire déterminée par une des surfaces $\mathfrak{S}_2$ établit entre les génératrices d'une autre surface $\mathfrak{S}_2$ une correspondance involutive [1] identique avec celle déterminée par l'homologie involutive $\mathcal{G}$ dont les axes s'appuient sur les génératrices communes de ces deux surfaces, il s'ensuit que :

L'homographie résultant de la superposition [2] *de deux cor-*

---

[1] On trouve dans le § 5 des *Beiträge zur Geometrie der Lage* de Staudt, paragraphe intitulé *Involutorische Regelschaaren in Polarsystemen*, les propriétés principales des correspondances établies par des corrélations polaires et focales (Polarsystemen) sur les deux systèmes de génératrices d'un hyperboloïde gauche transforme en lui-même.

[2] L'opération de la superposition de deux transformations peut se faire de deux manières différentes, qui dans tous les cas que nous aurons à considérer ici conduisent à des résultats identiques.

rélations polaires déterminées par deux surfaces $\mathfrak{S}_2$ *est identique avec l'homologie involutive* $\mathcal{G}$ *dont les axes s'appuient sur les génératrices communes aux deux surfaces considérées.*

La corrélation résultant de la superposition de la corrélation polaire déterminée par une surface $\mathfrak{S}_2$ *et d'une homologie involutive* $\mathcal{G}$ *dont les axes sont situés en dehors de cette surface* $\mathfrak{S}_2$ *est identique avec la corrélation polaire déterminée par une autre surface* $\mathfrak{S}_2$, *coupant la précédente suivant deux couples de droites* $\mathcal{G}$ *appuyés sur les axes de l'homologie involutive* $\mathcal{G}$ *considérée.*

39. Examinons maintenant les corrélations qui résultent de la combinaison d'une corrélation polaire déterminée par une des surfaces $\mathfrak{S}_2$ et d'une homologie involutive $\mathcal{G}$ dont les axes sont situés sur cette surface.

Considérons pour cela la corrélation polaire $ijk.lmn$ et l'homologie involutive jk; nous allons voir que la corrélation résultante de la superposition de ces deux correspondances est *focale*. En effet, si Σ et Σ' sont deux points homologues dans l'homologie considérée, le plan polaire Π de Σ' par rapport à la surface $ijk.lmn$, qui sera le correspondant du point Σ dans la nouvelle corrélation, passe toujours par le point Σ.

Cette nouvelle corrélation laisse invariable la correspondance établie entre les génératrices de $ijk.lmn$ par l'homologie involutive jk. Une droite correspond à elle-même, suivant cette corrélation focale, c'est-à-dire elle appartient au complexe linéaire déterminé par cette corrélation, aussitôt que sa droite homologue dans l'homologie involutive jk coïncide avec sa polaire par rapport à la surface $ijk.lmn$. Ainsi, les droites des couples dont les symboles

$$jk,\quad jl,\quad jm,\quad jn,\quad kl,\quad km,\quad kn,\quad lm,\quad ln,\quad mn$$

présentent les dix combinaisons des indices j, k, l, m, n pris deux à deux appartiennent à ce complexe. Au contraire, les droites des autres couples dont les symboles

$$ij,\quad ik,\quad il,\quad im,\quad in$$

contiennent l'indice i se permutent entre elles.

Il est manifeste que l'on arrive à la même corrélation en combinant respectivement les diverses corrélations polaires

$$ijk,\ ijl,\ ijm,\ ijn,\ ikl,\ ikm,\ ikn,\ ilm,\ iln,\ imn$$

avec les homologies

$$jk,\ jl,\ jm,\ jn,\ kl,\ km,\ kn,\ lm,\ ln,\ mn.$$

On voit ainsi que :

En combinant successivement la corrélation polaire déterminée par une quelconque des surfaces $\mathfrak{S}_2$ *avec les six homologies involutives gauches ayant pour axes les couples* $\mathfrak{G}$ *situés sur cette surface, on arrive à un système unique de six corrélations focales, qui peuvent être représentées par les symboles*

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Dans chacune de ces six corrélations, les quinze couples $\mathfrak{G}$ *se transforment en eux-mêmes, de manière que les droites des dix couples* $\mathfrak{G}$ *dont les symboles ne contiennent pas l'indice représentatif de la corrélation correspondent à elles-mêmes, tandis que les droites de chacun des cinq autres couples se permutent entre elles.*

40. *De la combinaison de deux quelconques de ces corrélations focales résulte une homographie coïncidant avec l'homologie involutive gauche dont les axes forment le couple* $\mathfrak{G}$ *représenté par un symbole contenant les deux indices représentatifs des deux corrélations.*

Les six complexes déterminés par ces six corrélations focales sont donc situés en involution deux à deux et forment, pris ensemble, *un système de complexes fondamentaux,* suivant l'expression de M. Klein (n° 30).

Le système de six complexes fondamentaux est susceptible d'un nombre ∞^{15} de déterminations; toutefois on ne peut considérer le système *des six complexes réels* auquel nous venons d'arriver que comme un cas du système de complexes de M. Klein, lequel peut renfermer aussi deux, quatre et même six complexes imaginaires.

Mais il est évident que la particularité de notre système, provenant de ce que nous avons supposé les tétraèdres primitifs A, B, C comme réels, est purement occasionnelle et qu'elle disparaît complètement aussitôt qu'on laisse les éléments déterminatifs de ces tétraèdres être quelconques.

41. De même que toute homologie involutive ij provient de la superposition des deux corrélations focales i et j, de même *toute corrélation polaire ijk ou lmn résulte de la superposition dans un ordre quelconque des trois corrélations focales i, j, k ou de ces autres l, m, n.*

Si l'on désigne maintenant par

$$i_1 i_2 i_3 \ldots i_h$$

la correspondance résultant de la superposition des corrélations focales (composantes)

$$i_1, \quad i_2, \quad i_3, \quad \ldots, \quad i_h,$$

prises parmi les six corrélations 1, 2, 3, 4, 5, 6, et par o l'homographie *identique*, c'est-à-dire celle dans laquelle tout élément de l'espace correspond à lui-même, on pourra résumer toutes les propriétés des six corrélations focales relatives aux correspondances qui en sont composées dans les relations suivantes :

$$11 \equiv 22 \equiv 33 \equiv 44 \equiv 55 \equiv 66 \equiv ii \equiv 0,$$
$$123456 \equiv ijklmn \equiv 0.$$

En effet, de ces relations et de l'identité $oi \equiv i$ on peut tirer d'abord la relation

$$ijklm \equiv n,$$

qui exprime la propriété de la superposition d'une corrélation polaire ijk et d'une homologie involutive lm (n° 39). On obtient de même les relations

$$ijkl \equiv mn \quad \text{et} \quad ijjk \equiv ik,$$

qui expriment les propriétés de la superposition de deux homologies $\mathcal{G}$ (n° 37). On en obtient enfin de nouveau $ijk \equiv lmn$.

En général, si l'on considère la correspondance involutive

$$i_1 i_2 i_3 \ \ldots \ i_h,$$

qui, comme on voit, est homographique ou corrélative suivant que h est pair ou impair, on peut démontrer qu'elle peut être obtenue en superposant ses corrélations composantes dans un ordre quelconque. En utilisant dès lors les relations

$$ii \equiv 0, \quad 0i \equiv i, \quad 123456 \equiv 0,$$

on pourra réduire le nombre de ses corrélations composantes à être moindre que quatre.

Nous pouvons donc dire que :

Les six corrélations focales 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les quinze homologies involutives* $\mathfrak{G}$ *et les dix corrélations polaires* $\mathfrak{S}_2$ *forment avec l'homographie identique un système fermé ou groupe.*

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LIAGRE (J.-B.-J.) et PENY (C.). — CALCUL DES PROBABILITÉS ET THÉORIE DES ERREURS, avec des applications aux sciences d'observation en général et à la Géodésie en particulier. — Bruxelles, Muquardt; Paris, Gauthier-Villars, 1879. In-8°, xx-582 pages.

La première édition du *Calcul des probabilités et théorie des erreurs* de M. Liagre date d'environ vingt-sept ans et est, depuis plusieurs années, devenue introuvable. Le succès de ce Volume, qui s'adressait à tous les astronomes et physiciens qui, sans être à même de faire une étude approfondie des grands Traités de Jacques Bernoulli, d'Euler, de Condorcet, de Laplace, de Gauss, de Legendre, de Cournot, etc., avaient cependant besoin, pour leurs déterminations d'orbites ou pour la discussion de leurs expériences, d'être initiés au mécanisme du calcul des erreurs et des résultats les plus probables d'une série d'observations, était d'ailleurs des mieux justifiés. M. le lieutenant général Liagre, s'inspirant des travaux de ses devanciers, avait en effet exposé d'une manière didactique et avec une rare clarté les principes généraux qui régissent cette branche importante des Mathématiques appliquées, et, par des exemples soigneusement choisis dans l'Astronomie, la Géodésie, l'Art militaire ou la Physique, il avait su élucider d'une manière complète ce que la théorie présente souvent d'abstrait. Tous ceux, et ils sont sans aucun doute nombreux, qui ont eu dans les mains et qui ont étudié le Volume que j'analyse ici rendront ce témoignage qu'il était un modèle de clarté et d'exposition classique.

La nouvelle édition du *Calcul des probabilités* que publie aujourd'hui M. Liagre a été revue et augmentée, par les soins de son auteur et de M. le capitaine d'état-major Peny, dans des proportions qui en font presque un Ouvrage nouveau. On y retrouvera d'ailleurs le même plan, la même division, les mêmes qualités d'exposition que dans le Volume de 1852.

La première Section traite des *probabilités théoriques* ou *a priori ;* on y part des *causes,* supposées connues, et on les combine pour arriver à la probabilité des événements. Après une exposition de ce que l'on doit entendre par la *probabilité d'un événement,*

l'auteur fait connaître d'une manière succincte les principes les plus généraux de la théorie des combinaisons. Vient ensuite un Chapitre consacré à la probabilité absolue, relative, simple ou composée. Le Chapitre III a pour but l'exposition des lois de la probabilité mathématique dans la répétition des mêmes épreuves. Enfin cette première Section se termine par l'exposé des règles du calcul de l'*espérance mathématique* et de leurs applications à la règle des parties.

Les quatre Chapitres dont nous venons d'indiquer brièvement le contenu sont consacrés au calcul de la probabilité des événements lorsqu'on connaît les causes qui les produisent et aux applications de ce calcul à quelques problèmes particulièrement intéressants. Les trois Chapitres qui suivent ont pour but la solution du problème inverse ; ils traitent de la détermination de la probabilité des causes par la considération des événements eux-mêmes. En effet, dans les applications les plus nombreuses et pratiquement les plus importantes du Calcul des probabilités, les *rapports des chances*, qui servent de mesure à l'action des causes dont dépend la production des événements, ne sont pas connus *a priori*. On ne pourrait donc former aucune prévision sur le résultat d'épreuves ultérieures si l'on ne savait déduire des expériences déjà faites des évaluations plausibles sur ces rapports, c'est-à-dire sur la probabilité de l'action des causes. Les procédés qui ont pour but de déterminer la probabilité des événements à venir d'après les résultats des épreuves antérieures constituent le Calcul des *probabilités a posteriori*, qui fait l'objet de la deuxième Section de notre Volume.

Les questions de cet ordre peuvent elles-mêmes être envisagées à deux points de vue distincts :

1° La production d'un événement A peut être due à un nombre limité de causes, et alors, suivant la règle de Bayes, « les probabilités des causes (ou des hypothèses) sont proportionnelles aux probabilités que ces causes donnent pour les événements observés. La probabilité d'une de ces causes ou hypothèses est une fraction qui a pour numérateur la probabilité de l'événement par suite de cette cause et pour dénominateur la somme des probabilités semblables, relatives à toutes les causes ou hypothèses. » M. Liagre, après avoir montré par de nombreux exemples le sens exact de ce principe, en démontre rigoureusement la généralité.

2° La production d'un événement A doit, comme dans le cas d'un phénomène naturel, être considérée comme due à un nombre infini de chances ou d'hypothèses. Ce second cas est traité par M. Liagre avec non moins d'autorité que le premier, mais les conclusions auxquelles il arrive ne sont pas de nature à être résumées en quelques lignes.

L'auteur s'occupe ensuite des règles propres à démontrer l'existence d'une combinaison de causes favorables à la production d'un événement déterminé, et il examine, à ce propos, quelques résultats de la Statistique.

Parmi les causes il faut d'ailleurs distinguer : les causes constantes, qui ont pour elles un certain nombre *déterminé* de chances, une probabilité fixe; les causes variables, qui ont pour elles un nombre *variable* de chances, et par suite une probabilité qui peut osciller dans des limites plus ou moins larges; enfin les causes accidentelles, qui n'ont pas, à proprement parler, de chances en leur faveur, mais qui influent sur l'ordre de succession des événements.

L'existence de ces diverses espèces de causes amène d'ailleurs M. Liagre à définir la signification exacte des termes *moyenne arithmétique, valeur médiane* ou *valeur probable,* dont le sens différent est mis en lumière par l'étude d'une question spéciale, les variations diurnes et annuelles de la température et du baromètre.

Enfin cette deuxième Section du *Calcul des probabilités* se termine par une étude sur les Tables de mortalité et leurs conséquences au point de vue des problèmes des rentes viagères, des tontines, des caisses de prévoyance et de secours.

La troisième Section présente les *applications* du Calcul des probabilités aux observations et aux expériences; elle indique la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition et de répartir les erreurs fortuites; elle apprend à trouver les résultats moyens les plus probables et à en estimer la précision. Le guide de M. Liagre, dans toute la partie théorique de cette Section, est Gauss; mais les démonstrations de l'illustre auteur du *Theoria motus* sont présentées avec plus de netteté, et la part des hypothèses, légitimes d'ailleurs, qu'il est inévitable de faire, sur le mode de répartition des erreurs accidentelles des diverses grandeurs mise plus en évidence. La notion d'une erreur probable et d'une erreur

moyenne, liée à la première, apparaît ainsi comme nécessaire, et les notions de poids et de précision se trouvent naturellement introduites. L'application de ces principes à la détermination d'un angle, à la mesure de la densité de la Terre et à la recherche de la composition de l'eau termine ce Chapitre et la troisième Partie.

La quatrième Section commence par un Chapitre relatif au calcul de l'erreur moyenne et de la précision d'une fonction linéaire de plusieurs quantités directement mesurées : c'est le cas qui se présente quand on détermine un angle par la somme de deux autres, une base topographique à l'aide de règles géodésiques, etc.

Mais le cas qui se présente le plus souvent dans la pratique est celui où l'on doit déterminer des inconnues à l'aide d'équations linéaires dont le nombre est supérieur à celui des inconnues elles-mêmes : c'est pour ce cas que Legendre et Gauss ont proposé la méthode des moindres carrés. M. Liagre légitime d'abord cette méthode, puis il en expose les calculs en suivant pas à pas le Mémoire que Gauss lui a spécialement consacré. Une fois en possession de cet ensemble de règles, les applications se présentent nombreuses et variées; mais c'est sur les questions géodésiques que M. Liagre s'étend particulièrement.

Il traite d'abord du calcul de l'erreur moyenne d'une base géodésique, puis de la mesure des angles géodésiques et de la compensation des triangles, de la détermination des directions les plus probables fournies par les observations faites à une station géodésique et de la compensation de l'ensemble d'un réseau trigonométrique. Enfin le Volume se termine par une théorie du nivellement trigonométrique et de sa compensation par la méthode de Gauss.

Tel est le résumé des principales questions étudiées par MM. Liagre et Peny dans leur Traité du Calcul des probabilités et de la théorie des erreurs; quelque incomplet qu'il soit, j'espère qu'il sera de nature à montrer aux lecteurs du *Bulletin* l'intérêt qui s'attache à cet Ouvrage. G. R.

ЕРМАКОВЪ (В.-П.). — Теорія вѣроятностей. Лекціи читанныя въ Императорскомъ Университетѣ Св. Владиміра профессоромъ *В.-П. Ермаковымъ.* Кіевъ, 1879 (¹). — Gr. in-8°, 140 p.

L'auteur expose d'abord, dans sa Préface, le but qu'il a poursuivi en publiant ses Leçons. Les Traités que l'on possède sur le Calcul des probabilités passent trop rapidement sur les principes fondamentaux de cette science et réservent les développements pour les applications diverses aux assurances, aux témoignages judiciaires, aux Tables de mortalité, etc. M. Ermakof a consacré son Ouvrage entièrement à la théorie. De plus, il a comblé une lacune qui se rencontre chez les autres auteurs, en ajoutant à la fin du Volume un Recueil d'exercices variés sur le Calcul des probabilités, avec l'indication des résultats.

Parmi les parties nouvelles qu'il a introduites dans sa rédaction, il signale une démonstration, due à M. Tchebychef, d'un théorème très général contenant, comme cas particulier, le théorème de Bernoulli (²).

La théorie des combinaisons, telle qu'elle est exposée dans les Traités d'Algèbre ordinaires, ne suffit pas pour la solution des problèmes de probabilités, dans lesquels on doit chercher, parmi toutes les combinaisons des événements, le nombre de celles qui satisfont à des conditions données. Les anciens auteurs ont résolu ces difficultés par des méthodes particulières, en s'aidant le plus souvent de l'induction. Laplace a traité les mêmes problèmes par le calcul des différences finies; mais l'emploi de cette méthode est parfois sujet à de grandes difficultés, soit pour la position de l'équation aux différences, soit pour son intégration. Une Note de M. Camille Jordan, publiée dans le Tome LXV des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* p. 993, a fourni à M. Ermakof une solution facile et générale de cette classe de questions.

(¹) ERMAKOF (V.-P.), *Théorie des probabilités.* Leçons professées à l'Université impériale de Saint-Vladimir. Kief.

(²) *Математическій Сборникъ,* t. II, *Sur les valeurs moyennes.*

Le Traité de M. Ermakof se divise en cinq Chapitres, dont le premier est consacré à l'exposé de la théorie des combinaisons (p. 1-20).

Le Chapitre II (p. 21-54) traite des méthodes générales pour la détermination des probabilités des événements tant simples que composés : probabilités des événements simples; probabilités des événements composés consistant dans la production simultanée de plusieurs événements simples; probabilités des événements dans le cas où les circonstances favorables à leur arrivée ne sont pas également probables; probabilité de l'arrivée de l'un de ces événements.

Le Chapitre III (p. 55-78) a pour objet les probabilités des divers événements dans les épreuves répétées : théorème de Jacques Bernoulli; espérance mathématique.

Les matières traitées dans le Chapitre IV (p. 79-98) sont les suivantes : probabilités des événements dont la production dépend de causes diverses; espérance mathématique dans le cas de plusieurs causes agissantes; probabilités d'un événement futur, déduites des observations; probabilités des causes, déduites des observations.

Le Chapitre V (p. 99-116) est consacré à la recherche de la probabilité que, parmi une suite d'événements désignés d'avance, arrivent certains événements. L'auteur applique à la résolution de cette classe de problèmes la méthode de M. C. Jordan.

Le Recueil d'exercices qui termine le Volume comprend soixante et un énoncés de questions variées, dont les résultats sont donnés, quelques-uns avec des indications sur la marche à suivre.

ГРОМЕКА. — Очеркъ теоріи капиллярныхъ явленій. Теорія поверхностнаго сцѣпленія жидкости. Москва, 1879. — Grand in-8°, 68 pages (¹).

L'auteur remarque avant tout que la théorie des phénomènes capillaires suit deux directions : une indiquée par Laplace, l'autre par le mathématicien anglais Th. Young.

(¹) GROMEKA, *Exposé de la théorie des phénomènes capillaires; théorie de la cohésion superficielle des liquides*. Moscou, 1879.

Newton encore, dans son *Optique,* a décrit l'ascension de l'eau dans un tube capillaire et expliqué la loi, trouvée expérimentalement par Jurine, que cette ascension est inversement proportionnelle au diamètre du tube ; mais il n'a pas donné à son explication de développement suffisant.

Daniel Bernoulli et Clairaut ont fait les premiers essais d'une théorie mathématique des phénomènes capillaires.

Daniel Bernoulli ([1]) n'est pas parvenu à déterminer la loi de ces phénomènes. Clairaut ([2]), en s'appuyant sur les lois générales de l'Hydrostatique, expliqua l'ascension et l'abaissement dans les tubes étroits et indiqua la dépendance de ces phénomènes et de la forme du ménisque. En supposant que les parois du tube agissent sur toute la masse liquide intérieure et que l'ascension et l'abaissement dépendent de l'action de l'extrémité inférieure du tube, immergée dans le liquide, il n'est pas parvenu à établir analytiquement la loi de Jurine.

Le premier essai, mieux réussi, de la théorie en question est dû à Segner ([3]). Il admet que l'attraction mutuelle des particules liquides n'agit qu'à des distances inappréciables. De cette hypothèse il déduit les conditions d'équilibre des particules liquides, tant intérieures que contiguës à la surface, et démontre que la cohésion de ces dernières diffère de la cohésion des premières. Il examine ensuite les formes de gouttes liquides, posées sur un plan horizontal ou suspendues au bout d'une pointe, et conclut que la hauteur de ces gouttes est inversement proportionnelle au rayon de courbure du ménisque.

Enfin, d'après ces formules, il a dressé des Tables pour comparer les résultats théoriques avec ceux qu'il a obtenus dans ses recherches expérimentales.

Deux ans avant l'apparition de la théorie de Laplace, vers la fin de 1805, le mathématicien anglais Young ([4]) présenta à la Société Royale de Londres une dissertation sur la cohésion des liquides. Il

([1]) *Hydrodynamique*, 1738.

([2]) Clairaut, *Théorie de la figure de la Terre*, 1741.

([3]) Segner, *De figuris superficierum fluidorum* (*Comment. Societ. Scient. Gœtting.*, 1751).

([4]) Young, *An essay on the cohesion of fluids* (*Phil. Transactions*, 1805).

admettait aussi l'existence, dans les couches superficielles, des forces particulières de cohésion. Se fondant sur cette hypothèse, il a établi l'équation de la surface du liquide et a découvert la grandeur constante de l'angle que fait cette surface avec la paroi du tube. Young se proposait de développer sa théorie, mais il fut arrêté par l'apparition de l'Ouvrage de Laplace. Ultérieurement Young se borna à faire sur la théorie de Laplace quelques remarques, insérées dans le *Course of Lectures on Natural Philosophy*, pour l'année 1807.

Laplace ([1]) expliqua les phénomènes capillaires par l'attraction des molécules. Sa théorie peut servir de modèle quant aux recherches ayant trait aux phénomènes physiques, à l'aide de l'Analyse mathématique. L'auteur fait ici une remarque inexacte, que la théorie de Laplace ne met pas en évidence la grandeur de l'angle fait par la surface libre du liquide avec la paroi du vase. Dans les Suppléments 2 et 3, Laplace établit la valeur de cet angle.

Gauss ([2]) a exposé une autre théorie, fondée aussi sur l'attraction moléculaire, mais déduite du principe des vitesses virtuelles.

Laplace et Gauss n'ont pas assez remarqué cette circonstance, que les couches superficielles de tous les liquides possèdent des propriétés particulières, qui les distinguent de la masse intérieure ; la cohésion des molécules superficielles est plus considérable.

Poisson ([3]), dans son Ouvrage fondé sur l'hypothèse de l'attraction intermoléculaire, remarqua aussi ce changement rapide de densité à la surface des liquides. Dans cet Ouvrage, Poisson a étudié si complétement tant de questions diverses, qu'il a, pour ainsi dire, épuisé toute la théorie de la capillarité.

L'auteur a oublié d'indiquer ici la grande importance des expériences de Simon, dans la théorie des phénomènes capillaires. Ces expériences ont démontré que, dans le cas de tubes très-étroits, l'ascension n'est pas inversement proportionnelle au diamètre du tube, et alors la théorie de Poisson est en défaut : ce qui décida l'Académie des Sciences de Paris à mettre au concours le complément, dans ce sens, de la théorie de Poisson.

([1]) LAPLACE, *Mécanique céleste*, t. IV.

([2]) GAUSS, *Werke*, t. V : *Principia generalia theoriæ fluidorum in statu æquilibrii*.

([3]) POISSON, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, 1831.

Le professeur Davidof [1] prend soin d'accorder la théorie de Poisson avec la théorie générale d'équilibre des liquides, à l'aide du principe des vitesses virtuelles, et en même temps il s'occupe des circonstances physiques ayant un rapport essentiel avec ce sujet.

Son Ouvrage remarquable se compose de deux Parties. Dans la première, intitulée *Théorie physique des phénomènes capillaires*, sont réunis et systématisés les résultats des recherches expérimentales relatives à ces phénomènes ; dans la seconde est exposée la théorie mathématique de la capillarité.

En 1859, Paul du Bois-Reymond [2] soutint à Berlin une dissertation consacrée à la théorie de la capillarité, où il a exposé la théorie du potentiel des forces capillaires, et a donné une série de formules auxiliaires pour transformer les intégrales doubles en intégrales simples. Certaines de ces formules se trouvent dans les œuvres de Laplace et de Poisson ; cependant du Bois-Reymond les a établies indépendamment, en considérant la variation de la surface. Du Bois-Reymond ramène à quatre problèmes fondamentaux toutes les questions relatives à la théorie de la capillarité. La solution du quatrième problème, relatif à l'équilibre d'un corps flottant, appuyée, d'après l'opinion de M. Groméka, sur une hypothèse inexacte, l'a amené à des conclusions erronées, relativement au rapport existant entre le volume total d'un corps flottant et sa partie immergée.

D'après l'avis de l'auteur, pendant que la théorie de Laplace est arrivée, par suite des travaux des savants nommés plus haut, à un développement notable, la méthode de Young se développait beaucoup plus lentement et trouvait, pendant un certain temps, peu de partisans. En 1845 et 1846, Hagen [3] a repris, dans une série de Mémoires et au point de vue de Young, la théorie générale de la capillarité et plusieurs questions particulières qui s'y rapportent.

Depuis ce temps, plusieurs physiciens, Plateau, Lamarle, Van der Mensbrugghe, etc., se sont servis de l'hypothèse sur la cohésion superficielle des liquides, dans leur examen des phénomènes capillaires. Le nombre des imitateurs de Young croît constamment,

---

(1) DAVIDOF. *Теорія капиллярныхъ явленій*, 1851. Москва.

(2) P. DU BOIS-REYMOND, *De æquilibrio fluidorum*. Dissertatio inauguralis.

(3) HAGEN, *Denkschriften der Berl. Akad.*, 1845 et 1846.

d'après l'avis de l'auteur, qui expose brièvement la polémique des partisans de deux directions dans le *Journal de Physique* de d'Almeida. En premier lieu, Moutier [1] y inséra un article, en vue de démontrer la supériorité de la théorie de Laplace. Renouvelant les reproches faits à la théorie de Young, qu'elle est fondée seulement sur l'analogie entre la couche superficielle d'un liquide et une mince plaque élastique, Moutier démontre que la théorie de l'attraction moléculaire est suffisante pour expliquer tous les phénomènes capillaires, sans qu'on ait besoin d'une hypothèse, sur l'existence d'une mince plaque élastique sur la surface d'un liquide.

Dans le même Volume se trouve une Lettre de Van der Mensbrugghe, qui combat chaudement l'opinion de Moutier, que l'idée d'extension est tout à fait inutile. Ayant remarqué que cette idée n'exclut point la justesse de la théorie de Laplace, et rappelant l'essai de Lamarle [2] pour expliquer l'extension précisément par cette théorie, Van der Mensbrugghe indique les travaux de Quincke, de Lüstye et de beaucoup d'autres. Les problèmes si nombreux, ajoute Van der Mensbrugghe, examinés, sinon résolus, par ces savants, ont suffisamment démontré la grande utilité de ce point de vue, qui ne tardera pas à être introduit dans les Cours de Physique.

Dans le même Journal, on rencontre aussi les essais de Duclaux [3] pour réaliser la pensée de Van der Mensbrugghe et fonder, sur le principe de la cohésion superficielle des liquides, une théorie élémentaire des phénomènes capillaires. Une théorie pareille se trouve dans le Manuel de Grashof.

Tel est l'aperçu historique du progrès de la théorie de la capillarité que l'auteur a cru devoir donner au lecteur, pour mieux apprécier son propre point de vue sur cette théorie.

Après avoir mis en évidence que les deux directions suivies, dans l'étude de la théorie capillaire, diffèrent non-seulement dans ces bases, mais deviennent même incompatibles entre elles, dans l'exposition de certains écrivains, l'auteur cherche à établir son point de vue particulier sur la théorie de la cohésion superficielle

---

(1) Moutier, *Journal de Physique* de M. d'Almeida, t. I.

(2) Ath. Dupré, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXIV; 1867.

(3) Duclaux, *Sur la capillarité*. Extrait d'un travail inédit : *Théorie élémentaire de la capillarité* (*Journal de d'Almeida*, 1872).

des liquides. Il soutient que ce point de vue est capable d'accorder les deux directions et de justifier la théorie de Young de la principale des objections, qu'elle n'est pas suffisamment établie sur les principes généraux de la Mécanique rationnelle.

On sait que la solution théorique des problèmes où il est question des forces moléculaires devient plus facile en y introduisant l'idée auxiliaire de la pression. Cauchy définit la pression comme la résultante d'un certain système des forces moléculaires mutuelles.

Cette idée se prête avantageusement à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, liquides, etc.

L'auteur croit que l'application de cette idée aux phénomènes capillaires conduit à la théorie de la cohésion superficielle et supprime sa discordance avec la théorie de Laplace. Remplissant sa tâche, l'auteur commence par l'exposition des théorèmes généraux relatifs à la pression, découverts par Cauchy et rentrés déjà dans quelques cours d'enseignement. Dans la méthode analytique, il commence par les équations de du Bois-Reymond, représentant le rapport entre les intégrales dont les unes s'étendent sur une partie de la surface courbe et les autres sur le contour de cette surface. D'après son avis, ces équations sont utiles, tant pour l'établissement d'une des principales conditions d'équilibre capillaire, relatives à la surface libre d'un liquide, que pour la démonstration des théorèmes relatifs aux diverses portions d'un volume liquide. Ces équations, d'après l'avis de l'auteur, sont la partie fondamentale de la théorie des phénomènes capillaires. A l'aide de ces équations et des conditions d'équilibre des forces capillaires, il démontre le remarquable théorème suivant, qui peut être considéré comme une généralisation de la loi d'Archimède :

Lorsqu'un corps quelconque flotte librement sur la surface horizontale d'un liquide, une certaine portion de ce liquide s'élève ou s'abaisse autour de sa surface, et la somme des masses, exprimées près du niveau de flottaison, est égale à la somme de ces masses par lesquelles les premières sont remplacées.

Laplace [1] a déduit ce théorème de la considération d'un large

---

[1] LAPLACE, *Mécanique céleste*, t. IV (Suppl.), p. 34.

canal rempli de liquide et terminé par deux branches coudées verticalement.

Poisson a remarqué que cette méthode de démonstration est insuffisante, au point de vue de la théorie, et a démontré ce théorème seulement pour le cas particulier où le corps flottant est limité par une surface de révolution d'axe vertical.

L'auteur, dans les § 24 à 29 de son Ouvrage, donne une démonstration de ce théorème, pour les hypothèses les plus générales. En outre, il considère les relations qui existent entre les positions des centres de gravité des masses considérées, dont ne parlent ni Laplace ni Poisson. Il soutient enfin que les hypothèses erronées de du Bois-Reymond relatives à ce problème l'ont conduit à des formules erronées.

L'Ouvrage de M. Groméka contient trois Chapitres, intitulés :

1° *Conditions générales d'équilibre des liquides;*
2° *Propriétés des surfaces de séparation de deux liquides ;*
3° *Équilibre des corps flottants.*

Bien que l'Ouvrage analysé laisse certaines questions sans solution complète, on ne peut cependant nier son utilité, par suite d'un nouveau point de vue, pris par l'auteur, dans son essai de traiter cette théorie. Enfin l'exposition est, dans certains cas, très-brève et très-simplifiée. N. BOUGAÏEF.

RICCARDI (Prof. PIETRO). — CENNI SULLA STORIA DELLA GEODESIA IN ITALIA DALLE EPOCHE FIN OLTRE ALLA METÀ DEL SECOLO XIX. Parte prima. Bologna, Tipi Gamberini e Parmeggiani, 1879. In-4°, 100 pages, 1 planche ([2]).

L'auteur, bien connu par une longue série de monographies historiques, commence avec ce premier fascicule son histoire de la Géométrie pratique en Italie, entreprise qui sera d'autant plus importante et plus digne d'intérêt, qu'elle peut être regardée, à un certain point de vue, comme faisant suite à l'excellent Livre de

---

([1]) POISSON, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, p. 168.

([2]) Extrait des *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 3e série, t. X.

M. Cantor, dont il a été rendu compte dans ce *Bulletin* (¹). Au début, les deux auteurs traitent le même sujet; toutefois, M. Riccardi sait encore ici faire preuve d'une incontestable originalité. Nous allons esquisser à grands traits la marche du développement des idées de notre auteur.

L'Introduction examine les travaux des Grecs qui se rapportent à la Géodésie et à la Géographie mathématique; puis viennent les Étrusques, sur lesquels on n'a, il est vrai, que peu de renseignements positifs, et ensuite les Romains. Une explication très-intéressante, appuyée d'un dessin, nous fait connaître l'instrument d'arpentage de l'ancienne Italie, la *groma;* M. Riccardi établit (p. 24) que les auteurs récents qui se sont occupés de la disposition de cet instrument (²) ont le plus souvent laissé de côté les recherches importantes sur cette question de Cavedoni et de Promis. Le deuxième Chapitre, consacré au célèbre Ouvrage de Léonard de Pise, contient encore bien plus de faits nouveaux, du moins pour les étrangers à l'Italie. On doit savoir gré à l'auteur d'y avoir fait connaître les commencements du tracé scientifique des Cartes, et en particulier le fameux plan du monastère de Saint-Gall, de même que nous pensons qu'en présence des connaissances mathématiques dont la possession distinguait si avantageusement ce monastère des autres établissements on ne pouvait s'empêcher de porter sur ce sujet une attention spéciale. D'un certain Alberti, qui vivait vers le milieu du XVᵉ siècle, on peut citer, outre ses essais hydrométriques, un projet pour mesurer les profondeurs de la mer, qui fut repris, deux cents ans plus tard, par l'encyclopédique Hooke. Le premier Livre imprimé en Italie dans lequel il soit question de Géométrie pratique est le Traité de Valturio, *De re militari* (1472). Viennent ensuite les Ouvrages bien connus de Pacioli, le *Libro di Aritmetica e Geometria speculativa e praticale* (1526), dans lequel on revient à la méthode des coordonnées d'Héron, et la *Nova Scientia* de Tartaglia. Le grand peintre Raphaël nous est présenté ici sous

(¹) T. X, p. 161.

(²) Parmi ces auteurs, M. Riccardi cite Stoeber (*Die römischen Grundsteuervermessungen;* München, 1877), mais ne cite pas Hankel, dont l'Ouvrage (*Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, p. 298) aurait dû être mentionné au même titre.

un tout autre aspect que celui auquel nous sommes habitués : on nous le signale comme l'inventeur de la *bussola della calamita*. Nous trouvons une introduction systématique à la science de l'arpentage dans l'Ouvrage de Bartoli (1564), dans lequel, entre autres, il est fait mention d'une triangulation exécutée dans les alentours de Florence. A partir de là commence à s'accroître notablement le nombre des Ouvrages consacrés à la description des instruments géodésiques et des procédés de mesure nouvellement inventés ; il fallait toute l'immense érudition de l'auteur de la *Biblioteca matematica* pour mettre tous ces écrivains chacun à leur place. Une circonstance bien digne de remarque, c'est que des rangs des hommes de guerre et des jurisconsultes est sorti un nombre considérable de Traités de Géométrie : tel est, par exemple, le *Tyberias* de Bartolo, auquel toutefois Boteon [1] reproche de nombreuses erreurs. Le Livre le plus important de la seconde moitié du XVI[e] siècle est la *Geometria pratica* de Pomodoro, qui représente dans de belles planches gravées tout l'assortiment d'instruments dont faisaient usage les géodésistes de cette époque.

Après avoir, dans le Chapitre II, considéré plus particulièrement les doctrines qui font partie de la Géométrie pratique, dans le sens étroit du mot, l'auteur consacre spécialement le Chapitre III au développement de la Géodésie supérieure, c'est-à-dire de la science qui s'occupe de la mesure et de la représentation des parties de la surface terrestre dont la courbure ne saurait être négligée. L'auteur jette un coup d'œil sur les œuvres de traduction et nous dépeint ensuite l'état des connaissances en Géographie mathématique chez les encyclopédistes du XIII[e] et du XIV[e] siècle, chez Brunetto Latini, Ristoro d'Arezzo, Pietro d'Abano, Cecco d'Ascoli, et avant tout chez le grand poète et polygraphe Dante Alighieri. Il est aussi question de cette étrange hypothèse dont l'auteur de cet article a cherché à retracer l'histoire dans le troisième fascicule de ses *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie* [2], et suivant laquelle l'enveloppe fluide du globe terrestre devrait avoir un autre centre que le noyau solide proprement dit. Toscanelli sert de transition à la part considérable qui

---

(1) *Voir* KAESTNER, *Geschichte der Mathematik*, t. I, p. 474.

(2) Voir *Bulletin*, III_1, 84.

revient aux Italiens dans les grandes découvertes géographiques de la fin du moyen âge, ainsi que dans les progrès de la Cartographie. On doit aussi une mention spéciale aux travaux entrepris par les Italiens sur la Géographie de Ptolémée, considérée comme la principale source de la Science. Nous apprenons à connaître un grand nombre d'Ouvrages de Cosmographie et de Recueils de Cartes; parmi les premiers, on doit remarquer particulièrement ceux de Maurolycus et ceux de Barocius, bien connu d'ailleurs pour ses recherches sur les asymptotes. La fin de ce Chapitre, et jusqu'à présent de l'Ouvrage entier, contient une intéressante définition de ce que l'auteur entend par *Indagini geodetico-nautiche*. Relativement à ces dernières, nous renvoyons à l'interprétation que nous avons donnée, dans le sixième fascicule de nos *Studien* ([1]), de la *raxon del marteloio*, que M. Riccardi cite seulement en passant (p. 93); nous serions heureux de voir nos vues partagées par un juge aussi compétent que le savant auteur.

Nous avons l'espoir de pouvoir bientôt rendre compte dans ce Recueil de la suite de cet excellent Ouvrage. S. G.

SCHWERING (Dr K.). — Die Parallelcurve der Ellipse, als Curve vom Range Eins, unter Anwendung eines neuen Liniencoordinatensystems. Brilon, Westphalen, 1877.

L'auteur de cet intéressant programme scolaire, bien supérieur au niveau moyen des travaux de cette nature et digne à ce titre même d'être signalé aux lecteurs de l'étranger, a déjà plusieurs fois entrepris de mettre à la portée d'un public plus nombreux les recherches abstraites, bien connues, de Weierstrass sur les fonctions elliptiques, en appliquant ces nouvelles méthodes à des problèmes particuliers. Il a repris aujourd'hui la même voie, et à l'intérêt qu'offre déjà par elle-même la discussion, à l'aide des fonctions ϑ, d'une courbe remarquable, se joint encore une autre considération importante, l'auteur ayant fait usage dans cette recherche d'un système de coordonnées encore peu connu, mais qui évidemment doit offrir

([1]) Voir *Bulletin*, III_1, p. 330.

une grande utilité. Ce système a été décrit pour la première fois par M. Schwering dans le Tome XXI du *Zeitschrift* de Schlömilch; mais on n'en a bien apprécié l'importance spéciale que lorsque V. Schlegel eut démontré, dans le Tome XXIII du même journal, que le système de coordonnées de lignes en question se comportait complètement comme le réciproque du système usuel de coordonnées de points, et que, par suite, on pouvait être certain de voir ce système se développer, comme étant à la fois simple et facile à manier.

Le Mémoire actuel confirme pleinement cette attente. M. Schwering démontre qu'une courbe de rang 1, déjà traitée autrefois par Clebsch, est complétement identique avec la courbe que l'on obtient en portant des longueurs égales sur les normales d'une ellipse, prolongées à l'extérieur, et joignant leurs extrémités par un trait. On voit sans difficulté que l'étude de cette courbe, qui, dans le système de Schwering, aurait pour équation

$$uv - \frac{k}{2b}\sqrt{4b^2 + (u-v)^2}\,(u+v) + \frac{k^2}{4b^2}\left[4b^2 + (u-v)^2\right] = a^2,$$

exige impérieusement l'emploi d'un système de coordonnées de lignes. Mais l'extrême simplicité avec laquelle l'auteur parvient, à l'aide de ce système, à déduire toutes les singularités et les autres propriétés fondamentales ne peut être appréciée que par la lecture du travail original, que nous recommandons à tous les points de vue. S. G.

ЗОЛОТАРЕВЪ. — Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ съ приложеніемъ къ интегральному исчисленію. С. Петербургъ, 1874. — In-4°, 174 pages (1).

Gauss a introduit dans l'Analyse les nombres complexes de la forme $a + bi$ (2). Ces nombres jouent un rôle considérable dans la

(1) Zolotaref, *Théorie des nombres entiers complexes et son application au Calcul intégral*. Saint-Pétersbourg, 1874.

(2) Gauss *Werke*, 2. Bd., *Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda*.

théorie des résidus quadratiques et dans celle de la division du cercle et de la lemniscate. Dans ces recherches, l'algorithme de Gauss sert de point de départ; à l'aide de cet algorithme on trouve aussi le plus grand commun diviseur des nombres entiers.

Après la théorie des nombres complexes de la forme $a+bi$, on a commencé à s'occuper de l'étude des nombres complexes, dépendants des racines d'un degré quelconque de l'unité. A l'aide de ces nombres, les savants essayèrent, d'un côté, à démontrer le théorème de Fermat sur l'impossibilité de résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda,$$

où λ est un nombre entier plus grand que 2 ; d'un autre côté, l'étude de ces nombres était indispensable pour la démonstration de la loi de réciprocité des résidus des degrés supérieurs.

Lamé et Cauchy ([1]) ont fait les premiers essais dans cette direction ; mais ces essais n'ont pas entièrement réussi, parce que ces savants ont pris pour base de cette théorie l'algorithme pareil à celui qui sert à trouver le plus grand diviseur de deux nombres entiers ordinaires, et déduit de là les conséquences semblables à celles qu'a déduites Gauss des nombres de la forme $a+bi$. Les résultats ont démontré que cet algorithme n'est pas applicable en général.

Kummer donna le premier sa remarquable théorie des nombres complexes dépendants des racines d'un degré quelconque de l'unité. Kronecker indiqua l'application de cette théorie à l'Algèbre et démontra que toutes les équations abéliennes, dont les coefficients sont soit les nombres entiers ordinaires, soit les nombres de la forme $a+bi$, sont les équations de la division du cercle ou de la lemniscate.

Outre les nombres complexes dépendants directement des racines de l'unité, on a étudié aussi les autres nombres complexes, ayant une relation avec la théorie de la division du cercle. L'Ouvrage d'Eisenstein ([2]) se rapporte à ce genre de recherches.

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1847.

([2]) EISENSTEIN, *Ueber Formen 3-ten Grades mit 3 Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Entstehung verdanken* (*Journal de Crelle*, t. 28).

Le professeur Zolotaref expose la théorie des nombres complexes, dépendants des racines de l'équation indéterminée

$$F(x) = 0$$

d'un degré quelconque, à coefficients entiers, dont ceux des puissances les plus élevées de x sont égaux à l'unité. Cette théorie est fondée sur les propriétés des congruences fonctionnelles.

Les propriétés principales des congruences rationnelles, c'est-à-dire les propriétés des polynômes à coefficients entiers, par rapport à un certain module simple, étaient déjà connues de Gauss en 1797 et 1798; l'exposition de ces propriétés forme le huitième Chapitre de ses *Disquisitiones arithmeticæ*. M. Serret trouva ensuite ces propriétés, les développa dans son *Cours d'Algèbre supérieure* et les appliqua à la théorie des équations. Du reste, dans son Mémoire présenté en 1865 à l'Académie des Sciences de Paris, M. Serret remarque que les premières recherches sur ce sujet, quoique à un autre point de vue, se trouvent déjà dans les travaux de Galois.

L'ouvrage de Zolotaref se compose de quatre Chapitres.

Pour établir une liaison entre la théorie des nombres complexes et celle des congruences fonctionnelles, l'auteur consacre le premier Chapitre à l'exposition des propriétés de ces dernières. Ce Chapitre forme la base de la théorie des nombres idéaux.

Le second Chapitre est consacré à la théorie des unités complexes. L'auteur y expose les résultats des recherches de Dirichlet, Kummer, Kronecker. Ses démonstrations sont appuyées sur la proposition de M. Hermite, relative à la limite du minimum des formes quadratiques.

Dans le Chapitre III, l'auteur généralise la théorie de Kummer de nombres complexes dépendants des racines de l'unité; il examine l'équation irréductible

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers.

Tous les nombres complexes dépendants de la racine x_0 de cette équation se présentent sous la forme

$$\zeta_0 + \zeta_1 x_0 + \zeta_2 x_0^2 + \ldots + \zeta_{n-1} x_0^{n-1},$$

où $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ sont des nombres entiers ordinaires.

Le contenu des Chapitres III et IV est l'œuvre propre de l'auteur.

Il est à remarquer qu'un essai de généralisation des nombres idéaux de Kummer fut fait par Selling (¹); mais cet essai n'a aucune relation avec l'Ouvrage de l'auteur. Il en est de même du remarquable ouvrage de Dedekind, où celui-ci s'occupe des multiplicateurs idéaux, mais à un autre point de vue.

Le Chapitre IV est consacré à l'application des nombres complexes à un problème du Calcul intégral. On découvre, dans cette application, un nouveau lien entre la théorie des nombres et ce calcul. Ce problème est :

Étant donnée la différentielle

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta}},$$

où γ, δ, ε, ζ *sont des coefficients réels,* A *le paramètre, reconnaître si l'on peut, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, déterminer* A *de manière que l'intégrale de cette différentielle soit exprimée en logarithmes.*

Abel a démontré encore que, si l'intégrale

$$\int \frac{\rho\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

est exprimée en logarithmes, sous la forme

$$A \log \frac{p + q\sqrt{R(x)}}{p - q\sqrt{R(x)}},$$

où p et q sont des fonctions de x, $\sqrt{R(x)}$ est développable en fraction continue périodique, et réciproquement.

Il a démontré aussi que, si l'intégrale

$$\int \frac{\rho\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

(¹) SCHLÖMILCH's *Zeitschrift für Math. und Phys.*, 1865.

s'exprime en logarithmes, elle prendra la forme

$$C \log\left[P + Q\sqrt{R(x)}\right],$$

où C est une constante et P et Q des fonctions entières de x, satisfaisant à l'équation

$$P^2 - Q^2 R(x) = \text{const.}$$

Les recherches d'Abel ne conduisent pas directement au critérium désiré; car, si grand que soit le nombre de réduites de la fraction continue, résultant de la décomposition de $\sqrt{R(x)}$, qu'on puisse calculer, on ne saurait encore conclure que la périodicité ne se présente pas plus loin. Jusqu'à ce moment le critérium qui permettrait d'affirmer, après un nombre fini d'opérations, que la différentielle générale $\sqrt{R(x)}$ peut ou non être intégrée en logarithmes, n'existe pas.

Pour le cas particulier où $R(x)$ est un polynôme du quatrième degré à coefficients rationnels, l'académicien Tchebychef a donné un critérium de ce genre, très-remarquable.

Tchebychef [1] a exposé la méthode d'intégration de la différentielle

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta}}, \tag{1}$$

où γ, δ, ε, ζ sont des nombres rationnels.

D'après cette méthode, l'expression (1) s'intègre par logarithmes, chaque fois que cela est possible.

Le professeur Zolotaref a démontré cette méthode dans son Mémoire intitulé: *Sur la méthode d'intégration de M. Tchebychef.*

Les conditions d'intégration en logarithmes de la différentielle (1) employées par l'auteur sont différentes de celles qu'avait données Abel. Ces conditions démontrent clairement la liaison du problème de l'intégration de cette différentielle en logarithmes avec le problème de la division des fonctions elliptiques. Ces conditions ont été établies par Weierstrass [2] pour le cas général où l'on considère

---

[1] TCHEBYCHEF, *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. III, 1860.

[2] *Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1857.

les intégrales d'une fonction rationnelle de x et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré.

Les conditions de Weierstrass font dépendre la solution du problème de la possibilité d'exprimer la constante donnée à l'aide de valeurs K et K_1 sous la forme

$$\frac{\nu K + \nu' K_1 \sqrt{-1}}{\lambda},$$

où ν, ν' et λ sont des nombres entiers.

La méthode de Tchebychef s'appliquait au cas où λ, δ, ε, ζ sont des nombres rationnels.

A l'aide de sa théorie des nombres complexes, le professeur Zolotaref a réussi à résoudre le problème de l'intégration de cette différentielle en logarithmes, dans les cas où γ, δ, ε, ζ sont des nombres réels quelconques. Ces recherches ne doivent pas être confondues avec les recherches relatives au même problème, mais d'un autre genre, faites par Weierstrass, Clebsch [1] et autres.

Pour résoudre son problème, Zolotaref transforme l'intégrale

$$(2) \qquad \int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta}}$$

en une intégrale de la forme

$$(3) \qquad \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}},$$

où α et β sont les valeurs réelles satisfaisant à l'inégalité $\beta > \alpha > 1$. Il transforme ensuite l'intégrale (3) en une autre de la forme

$$(4) \qquad \frac{(z + B)\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_1)(z-\beta_1)}},$$

ou

$$\alpha_1 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \beta - \alpha}\right)^2, \quad \beta_1 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \alpha - \beta}\right)^2.$$

En continuant à répéter plusieurs fois de pareilles transformations, l'auteur démontre que, si l'intégrale (2) peut être exprimée

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 64.

en logarithmes, les paramètres suivants

$$\alpha_1 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \beta - \alpha}\right)^2, \qquad \beta_1 = \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{1 + \alpha - \beta}\right)^2,$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 - 1}{1 + \beta_1 - \alpha}\right)^2, \qquad \beta_2 = \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 - 1}{1 + \alpha_1 - \beta_1}\right)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

doivent former une série périodique, c'est-à-dire que, dans ce cas, ont lieu les égalités $\alpha_\mu = \alpha_m$, $\beta_\mu = \beta_m$, ..., où $\mu > m$. Le théorème réciproque est vrai.

En partageant les valeurs de paramètres α et β en trois classes, l'auteur résout, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, le problème : si l'intégrale (2) peut être exprimée en logarithmes, ou non. L'auteur appuie sa solution sur la théorie des grandeurs complexes, qu'il a établie.

Le professeur Zolotaref est mort, dans le plein développement de son remarquable talent pour les Mathématiques; cette mort est une perte cruelle pour la Science russe. N. Bougaief.

HOCHHEIM (Professor Dr Adolf). — Al Kafî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî nach der auf der herzoglich-gothaischen Schlossbibliothek befindlichen Handschrift. Verlag von Louis Nebert. Halle, 1879, 29 pages.

Nous avons déjà rendu compte dans le *Bulletin* (1) de la première Partie de cet intéressant écrit. Alkarkhî traite d'abord le problème de simplifier les expressions numériques compliquées, chose indispensable pour l'auteur arabe, par suite du manque d'une notation générale pour représenter les fractions, et les « mettre en rapport » avec les autres nombres. Ce problème n'est posé que pour les nombres commensurables; deux nombres n'ayant pas de diviseur commun ne peuvent être « mis en rapport ». Pour des raisons faciles à comprendre, l'un des termes des rapports à former est générale-

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 236.

ment le nombre 60. Dans le vingt et unième Chapitre, l'auteur traite en détail la multiplication de deux séries de fractions irréductibles, et cela d'une manière qui, d'après l'opinion de l'éditeur, ne se trouve chez aucun autre auteur arabe. La multiplication et la division des parties du cercle est naturellement l'objet d'une attention particulière. En abordant la théorie de l'extraction de la racine carrée, Alkarkhî, se conformant rigoureusement au langage des géomètres grecs, indique la différence entre les racines rationnelles et irrationnelles en les nommant « racines exprimables et inexprimables » (ῥητὰ καὶ ἄλογα). Sa méthode est au fond la méthode, bien connue, de Théon; cependant on trouve chez lui l'expression approximative $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a+1}$. La théorie des proportions se rattache au modèle classique donné par Euclide; mais elle fait entrer en considération les besoins de la vie pratique d'une tout autre manière que les Grecs. Avec le quarante-quatrième Chapitre commence la partie géométrique. Parmi les définitions, celles des cercles et des « lignes non circulaires » tiennent une place tout à fait à part, autant du moins que, pour la seconde de ces définitions, on peut considérer comme exacte la correction, d'ailleurs très-plausible, que M. Hochheim a faite au texte. Le calcul des aires des figures planes se rapporte, à l'exemple des géomètres de l'Inde, à des figures dont les dimensions sont exprimables en nombres entiers; ainsi, l'exemple choisi pour le trapèze a pour les quatre côtés 20, 15, 34, 13, et pour la hauteur 12. Le calcul des segments de cercle est aussi très-intéressant. Le mérite d'avoir exactement déterminé la surface convexe d'un cône tronqué appartient bien à Alkarkhî; du moins la vraie formule ne se rencontre pas chez son collègue Beha-Eddin. Les essais de cubature contiennent également beaucoup de résultats originaux et nous font attendre avec impatience le contenu de la troisième Partie de la publication de M. Hochheim. Le fascicule actuel se termine par ces paroles, remplies de promesses, du géomètre arabe : « Après avoir maintenant traité en problèmes les remarquables particularités de l'Arithmétique, je vais donner dans la suite les problèmes les plus remarquables de la Géométrie. » S. G.

MÉLANGES.

NOTE SUR LA FORMULE QUI SERT DE FONDEMENT A UNE THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

(Extrait d'une Lettre écrite à M. Darboux),

Par M. OSSIAN BONNET.

Il y a longtemps que je possède une solution entièrement satisfaisante de la question assez délicate que M. du Bois-Reymond vient de traiter dans votre dernier *Bulletin*. J'ai fait allusion à cette solution dans mon Mémoire sur les séries couronné par l'Académie de Bruxelles (note au bas de la page 11), et, il y a deux ou trois ans, je l'ai communiquée à M. Hermite, qui était alors préoccupé de l'insuffisance des raisonnements de Poisson et de Cauchy.

Peut-être penserez-vous qu'en raison de leur extrême simplicité les considérations dont je fais usage pourront encore aujourd'hui intéresser vos lecteurs.

a et $b > a$ étant deux nombres finis quelconques, positifs ou négatifs, et comprenant un nombre quelconque de multiples pairs de π parmi lesquels nous comptons zéro, il s'agit de trouver la limite vers laquelle tend

$$(1) \qquad \int_a^b \frac{(1-\alpha^2)f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}$$

lorsque α tend vers 1 en lui restant constamment inférieure.

Nous supposerons que l'intervalle de a à b ne renferme comme multiple pair de π que zéro, de sorte que a sera négatif et supérieur à -2π, et b positif et inférieur à 2π. On sait du reste que le cas général se ramène à celui-là en décomposant l'intégrale proposée en plusieurs intégrales partielles et en faisant pour chacune de celles-ci un facile changement de variable. Soit ε un nombre positif que nous n'assujettirons pour le moment qu'aux conditions d'être inférieur à b, à $2\pi - b$ et aux valeurs absolues de a et de $2\pi - a$. Décomposons l'intégrale (1) en quatre de la manière

suivante :

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{-\varepsilon} \frac{(1-\alpha^2)f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} + \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{(1-\alpha^2)f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} \\ &\quad + \int_0^{\varepsilon} \frac{(1-\alpha^2)f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} + \int_{\varepsilon}^{b} \frac{(1-\alpha^2)f(x)\,dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}. \end{aligned} \right.$$

D'après les hypothèses faites sur ε, on a, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites de la première et de la quatrième intégrale,

$$\cos x < \cos\varepsilon,$$

par suite

$$1+\alpha^2-2\alpha\cos x > 1+\alpha^2-2\alpha\cos\varepsilon,$$

par suite

$$1+\alpha^2-2\alpha\cos x > \sin^2\frac{\varepsilon}{2};$$

car

$$1+\alpha^2-2\alpha\cos\varepsilon = (1-\alpha)^2\cos^2\frac{\varepsilon}{2} + (1+\alpha)^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$

est évidemment

$$> \sin^2\frac{\varepsilon}{2};$$

et enfin

$$\frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} < \frac{1}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Donc, si l'on appelle M un nombre positif égal ou supérieur à la plus grande valeur absolue que prend $f(x)$ quand x varie de a à b, le premier et le quatrième terme de la somme (2) seront, en valeur absolue, respectivement moindres que

$$\frac{(1-\alpha^2)\mathrm{M}(-a)}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \frac{(1-\alpha^2)\mathrm{M}b}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

On en déduit que ces deux termes tendent vers zéro lorsque α tend vers 1, et cela quelle que soit la valeur attribuée à ε, pourvu que cette valeur reste invariable.

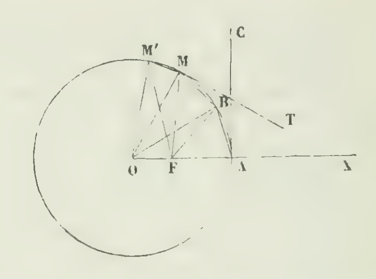
Reste à trouver les limites du deuxième et du troisième terme

de la somme (2), ou simplement de l'intégrale

$$\int_0^\varepsilon \frac{(1-\alpha^2) f(x)\, dx}{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos x},$$

car l'autre intégrale se déduit de celle-ci en changeant $f(x)$ en $f(-x)$.

Décrivons une circonférence de rayon 1, et sur le rayon OA prenons une longueur $\mathrm{OF} = \alpha < 1$; regardons x comme l'angle formé



par le rayon variable OM avec le rayon fixe OA, et soit BOA la valeur particulière de x désignée plus haut par ε. Tirons FM : nous formerons un second angle MFA, fonction de x, et que nous désignerons par y. Nous allons d'abord évaluer la dérivée $\frac{dy}{dx}$. Pour cela donnons à x un accroissement infiniment petit Δx, ce qui amènera OM en OM'; l'accroissement infiniment petit correspondant Δy de y sera M'FM, et nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\mathrm{M'FM}}{\mathrm{M'OM}} = \lim \frac{\sin \mathrm{M'FM}}{\text{corde}\, \mathrm{M'M}} = \lim \frac{\sin \mathrm{FM'M}}{\mathrm{FM}} = \frac{\sin \mathrm{FMT}}{\mathrm{FM}},$$

MT étant la tangente à la circonférence de rayon 1 au point M; on peut encore écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \mathrm{FMO}}{\mathrm{FM}}.$$

Mais le triangle OMF donne

$$\overline{\mathrm{FM}}^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x, \qquad \alpha^2 = 1 + \overline{\mathrm{FM}}^2 - 2\,\mathrm{FM}\cos \mathrm{FMO};$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \overline{\mathrm{FM}}^2 - \alpha^2}{2\,\overline{\mathrm{FM}}^2} = \frac{1}{2} + \frac{1 - \alpha^2}{2(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x)},$$

d'où

$$\frac{(1 - \alpha^2)\,dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x} = 2\,dy - dx,$$

et par suite

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{(1 - \alpha^2) f(x)\,dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x} = \int_0^{\varepsilon} f(x)(2\,dy - dx)$$

$$= k\int_0^{\varepsilon} (2\,dy - dx) = k(2\,\mathrm{BFA} - \mathrm{BOA}),$$

en appelant k une quantité convenable comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs que reçoit $f(x)$ lorsque x varie de 0 à ε. Faisant maintenant tendre α vers 1 ou le point F vers le point A, en laissant ε constant, c'est-à-dire en laissant le point B fixe, BFA tendra vers $\mathrm{BAX} = \frac{\pi}{2} + \mathrm{BAC} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{BOA}$; donc la limite de l'intégrale sera πk.

k représente, avons-nous dit, une certaine quantité comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs que reçoit $f(x)$ lorsque x varie de 0 à ε; mais, comme ε peut être pris aussi petit que l'on veut, on voit que k ne peut être que $f(0)$ ou plutôt que $f(+0)$, en représentant ainsi la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers zéro en restant positif; ainsi

$$\lim \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x)(1 - \alpha^2)\,dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x} = \pi f(+0).$$

On trouverait de même

$$\lim \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{f(x)(1 - \alpha^2)\,dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x} = \pi f(-0),$$

$(f-0)$ étant la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers zéro en restant négatif; par conséquent,

$$\lim \int_a^b \frac{f(x)(1 - \alpha^2)\,dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x} = \pi[f(+0) + f(-0)].$$

Si le seul multiple pair de π compris entre a et b, au lieu d'être zéro, était $2n\pi$, on aurait

$$\lim \int_a^b \frac{(1-\alpha^2) f(x)\, dx}{1+\alpha^2 - 2\alpha \cos x} = \pi[f(2n\pi + 0) + f(2n\pi - 0)],$$

et, si a et b comprenaient un nombre fini quelconque de multiples pairs de π, $2n\pi$, $2(n+1)\pi$, $2(n+2)\pi$, ..., $2(n+p)\pi$, on aurait

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lim \int_a^b \frac{(1-\alpha^2) f(x)\, dx}{1+\alpha^2 - 2\alpha \cos x} \\ &= \pi \left\{ \begin{aligned} &f(2n\pi+0) + f[2(n+1)\pi+0] + f[2(n+2)\pi+0] + \ldots + f[2(n+p)\pi+0] \\ &+ f(2n\pi-0) + f[2(n+1)\pi-0] + f[2(n+2)\pi-0] + \ldots + f[2(n+p)\pi-0] \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons encore que, lorsque la limite supérieure b de l'intégrale est un multiple pair de π, on doit introduire dans le second membre de l'équation (3) un nouveau terme égal à $\pi f(b-0)$, et que, lorsque la limite inférieure a est un multiple pair de π, on doit encore tenir compte de $\pi f(a+0)$.

SUR LE TAUTOCHRONISME QUAND ON A ÉGARD AU FROTTEMENT;

Par M. G. DARBOUX.

Nous supposerons dans cet article qu'un point matériel soumis à l'action de forces dépendant uniquement de la position de ce point soit assujetti à se mouvoir sur une courbe, et nous nous proposons de former l'équation différentielle des courbes pour lesquelles le mouvement de ce point jouit de la propriété du tautochronisme quand on a égard au frottement. Nous suivrons, dans ce but, la belle méthode donnée par M. Puiseux (*Journal de Liouville*, t. XIX, 1[re] série, p. 418).

Soient T et N les composantes tangentielle et normale de la force qui agit sur le mobile. Désignons par v sa vitesse et par s l'arc parcouru, compté à partir d'un point fixe de la courbe. L'équation

différentielle du mouvement sera, comme on sait,

(1) $$\frac{d}{ds}\frac{v^2}{2} = \mathrm{T} - f\mathrm{N} - f\frac{v^2}{\rho},$$

f désignant le coefficient de frottement et ρ le rayon de courbure de la courbe au point considéré.

Cette équation, étant linéaire, aura une intégrale de la forme

$$\frac{v^2}{2} = \mathrm{C}\varphi(s) + \psi(s),$$

φ et ψ étant deux fonctions de s à déterminer, et l'expression du temps sera

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{C}\varphi(s) + \psi(s)}}.$$

Pour que le mouvement jouisse de la propriété du tautochronisme, il faut que cette intégrale puisse se mettre sous la forme

$$t = a\int \frac{\mathrm{P}'\,ds}{\sqrt{\mathrm{A} - \mathrm{P}^2}},$$

P étant une certaine fonction de s, P′ sa dérivée et A la constante arbitraire; on aura alors

$$\mathrm{T} = a\int_0^{\sqrt{\mathrm{A}}} \frac{d\mathrm{P}}{\sqrt{\mathrm{A} - \mathrm{P}^2}} = \frac{\pi a}{2}$$

et

(2) $$a^2 v^2 = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{P}^2}{\mathrm{P}'^2}.$$

On voit d'ailleurs, ce qui était évident *a priori*, que les deux limites entre lesquelles on intègre se rapportent au point $\mathrm{P} = \sqrt{\mathrm{A}}$ pour lequel la vitesse devient nulle, et au point $\mathrm{P} = 0$, pour lequel il y aurait équilibre si le mobile y était placé sans vitesse initiale.

Exprimons que la valeur (2) de v satisfait, quelle que soit la constante A, à l'équation différentielle (1); nous aurons les deux équations

(3) $$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{\mathrm{P}'^2}\right) = -\dfrac{2f}{\rho\,\mathrm{P}'^2}, \\ -\dfrac{\mathrm{P}}{a^2\mathrm{P}'} = \mathrm{T} - f\mathrm{N}. \end{cases}$$

Pour intégrer la première, introduisons comme nouvelle variable l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x. En le désignant par ω, on aura

$$\frac{ds}{\rho} = d\omega,$$

et la première des équations (3) nous donnera

$$P' = e^{f\omega}.$$

On reconnaîtra aisément qu'il est inutile d'introduire une constante arbitraire.

Portons cette valeur de P' dans la seconde équation (3); nous aurons

$$\frac{P}{a^2} = e^{f\omega}(fN - T)$$

et, en différentiant les deux membres,

$$(4) \qquad \frac{\rho}{a^2} = f(fN - T) + \frac{d}{d\omega}(fN - T);$$

c'est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Nous allons faire deux applications. Supposons d'abord que la force qui agit sur le mobile soit la pesanteur et que l'axe des y ait été pris vertical, on aura

$$T = -g\frac{dy}{ds} = -g\sin\omega,$$

$$N = g\frac{dx}{ds} = g\cos\omega,$$

et l'équation (4) deviendra

$$\frac{\rho}{a^2} = g(f^2 + 1)\cos\omega.$$

Cette équation est de même forme que dans le cas où il n'y a pas frottement. Donc :

La cycloïde est la seule courbe plane qui jouisse de la propriété du tautochronisme par rapport au mouvement d'un point pesant, quand on tient compte du frottement.

En second lieu, traitons le cas où la force est centrale. Si l'on considère la courbe sur laquelle le mobile est assujetti à se mouvoir comme l'enveloppe de la droite

$$x\sin\omega - y\cos\omega = \psi(\omega),$$

on trouvera aisément qu'en appelant r la distance à l'origine et en désignant par $r\varphi(r)$ la loi de la force émanant de ce point, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \varphi(r)\psi'(\omega), & r &= \sqrt{\psi^2+\psi'^2},\\ \mathrm{N} &= \varphi(r)\psi(\omega), & \rho &= \psi(\omega)+\psi''(\omega). \end{aligned}$$

L'équation (4) deviendra

$$\left[\frac{1}{a^2}+\varphi(r)-\frac{\varphi'\psi'}{r}(f\psi-\psi')\right](\psi+\psi'')=\psi(f^2+1)\varphi(r).$$

C'est une équation du second ordre en ψ qui paraît d'une intégration difficile.

Mais, si l'attraction est proportionnelle à la distance, $\varphi(r)$ sera une constante b, et l'équation deviendra

$$\left(\frac{1}{a^2}+b\right)(\psi+\psi'')=(f^2+1)b\psi$$

ou

$$\psi\left(\frac{1}{a^2}-bf^2\right)+\psi''\left(\frac{1}{a^2}+b\right)=0.$$

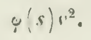
Cette équation est encore de même forme que dans le cas où il n'y a pas de frottement. Donc :

L'épicycloïde est la seule courbe plane tautochrone pour des forces centrales proportionnelles à la distance, lorsqu'on tient compte du frottement.

En terminant, nous signalerons un élégant article de M. Haton de la Goupillière (*Journal de Liouville*, t. XIII, 2e série, p. 204), dans lequel il est démontré que l'épicycloïde est la courbe la plus générale pour laquelle la loi de la force soit comprise dans la formule générale de Lagrange relative au tautochronisme. Mais, comme le fait bien justement remarquer M. Haton de la Goupillière,

la formule de Lagrange, qui contient des fonctions arbitraires d'une seule variable, est très-loin de donner la solution générale du problème du tautochronisme, et il résulte des remarques de M. Bertrand que la formule qui doit remplacer celle de Lagrange doit contenir dans son expression une fonction arbitraire de *deux* variables. La recherche que nous avons entreprise dans cet article n'était donc pas inutile.

Nous ferons d'ailleurs remarquer, en terminant, que la méthode suivie pourrait encore s'appliquer sans modification si l'on introduisait une résistance proportionnelle au carré de la vitesse et même de la forme



$$\varphi(s)v^2.$$

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KOENIGSBERGER (L.). — ZUR GESCHICHTE DER THEORIE DER ELLIPTISCHEN TRANSCENDENTEN IN DEN JAHREN 1826-29. Leipzig, 1879. — 1 vol. in-8°, 104 pages.

Voici un demi-siècle que Jacobi a fait paraître les *Fundamenta nova* et qu'Abel est mort; M. Koenigsberger, à l'occasion de cet anniversaire, a publié une intéressante étude historique sur cette période de trois années, si riche en découvertes de premier ordre, où Abel et Jacobi employèrent à l'envi les ressources de leurs rares génies à la fondation de la théorie des fonctions elliptiques. Le Volume de M. Koenigsberger se termine par une analyse de ceux des papiers posthumes de Gauss qui se rapportent à cette théorie; on en trouvera plus loin la traduction à peu près complète. Le sujet offre en lui-même un vif intérêt, et celui qui l'a traité est aussi compétent qu'il est possible. Nous résumons d'abord rapidement la partie historique de son Livre.

C'est à la découverte d'Euler qu'on peut faire commencer l'histoire de la théorie des transcendantes elliptiques. En 1786 Legendre publia le *Mémoire sur les intégrations par des arcs d'ellipse*, en 1793 le *Mémoire sur les transcendantes elliptiques;* il réunit ses recherches dans les *Exercices de Calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures* (1811-1819), et plus tard dans le *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes* (1825-1826). Abel et Jacobi, au moment de la publication de leurs premiers travaux, ne connaissaient que les *Exercices*.

Le *Traité* contient la réduction des intégrales de la forme

$$\int \frac{P\,dx}{R},$$

où P est une fonction rationnelle et R la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré, aux trois types fondamentaux, la réduction à la forme normale au moyen d'une transformation linéaire, le théorème de l'addition pour les intégrales de première espèce, l'application de ce théorème à la multiplication et à la division.

Le théorème de l'addition des intégrales elliptiques de seconde espèce donne à l'auteur l'occasion de réunir les divers théorèmes connus depuis longtemps sur les arcs d'ellipse et d'hyperbole. L'étude de l'intégrale complète le conduit à la relation célèbre

$$\mathrm{FE}' - \mathrm{F}'\mathrm{E} - \mathrm{FF}' = \frac{\pi}{2},$$

généralisée par Weierstrass et Riemann.

Les recherches relatives aux intégrales de troisième espèce, que le *paramètre* vient compliquer, présentaient de grandes difficultés. Legendre donne plusieurs résultats importants, notamment les théorèmes sur l'addition.

Il fait de la transformation de Landen une application singulièrement heureuse et féconde. En répétant cette transformation, il parvient à former une chaine indéfinie de modules, qui fournit une méthode simple pour le calcul approché des intégrales de première et de seconde espèce.

Ce point appartient à la théorie de la transformation, que Legendre touche d'ailleurs dans un Chapitre de son Traité où il donne en particulier la transformation du troisième ordre, en restant toutefois principalement préoccupé de l'intérêt que ce genre de recherches présente relativement au calcul numérique des intégrales elliptiques.

La publication du Livre de Legendre précède à peine celle des premiers travaux d'Abel et de Jacobi, travaux qui, ainsi qu'il a été dit, furent entrepris avant que leurs auteurs eussent connaissance de ce Traité.

Le premier travail d'Abel (publié dans ses papiers posthumes) est intitulé : *Propriétés remarquables de la fonction* $y = \varphi(x)$ *déterminée par l'équation*

$$f(y)\,dy - dx\sqrt{(a-y)(a_1-y)\ldots(a_m-y)} = 0,$$

$f(y)$ *étant une fonction quelconque de* y, *qui ne devient pas zéro ou infinie lorsque* $y = a, a_1, \ldots, a_m$.

Il établit la périodicité et détermine les zéros et les infinis. Ainsi Abel, dès l'été de 1825, s'était déjà occupé du problème de l'inversion des fonctions hyperelliptiques et était parvenu à la notion de la

double périodicité des fonctions elliptiques; il ne paraît pas, d'ailleurs, avoir connu le résultat démontré plus tard par Jacobi, à savoir qu'il ne peut exister de fonction uniforme d'une seule variable ayant plus de deux périodes.

Dans le Mémoire *Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes,* il parvient au théorème sur l'interversion de l'argument et du paramètre pour les intégrales hyperelliptiques, et, dans son *Extension de la théorie précédente,* il établit une propriété analogue pour les intégrales d'une équation différentielle linéaire. Sans aucun doute, dès l'année 1825, non-seulement Abel était en possession des fondements d'une théorie étendue des fonctions elliptiques, mais encore il s'efforçait de fonder une théorie des intégrales à différentielle algébrique. On trouve dans ses papiers posthumes pour cette année un travail *Sur la comparaison des fonctions transcendantes* qui contient la généralisation célèbre du théorème d'Euler pour l'addition des intégrales elliptiques, généralisation qui est regardée à bon droit comme le théorème fondamental de la nouvelle Analyse.

Enfin il y a encore, pour cette même année 1825, dans les papiers d'Abel, un travail qui contient en germe les recherches publiées quelques années après dans le *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.* On y trouve la réduction aux types fondamentaux de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$$

et la relation la plus générale entre des intégrales elliptiques, sous la forme

$$\begin{aligned} K\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + K'\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \ldots + L^{(n)}\int\frac{dx}{(x-a_n)\sqrt{R}} \\ = A\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} + A'\log\frac{P'+Q'\sqrt{R}}{P'-Q'\sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Le premier Volume du *Journal de Crelle* (1826) contient le Mémoire d'Abel (primitivement rédigé en français) intitulé *Ueber die Integration der Differentialformel* $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$, *wenn* R *und* ρ *ganze Functionen sind.* Abel y cherche toutes les différentielles de cette

forme dont l'intégrale peut s'exprimer par une fonction de la forme $\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$, et montre que ce problème est le plus général qu'on puisse se poser relativement à la réduction des intégrales de la forme $\int\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$ à des fonctions logarithmiques. Ce travail fut vraisemblablement remis personnellement à Crelle par Abel, lorsqu'il passa à Berlin pour se rendre à Paris. Holmboe, l'éditeur de ses Œuvres complètes, rapporte qu'Abel lui avait dit que, « lors de son séjour à Paris, en 1826, il avait déjà achevé la partie essentielle des principes qu'il avançait dans la suite sur ces fonctions, et qu'il aurait bien voulu remettre la publication de ses découvertes jusqu'à ce qu'il en eût pu composer une théorie complète, si, en attendant, M. Jacobi ne s'était mis sur les rangs ».

Dans cette même année, Abel communiqua à l'Académie des Sciences de Paris un important Mémoire sur les intégrales à différentielles algébriques. Ce Mémoire, écrit, paraît-il, d'une façon peu lisible, ne fut l'objet d'aucun rapport. On en demanda copie à l'auteur : il n'en remit point et le laissa là. Il ne fut publié qu'en 1841 par les soins de Libri. Il contient le théorème sur l'existence de l'équation

$$\int f(x_1, y_1)\,dx_1 + \int f(x_2, y_2)\,dx_2 + \ldots + \int f(x_n, y_n) = v,$$

une double méthode pour la détermination de la fonction algébrico-logarithmique v, et la réduction à un nombre déterminé des intégrales à différentielle algébrique. Enfin l'auteur particularise son théorème pour le cas où l'irrationnelle engagée sous le signe $\int$ est racine d'une équation binôme, et donne, sous une forme explicite, le théorème sur l'addition des intégrales elliptiques et hyperelliptiques.

Non-seulement Abel laissa, sans s'en occuper, son Mémoire à l'Académie des Sciences, mais il attendit trois années pour envoyer à Crelle (6 janvier 1829) un travail sur le même sujet, intitulé *Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes*. C'est une exposition rapide, pareille à celle qui a été trouvée dans les papiers posthumes et dont il a été déjà parlé.

En décembre 1826, il dit dans une Lettre à Holmboe : « J'ai écrit un grand Mémoire sur les fonctions elliptiques, qui renferme des choses assez curieuses et qui ne manquera pas, je m'en flatte, de fixer l'attention du monde littéraire. Entre autres choses, il traite de la division de l'arc de la lemniscate. Ah! qu'il est magnifique! Tu verras. J'ai trouvé qu'avec le compas et la règle on peut diviser la lemniscate en 2^n+1 parties égales, lorsque le nombre 2^n+1 est premier. La division dépend d'une équation du degré

$$(2^n+1)^2-1;$$

mais j'en ai trouvé la solution complète à l'aide des racines carrées. Cela m'a fait pénétrer en même temps le mystère qui a enveloppé la théorie de M. Gauss sur la division de la circonférence du cercle. Je vois, clair comme le jour, comment il y est arrivé. »

Dans une Lettre à Crelle, du même mois, il revient sur la même pensée.

Enfin, le 4 mars 1827, il écrit de Berlin à Holmboe :

« Mais voici le Mémoire qui l'emporte sur tous les autres : *Théorie des fonctions transcendantes en général et celle des fonctions elliptiques en particulier*. Mais différons de t'en faire part jusqu'à mon retour. »

C'est à partir de ce retour en Norvége que commence, à proprement parler, cette lutte glorieuse avec Jacobi, dont le résultat fut la création de la nouvelle théorie.

Ce dernier, dans deux Lettres à Schumacher (13 juin et 2 août 1827), imprimées en septembre 1827 dans le n° 123 des *Astronomische Nachrichten*, publia ses premières découvertes sur la transformation des intégrales elliptiques. La transformation générale de l'intégrale de première espèce y est donnée sans démonstration; les transformations du troisième et du cinquième degré y sont traitées explicitement, dans leur relation avec la multiplication et la division par 3 et par 5.

Legendre, comme il a été dit plus haut, avait parlé de la transformation du troisième degré dans son Traité, publié en janvier 1827, et que Jacobi ne connaissait pas encore; dès qu'il eut connaissance des Lettres à Schumacher, il entama avec Jacobi une importante correspondance, que le *Bulletin* a publiée, et dont M. Koenigsberger donne de nombreux extraits. Le géomètre allemand, avec

une franchise qui est digne de son génie, y reconnait qu'il était parvenu par induction au théorème général sur la transformation et qu'il l'a publié avant d'en avoir une preuve rigoureuse.

C'est aussi en septembre 1827 que parut dans le deuxième cahier du second Volume du *Journal de Crelle* la première Partie des *Recherches sur les fonctions elliptiques* d'Abel. L'auteur ne connaissait certainement pas la Communication de Jacobi lorsqu'il avait rédigé les deux Parties de ce Mémoire, comme il le dit lui-même dans une addition à la seconde Partie, où il parle de la Note de Jacobi insérée dans les *Astronomische Nachrichten* et où il montre que le théorème donné par celui-ci sans démonstration est contenu comme cas particulier dans une formule de son Mémoire. Au surplus, il est bien certain qu'Abel, en possession depuis deux ans d'une théorie générale dont celle des transcendantes elliptiques n'était qu'un cas particulier, était sur beaucoup de points en avance sur Jacobi, et celui-ci l'a reconnu lui-même; il est sûr aussi que c'est à ce dernier qu'on doit d'avoir donné de cette théorie une construction bien ordonnée, dont les diverses parties se relient et se tiennent mutuellement.

Dans ses *Recherches*, Abel définit la fonction inverse $x = \varphi(\alpha)$ de l'intégrale

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)}},$$

établit le théorème de l'addition pour cette fonction et les fonctions correspondantes

$$f(\alpha) = \sqrt{1 - c^2 \varphi^2(\alpha)}, \quad F(\alpha) = \sqrt{1 + e^2 \varphi^2(\alpha)},$$

montre la double périodicité, détermine les zéros et les infinis de ces fonctions, développe les formules de la multiplication pour $\varphi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$, $F(n\alpha)$, qu'il exprime rationnellement en $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$, $F(\alpha)$, et passe de là au difficile problème de la division. Il y donne les expressions algébriques de

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right), \quad f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right), \quad F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$$

sous la forme

$$\varphi(\beta) = \frac{1}{2n+1}\left[\varphi_1(\beta) + \sqrt[2n+1]{C_1 + \sqrt{C_1^2 - D_1^{2n+1}}} + \ldots + \sqrt[2n+1]{C_{2n} + \sqrt{C_{2n}^2 - D_{2n}^{2n+1}}}\right],$$

où

$$\varphi_1(\beta) = \varphi(2n+1)\beta + \frac{1}{2n+1}\left[\sqrt[2n+1]{A_1 + \sqrt{A_1^2 - D_1^{2n+1}}} + \ldots + \sqrt[2n+1]{A_{2n} + \sqrt{A_{2n}^2 - B_{2n}^{2n+1}}}\right],$$

et où les quantités C, D sont des fonctions rationnelles de $\varphi_1(\beta)$ et les A, B des fonctions de même nature de $\varphi(2n+1)\beta$. Ces expressions algébriques, dans le cas où l'on veut diviser les périodes, donnent les valeurs de

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),\ \varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$$

et montrent que ces quantités dépendent de la résolution d'une équation de degré $(2n+1)^2 - 1$.

Abel prouve que le problème se ramène à la résolution d'une équation du $(2n+2)^{\text{ième}}$ degré et de $2n+2$ équations du $n^{\text{ième}}$ degré. Ces dernières peuvent être résolues algébriquement par les méthodes employées par Gauss pour la division du cercle; mais la résolution ne peut pas, en général, s'effectuer pour l'équation de degré $2n+2$. Il y a exception dans le cas où $e = c$: c'est le théorème sur la division de la lemniscate par la règle et le compas.

A propos de ces *Recherches*, Gauss écrit à Crelle :

« .... D'autres occupations m'empêchent pour le moment de rédiger ces recherches. M. Abel m'a prévenu au moins d'un tiers. Il vient d'enfiler précisément la même route dont je suis sorti en 1798. Ainsi je ne m'étonne nullement de ce que, pour la majeure partie, il en soit venu aux mêmes résultats. Comme d'ailleurs, dans sa déduction, il a mis tant de sagacité, de pénétration et d'élégance, je me crois par cela même dispensé de la rédaction de mes propres recherches. »

Avant d'avoir lu le Mémoire d'Abel, Jacobi envoyait à Schuma-

cher, sous le titre *Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis,* un travail publié en décembre 1827 dans le n° 127 des *Astronomische Nachrichten* et contenant la démonstration du théorème sur la transformation rationnelle, démonstration fondée sur le nombre de constantes que comporte la substitution rationnelle $y = \frac{U}{V}$. Jacobi y introduit aussi, indépendamment d'Abel, la fonction inverse uniforme de l'intégrale elliptique, appelant sin am ce qu'Abel appelait φ; il y donne enfin ce théorème, sans d'ailleurs rien dire de la suite des idées qui l'ont conduit au résultat :

L'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \mathrm{M}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}$$

admet la solution

$$1 - y = \frac{(1 \pm x)\left(1 \pm \dfrac{x}{\sin\operatorname{coam}\dfrac{2\mathrm{K}}{2n+1}}\right)^2 \cdots \left(1 \pm \dfrac{x}{\sin\operatorname{coam}\dfrac{2n\mathrm{K}}{2n+1}}\right)^2}{\left(1 - \varkappa^2 x^2 \sin^2\operatorname{am}\dfrac{2\mathrm{K}}{2n+1}\right)\cdots\left(1 - \varkappa^2 x^2 \sin^2\operatorname{am}\dfrac{2n\mathrm{K}}{2n+1}\right)}.$$

Dans une Lettre à Legendre (12 janvier 1828), Jacobi parle des équations modulaires en général, équations qui forment comme un lien entre la théorie des transcendantes elliptiques, l'Algèbre et la théorie des nombres; de l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfont les équations modulaires qui corrspondent à un degré quelconque de transformation, et ajoute la remarque suivante :

« Aussi j'ai trouvé que, dans certains cas, on retombe sur le même module.... Ce sera dans tous les cas où le nombre n est la somme de deux carrés, $n = a^2 + 4b^2$, $\varkappa$ étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$; la fonction elliptique se trouve alors multipliée par $a \pm 2bi$. C'est un genre de multiplication qui n'a pas son analogie dans les arcs de cercle. »

Dans cette même Lettre, il parle des *Recherches* d'Abel et les résume en employant ses propres notations. Il indique en outre une méthode plus simple pour la résolution algébrique de l'équation de la division. Il publia ce résultat dans une Lettre à Crelle, datée

du 25 janvier 1828, que ce dernier inséra dans le premier cahier du troisième Volume de son *Journal*. A propos de cette démonstration, Abel envoya à Crelle (27 août 1828) les *Théorèmes sur les fonctions elliptiques* insérés dans le deuxième cahier du quatrième Volume. Il s'y appuie sur cette proposition fondamentale :

Soit $\psi(\theta)$ *une fonction entière quelconque de la quantité* $\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, *qui reste la même en changeant* θ *en* $\theta + \alpha$ *et en* $\theta + \beta$ $\left(\alpha = \frac{2\omega}{2n+1}, \beta = \frac{2\varpi i}{2n+1}\right)$; *soit* ν *le plus grand exposant de la quantité* $\varphi(\theta)$ *dans la fonction* $\psi(\theta)$; *on aura toujours*

$$\psi(\theta) = p + qf(2n+1)\theta.\mathrm{F}\,2n+1)\theta,$$

où p *et* q *sont deux fonctions entières de* $\varphi(2n+1)\theta$, *la première du degré* ν *et la seconde du degré* $\nu - 2$.

Jacobi revient sur la résolution algébrique des équations de division et de transformation dans une intéressante Lettre à Legendre du 18 janvier 1829.

Pendant que Jacobi s'efforçait d'approfondir la nature des fonctions doublement périodiques et d'en asseoir, par l'introduction des fonctions ϑ, la théorie sur de nouvelles bases, Abel (12 février 1828) terminait la seconde Partie de ses *Recherches*, publiée dans le deuxième cahier du troisième Volume du *Journal de Crelle*. Il s'y occupe d'abord de la possibilité d'exprimer algébriquement la fonction $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ quand certaines relations entre e et c sont satisfaites :

« C'est », dit-il, « ce qui arrive toujours si $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ peut être exprimé rationnellement par $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et des quantités connues, ce qui a lieu pour une infinité de valeurs de $\frac{c}{e}$. Dans tous les cas l'équation $P_n = 0$ peut être résolue par une seule et même méthode uniforme, qui est applicable à une infinité d'autres équations de tous les degrés. J'exposerai cette méthode dans un Mémoire séparé, et je me contenterai pour le moment de considérer le cas le plus simple et qui résulte de la supposition $e = c = 1$ et $n = 4\nu + 1$. »

Puis il donne le théorème sur la division de la lemniscate.

Il s'occupe ensuite de la théorie de la transformation, qu'il traite

sans avoir eu connaissance des travaux de Jacobi, ainsi qu'il le dit lui-même à la fin de son Mémoire, ainsi que l'a reconnu d'ailleurs Jacobi avec des paroles qui témoignent de son admiration pour Abel.

« M. Legendre », dit ce dernier, « a fait voir, dans ses *Exercices de Calcul intégral,* comment l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}$ peut être transformée en d'autres intégrales de la même forme avec un module différent. Je suis parvenu à généraliser cette théorie par le théorème suivant : *Si l'on désigne par* α *la quantité* $\frac{(m+\mu)\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1}$, *où au moins l'un des deux nombres entiers* m *et* μ *est premier avec* $2n+1$, *on aura*

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

où

$$y = f.x\,\frac{(\varphi^2\alpha - x^2)\ldots(\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)\ldots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}.\text{ »}$$

Et plus loin :

« Pour avoir une théorie complète de la transformation des fonctions elliptiques, il faudrait connaître toutes les transformations possibles : or je suis parvenu à démontrer qu'on les obtient toutes en combinant celle de M. Legendre avec celles contenues dans la formule ci-dessus, même en cherchant la relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques. Ce théorème, dont les conséquences embrassent presque toute la théorie des fonctions elliptiques, m'a conduit à un très grand nombre de belles propriétés de ces fonctions. »

Dans la Section intitulée *Sur l'intégration de l'équation séparée* $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+\mu^2y^2)}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+\mu^2x^2)}}$, il énonce le théorème suivant :

En supposant a réel et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit un nombre rationnel ; en supposant a imaginaire et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit de la forme $m \pm \sqrt{-1}\,\sqrt{n}$, *où m et n sont*

des nombres rationnels. Dans ce cas, la quantité μ n'est pas arbitraire; il faut qu'elle satisfasse à une équation qui a une infinité de racines réelles et imaginaires. Chaque valeur de μ satisfait à la question.

« La démonstration de ces théorèmes », dit-il plus loin, « fait partie d'une théorie très-étendue des fonctions elliptiques, dont je m'occupe actuellement, et qui paraîtra aussitôt qu'il me sera possible. »

L'année suivante, Abel mourait sans avoir pu publier cette théorie.

Dans le même cahier du *Journal de Crelle* qui contenait la seconde Partie des *Recherches*, paraissait une Lettre de Jacobi datée du 2 avril 1828, où il donnait l'expression de sinam comme quotient de deux séries de Fourier, les deux fonctions Θ et H, et le développement de $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ suivant les puissances de $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$.

Ces relations entre les périodes et les fonctions ϑ, et d'autres analogues, appartiennent à Jacobi seul. Abel, qui les donne en partie dans la *Note sur quelques formules elliptiques*, communiquée à Crelle en 1828 et parue en 1829 dans le premier cahier du quatrième Volume, s'exprime ainsi : « Formule due à M. Jacobi (t. III, p. 193, où ce géomètre en présente plusieurs autres très-remarquables et très-élégantes). »

Dans le même travail, Jacobi donne le développement de $\sqrt{\varkappa}$ comme quotient de deux séries procédant suivant les puissances à exposants carrés de q et de $q^{\frac{1}{4}}$. Enfin il y donne un résultat trouvé par Abel sous une autre forme, à savoir que, *à un module donné, pour un degré premier de transformation, correspondent toujours $n+1$ autres modules transformés que l'on obtient en remplaçant q par*

$$q^n,\ q^{\frac{1}{n}},\ \alpha q^{\frac{1}{n}},\ \ldots,\ \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}},$$

où $\alpha^n = 1$.

Ce même cahier du *Journal de Crelle* contient encore un travail de Jacobi, daté du 24 avril 1828 et intitulé *Note sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés.*

Cependant Abel cherchait à généraliser le problème de la trans-

formation, où, pour la publication, il avait été prévenu par Jacobi. Dans un travail daté du 27 mai 1828 et inséré dans le n° 138 des *Astronomische Nachrichten* en juin 1828, il annonce que les transformations algébriques peuvent toujours se ramener aux transformations rationnelles, et traite ces dernières en prenant pour base l'étude des périodes de l'intégrale proposée et de la transformée; il montre comment, lorsque le degré de transformation est composé, le problème se ramène à d'autres problèmes analogues, mais plus simples.

Vient ensuite une série de petites Notices, concernant la théorie de la transformation, où les deux géomètres rencontrent en partie les mêmes théorèmes et où chacun cherche à prévenir les publications de l'autre. Dans la *Suite des Notices sur les fonctions elliptiques,* datée du 21 juillet 1828 et publiée dans le troisième cahier du troisième Volume du *Journal de Crelle,* Jacobi introduit les fonctions Θ et H, considérées en elles-mêmes, comme fonctions fondamentales; il montre que les intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce peuvent s'exprimer au moyen des fonctions ϑ.

Il y développe l'équation aux dérivées partielles des fonctions ϑ, donne les développements de ces transcendantes en séries de puissances, donne l'élégante expression du multiplicateur de la transformation

$$M^2 = \frac{n(\varkappa - \varkappa^3)}{\lambda - \lambda^3}\,\frac{d\lambda}{d\varkappa},$$

donne la définition des équations du multiplicateur et cette propriété remarquable de leurs racines consistant en ce que, pour un degré premier de transformation, la moitié des valeurs de $\sqrt{M}$ s'exprime linéairement au moyen de l'autre moitié.

Il revient d'ailleurs sur l'expression des intégrales de troisième espèce au moyen des fonctions ϑ, dans un travail daté du 11 janvier 1829 et inséré dans le deuxième cahier du *Journal de Crelle*; il y donne la formule

$$\Pi(u, a) = u\,\mathrm{Z}(a) + \log\sqrt{\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}}.$$

Dans le même Mémoire, il développe les formules de transfor-

mation pour les intégrales de deuxième et de troisième espèce, et ajoute :

« On peut aussi parvenir directement de la fonction $\Theta(u)$ aux formules de transformation, en partant de son développement en produit infini, comme nous l'avons montré dans le troisième Volume de ce Journal. De là, en suivant une marche inverse de celle qu'on vient de présenter, on tire sur-le-champ les formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques de la première et de la troisième espèce, et, en différentiant, celles de transformation des fonctions elliptiques de la seconde espèce. »

Il donne enfin l'équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfont le numérateur et le dénominateur d'une substitution rationnelle $\frac{U}{V}$ qui sert à la transformation des fonctions elliptiques de première espèce, en sorte que la formation algébrique d'une telle substitution « est entièrement réduite à la recherche des équations aux modules », et termine par le théorème suivant :

Étant supposés connus tous les modules dans lesquels on peut transformer un module donné $\varkappa$ *à l'aide d'une transformation correspondant au nombre* n, *on peut exprimer par ces modules toutes les quantités de la forme* $\sin\operatorname{am}\frac{2mK + 2m'iK'}{n}$, m, m' *étant des nombres quelconques, sans qu'il soit nécessaire de résoudre une équation algébrique.*

Enfin, dans le Mémoire intitulé *De functionibus ellipticis commentatio,* qui, daté du mois d'avril 1829, parut dans le quatrième cahier du quatrième Volume du *Journal de Crelle*, il donne les formules de transformation des intégrales de deuxième et de troisième espèce au moyen des formules de transformation des fonctions ϑ, et développe l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre à laquelle satisfont U et V; il ajoute : « Quod sane est theorema memorabile, satis reconditum, numeratorem et denominatorem substitutionis U, V singulos definiri posse per æquationem differentialem tertii ordinis.... Integrale completum æquationum differentialium tertii ordinis, quibus functiones U, V definiuntur, in promtu esse non videtur. »

En avril 1829, l'impression des *Fundamenta nova* était terminée.

Pendant que Jacobi s'efforçait d'approfondir la nature spéciale des fonctions elliptiques, de ces fonctions qui, suivant ses expressions, « ont une manière d'être pour ainsi dire absolue », et dont le « caractère spécial est d'embrasser tout ce qu'il y a de périodique dans l'analyse », Abel s'attaquait plus volontiers à des questions d'un caractère général.

Dans un travail daté du 25 septembre 1828, inséré dans le n° 147 des *Astronomische Nachrichten,* il se pose ce problème :

Trouver tous les cas possibles où l'on pourra satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

par une équation algébrique entre les variables x et y, en supposant les modules c et c_1 moindres que l'unité et le coefficient a réel ou imaginaire.

Il revient sur la transformation dans la Note *Sur le nombre des transformations différentes qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction donnée de premier degré,* publiée dans le quatrième cahier du troisième Volume du *Journal de Crelle,* et dans le Mémoire, publié en même temps, intitulé *Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce :*

« Si une intégrale algébrique $f(y, x) = 0$ satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

on aura toujours

$$\int\frac{A+Bx^2}{1-\frac{x^2}{n^2}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$
$$=\int\frac{A'+B'y^2}{1-\frac{y^2}{m^2}}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}+k\log p,$$

où A, B, n sont des quantités données, A′, B′, m, k des quantités

constantes, fonctions des premières, et p une certaine fonction algébrique de y et x. Il est très remarquable que les paramètres m et n sont liés entre eux par la même équation que y et x, savoir $f(m, n) = 0$. »

Le même cahier du *Journal de Crelle* contient les *Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine classe de fonctions transcendantes*. C'est la particularisation, pour le cas des intégrales hyperelliptiques, du théorème général contenu dans le Mémoire communiqué à l'Académie des Sciences de Paris en 1826. Il y parle d'ailleurs de la proposition générale et en promet la démonstration; mais, pour le moment, il ne veut que « considérer un cas particulier qui embrasse en même temps les fonctions elliptiques, savoir les fonctions contenues dans la formule

$$\psi(x) = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

R étant une fonction rationnelle et entière quelconque, et r une fonction rationnelle ».

Il montre d'abord que, en posant

$$\psi(x) = \int \frac{f(x)\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}},$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions entières, et

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x),$$

$$\Theta(x)^2\varphi_1(x) - \Theta_1(x)^2\varphi_2(x) = A(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_\mu)^{m_\mu},$$

on a, en désignant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$ des quantités égales à ± 1,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 m_1 \psi(x_1) + \varepsilon_2 m_2 \psi(x_2) + \ldots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi(x_\mu) \\
&\quad = C - \frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}} \log\left[\frac{\Theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\Theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - \Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right] \\
&\qquad + \Pi \frac{f'(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \log\left[\frac{\Theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \Theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\Theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \Theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right];
\end{aligned}$$

il donne ensuite les théorèmes analogues pour les intégrales de la

forme

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{\varphi(x)}}$$

et en conclut la proposition générale.

Abel travaillait alors, ainsi qu'il résulte d'une lettre à Legendre, à la composition d'un Ouvrage qui devait comprendre l'ensemble de ses découvertes; n'espérant point d'ailleurs pouvoir le faire imprimer en Norvége, il envoya à Crelle le travail considérable intitulé *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.*

« Surtout », dit-il, « j'ai cherché à donner de la généralité à mes recherches en me proposant des problèmes d'une vaste étendue. Si je n'ai été assez heureux de les résoudre complétement, au moins j'ai proposé les moyens pour y parvenir. L'ensemble de mes recherches sur cet objet formera un Ouvrage de quelque étendue, mais que les circonstances ne me permettent pas encore de publier. C'est pourquoi je vais donner ici un précis de la méthode que j'ai suivie, avec les résultats généraux auxquels elle m'a conduit. »

La première Partie du *Précis* contient deux théorèmes très généraux; voici le premier :

Si $\int \frac{r\,dx}{\Delta(x,c)}$, *où* r *est une fonction rationnelle quelconque de* x, *est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques et par les fonctions elliptiques* $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$, *on pourra toujours supposer*

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta(x,c)} = p\,\Delta(x,c) + \alpha\,\psi(y) + \alpha'\,\psi_1(y_1) + \ldots + A_1 \log\left[\frac{q_1 + q'_1\,\Delta(x,c)}{q_1 - q'_1\,\Delta(x,c)}\right] + \ldots,$$

où toutes les quantités $p, q, \ldots, q_1, \ldots, q'_1, \ldots, y, y_1, y_2, \ldots$ *sont des fonctions rationnelles de* x.

Le second théorème répond à la question suivante :

Trouver tous les cas possibles dans lesquels on peut satisfaire à une équation de la forme

$$\begin{aligned}\alpha_1\,\varpi(x_1, c_1) &+ \ldots + \alpha_n\,\varpi(x_n, c_n)\\ &+ \alpha'_1\,\varpi_0(x'_1, c'_1) + \ldots + \alpha'_m\,\varpi_0(x'_m, c'_m)\\ &+ \alpha''_1\,\Pi(x''_1, c''_1, a_1) + \ldots + \alpha''_\nu\,\Pi(x''_\nu, c'', a_\nu)\\ &= u + A_1 \log v_1 + \ldots + A_\nu \log v_\nu.\end{aligned}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m, \alpha''_1, \ldots, \alpha''_\mu, A, \ldots, A_\nu$ *sont des quantités constantes,* $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_m, x''_1, \ldots, x''_\mu$ *des variables liées entre elles par des équations algébriques, et* $u, v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ *des fonctions algébriques de ces variables.*

Si une équation quelconque de cette forme a lieu, et qu'on désigne par c un quelconque des modules qui y entrent, il y aura parmi les autres au moins un module c′ tel qu'on puisse satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)},$$

en mettant pour y une fonction rationnelle de x et vice versa.

La seconde Partie du *Précis* ne fut point publiée.

« C'est jusqu'ici, dit Crelle, que ce Mémoire est parvenu à l'éditeur; M. Abel est mort (6 avril 1839) sans l'avoir fini. »

Il devait contenir l'étude des intégrales elliptiques à module réel et plus petit que 1, des fonctions inverses des intégrales elliptiques de première espèce et des intégrales de deuxième et de troisième espèce, de la double périodicité, la détermination des zéros et des infinis, le théorème de l'addition, la théorie de la division. Abel devait aussi, dans cette Partie, revenir sur la théorie générale des transformations algébriques en partant de la considération des périodes des fonctions inverses, s'occuper des équations modulaires et traiter de ces transcendantes qui constituent le numérateur et le dénominateur des fonctions inverses; enfin tous les résultats de la seconde Partie devaient être étendus aux intégrales ayant un module quelconque réel ou imaginaire.

« Dans ce qu'il a fait », dit Poisson, « la postérité saura reconnaître tout ce qu'il aurait pu faire s'il eût vécu davantage. »

Nous ne suivrons pas M. Koenigsberger dans l'analyse des *Fundamenta nova*, et nous arrivons à ce qui concerne les papiers posthumes de Gauss, de celui que Legendre, dans une de ses Lettres à Jacobi, ne pouvant croire à un silence si longtemps gardé sur des découvertes aussi considérables, appelait familièrement l'*envahisseur*, et qui laissa à d'autres, tout entière, une gloire qui aurait pu lui appartenir et que, malgré le rang que lui assurent ses immortels travaux, il n'aurait sans doute pas jugée

indigne de lui. M. Koenigsberger, dans ce qui suit, pour ce qui concerne les dates, prend pour base le travail de M. Schering.

M. Schering fait d'abord remarquer que, d'après une communication relative à une déclaration orale de Gauss, ce dernier paraît avoir connu dès l'année 1794 les relations qui existent entre la moyenne arithmético-géométrique et les séries de puissances où les exposants procèdent suivant les carrés des nombres entiers, c'est-à-dire, dans le langage actuel, le développement de l'intégrale elliptique complète K suivant les puissances de q, ou, si l'on veut, cette équation

$$K = 2\pi\vartheta_3^2,$$

qui est une des plus belles découvertes de Jacobi.

Il existe une Note manuscrite de Gauss ainsi conçue : *Functiones lemniscaticas considerare cœperamus* 1797, *Januar* 8.

Les recherches qui portent ce titre : *Elegantiores integralis* $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ *proprietates* doivent évidemment être classées parmi les premières qu'il ait faites sur ce sujet. L'auteur part de l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, forme la fonction inverse et pose

$$\mathrm{sl}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x, \quad \mathrm{cl}\left(\frac{\omega}{2} - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right) = x,$$

développe le théorème de l'addition pour $\mathrm{sl}(a\pm b)$, $\mathrm{cl}(a\pm b)$, détermine les zéros de ces fonctions lemniscatiques, établit le théorème de la multiplication pour $\mathrm{sl}(n\varphi)$ et $\mathrm{cl}(n\varphi)$ et les développements procédant suivant les puissances pour $\mathrm{arc\,sl}\,x$ et $\mathrm{sl}\,\varphi$. Enfin il introduit comme numérateur et dénominateur de $\mathrm{sl}\,\varphi$ les transcendantes $P(\varphi)$ et $Q(\varphi)$, donne leurs développements suivant les puissances et détermine les limites de convergence; ces transcendantes sont précisément les fonctions de Weierstrass $\mathrm{Al}(w)_1$, $\mathrm{Al}(w)_0$ dans le cas où $k^2 = -1$.

Dans un cahier de notes commencé en juillet 1798 et portant le titre *De curva lemniscata*, il établit l'intégrale algébrique de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0,$$

en déduit le théorème de l'addition pour $\mathrm{sl}(p \pm q)$, et donne le développement du numérateur $P(\varphi)$ et du dénominateur $Q(\varphi)$ de $\mathrm{sl}(\varphi)$ en un produit simplement infini, dont les facteurs sont respectivement

$$1 + \frac{4s^2}{(e^{k\pi} + e^{-k\pi})^2}, \quad 1 - \frac{4s^2}{\left(e^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} + e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2}}\right)^2}.$$

Sur cette représentation analytique des transcendantes $P(\varphi)$ et $Q(\varphi)$, Gauss dit : « *Id quod rigorose demonstrare possumus.* » Nous devons donc supposer qu'il était en possession d'une partie des propositions de la théorie des fonctions relatives au développement en produit infini d'une fonction uniforme. Entre $P(\varphi)$ et une fonction $\mathfrak{P}(\varphi)$ qu'il définit à nouveau [et qui n'est autre que la fonction $P(\varphi)$ de la définition précédente], il établit des relations de la forme

$$\mathfrak{P}(\psi\omega) = e^{\frac{1}{2}\pi\psi^2} P(\psi\omega);$$

c'est précisément, avec les notations actuelles, la relation

$$\mathrm{Al}(w)_3 = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{Ex^2}{2\Omega}w^2} \frac{\vartheta\left(\frac{2w}{\Omega}\right)}{\vartheta_1}.$$

Enfin il donne le développement de $\mathrm{sl}(\varphi)$ en fractions simples et celui de $\log P(\psi\omega)$ en cosinus de multiples de $2\psi\pi$.

Un cahier de notes commencé en novembre 1799 contient, sur la lemniscate, le développement en série de Fourier des fonctions $P(\psi\omega)$, $Q(\psi\omega)$, le développement déjà cité

$$\sqrt{\frac{\omega}{\pi}} = 1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} - \ldots,$$

les développements en séries de Fourier de $\frac{1}{\mathrm{sl}(\psi\omega)}$, $P^2(\psi\omega)$, $Q^2(\psi\omega)$, et, sous le titre *Variæ summationes serierum absconditæ*, des résultats de la forme

$$\left(\frac{2}{e^{\pi} + e^{-\pi}}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^{3\pi} + e^{-3\pi}}\right)^2 + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\pi^2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2},$$

et le développement en produit de la période

$$\frac{\omega}{2} = \frac{3}{2}\,\frac{4}{5}\,\frac{7}{6}\,\frac{8}{9}\,\frac{11}{10}\,\frac{12}{13}\cdots$$

Enfin, à l'aide de la moyenne arithmético-géométrique, sur laquelle nous reviendrons bientôt, il obtient des formules sur la division en cinq parties égales de la lemniscate, formules qui se relient évidemment avec ces théorèmes généraux sur la division de la lemniscate, dont, comme le prouve la publication des *Disquisitiones arithmeticæ,* Gauss était en possession, et qu'Abel retrouva trente ans plus tard. Concurremment avec ses recherches sur les fonctions lemniscatiques, Gauss s'occupait des intégrales et des fonctions elliptiques en général. Dans un cahier dont la première page porte en tête *Varia, imprimis de integrali* $\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu^2\sin^2 u}}$, *Novembr.* 1799, nous trouvons traité, pour l'intégrale générale elliptique de première espèce, prise sous la forme normale de Legendre, le problème de l'inversion, tel qu'il a été résolu, tant d'années plus tard, par Abel et Jacobi.

L'auteur y suppose connue la théorie de la moyenne arithmético-géométrique, ou, si l'on veut, la connaissance de ce théorème que, *si dans l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2 T + n^2\sin^2 T}}$$

on fait la substitution

$$\sin T = \frac{2m\sin T'}{(m+n)\cos^2 T' + 2m\sin^2 T'},$$

l'intégrale se change en

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos^2 T' + n'^2\sin^2 T'}},$$

où

$$\frac{m+n}{2} = m', \quad \sqrt{mn} = n',$$

en sorte que, si l'on forme la suite indéfinie des moyennes arith-

métiques et géométriques m', n', m'', n'', ..., moyennes qui tendent vers une limite commune $\mu = \mathrm{M}(m,n)$, on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\mathrm{T}}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2\mathrm{T} + n^2\sin^2\mathrm{T}}} = \frac{1}{\mu}.$$

Ce sont là d'ailleurs des propositions que Gauss ne publia que beaucoup plus tard, en janvier 1818, dans un travail intitulé *Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datæ exercet planeta*. Dans l'analyse donnée par lui-même de son Mémoire il s'exprime ainsi (9 février 1818) :

« L'auteur a saisi la première occasion qui s'offrait à lui pour donner les premiers linéaments d'un *nouvel algorithme*, dont il s'est servi depuis de longues années pour la détermination de ces transcendantes, et sur lequel il publiera dans l'avenir des recherches étendues contenant un grand nombre de résultats importants. »

Il fait comprendre aussi qu'il est en possession d'une théorie très-étendue des transcendantes elliptiques, dont les recherches de Lagrange et de Legendre ne sont que les commencements :

« Il n'échappera pas au lecteur qu'une multitude de problèmes intéressants, qui se relient aux transcendantes en question, se trouvent résolus avec la plus grande facilité au moyen de cet algorithme. Comme exemple, nous citerons la rectification de l'ellipse : en posant son demi-grand axe $= n$, sa circonférence sera

$$\frac{2\pi}{\mu}\left[m'^2 - 2(m''^2 - n''^2) - 4(m'''^2 - n'''^2) - \ldots\right].$$

Un autre exemple est fourni par la durée des oscillations d'un pendule sur un arc fini, durée qui est à celle des oscillations infiniment petites comme l'unité est à la moyenne arithmético-géométrique entre 1 et le cosinus de l'arc total d'oscillation. Enfin il faut encore remarquer que l'auteur a cru devoir publier sous leur forme primitive ces résultats, trouvés il y a bon nombre d'années, indépendamment des recherches analogues de Lagrange et de Legendre, quoiqu'ils puissent en partie être déduits aisément des découvertes de ces géomètres, tant parce que cette forme lui paraît présenter des avantages essentiels que parce qu'elle est précisément le point de départ d'une théorie beaucoup plus étendue où

ses travaux l'ont conduit dans une direction toute différente de celle qui a été suivie par les géomètres qu'il a nommés. »

Les recherches de Gauss sur la moyenne arithmético-géométrique sont contenues sous ces titres :

De origine proprietatibusque generalibus numerorum arithmetico-geometricorum

et

De functionibus transcendentibus quæ ex differentiatione mediorum arithmetico-geometricorum oriuntur,

dans un cahier dont Gauss a commencé à se servir depuis l'année 1800, et où il se trouve divers développements en séries relatives à la moyenne arithmético-géométrique.

C'est en partant de ces recherches que Gauss jette les fondements de la théorie des intégrales elliptiques et des fonctions inverses.

Faisant

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu^2 \sin^2 u}} = \varphi$$

et substituant $\mu = \operatorname{tang} \nu$, il définit les périodes par les expressions

$$\frac{\pi}{M(1, \sqrt{1+\mu^2})} = \frac{\pi \cos \nu}{M(1, \cos \nu)} = \omega,$$

$$\frac{\pi}{\mu M\left(1, \sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}\right)} = \frac{\pi \cos \nu}{M(1, \sin \nu)} = \omega';$$

il pose

$$\sin u = S(\varphi) = S(\psi\omega),$$

donne les développements en série trigonométrique de la fonction inverse uniforme, et écrit

$$S(\psi\omega) = \frac{T(\psi\omega)}{V(\psi\omega)},$$

où T et V sont, à un facteur constant près, ce que l'on a appelé plus tard ϑ_1 et ϑ_0 ; il développe ces fonctions et leurs carrés en séries de

Fourier et en produits infinis sous la forme même qui a été donnée plus tard par Abel et Jacobi.

Toutes ces recherches étaient vraisemblablement terminées en 1798, comme il résulte d'un passage d'une Lettre de Crelle à Abel, où il cite une communication de Gauss, qui s'exprime ainsi :

« Il (Abel) vient d'enfiler précisément la même route dont je suis sorti en 1798. »

Sous ce titre, *Einige neue Formeln die lemniscatischen Functionen betreffend,* on trouve, dans un cahier commencé en 1801, une suite de résultats intéressants et qui probablement ont été trouvés beaucoup plus tôt. L'auteur part de la multiplication complexe de la fonction lemniscatique, donne le développement en série de celle-ci, ainsi que l'équation différentielle pour la transcendante $P(\varphi)$ et le développement de cette dernière en série de puissances.

En faisant abstraction du passage célèbre des *Disquisitiones,* les publications relatives à toutes ces recherches se réduisent à deux Mémoires : l'un est intitulé *Summatio quarundam serierum singularium,* et a été publié en septembre 1808; on y trouve étudiés les séries et les produits qui appartiennent à la théorie des fonctions elliptiques; l'autre est le Mémoire sur la *Determinatio attractionis,* etc., de janvier 1818, dont nous avons déjà parlé et où Gauss traite de la moyenne arithmético-géométrique.

De l'année 1808, il y a une suite d'importantes recherches sous ce titre, *Zur Theorie der transcendenten Functionen.* Gauss y donne la définition des fonctions ϑ, qu'il appelle T; elles y sont définies comme sommes infinies de quantités exponentielles à exposants quadratiques : il les développe en séries de cosinus des multiples de l'argument, établit les relations entre les différentes fonctions ϑ pour l'argument zéro, développe la formule pour une transformation du second degré de ces transcendantes, traite les équations de la division pour les nombres 3, 5 et 7. Enfin la fonction ϑ est développée en un produit doublement infini; de ce développement résulte une formule de transformation linéaire. Nous savons en outre, par une lettre de Jacobi à Legendre du 5 août 1827, que Gauss, outre la théorie de la division par 3, 5 et 7, connaissait la chaîne des modules qui correspond à ces degrés de transformation.

Le cahier terminé le 28 avril 1809 contient les relations entre les fonctions ϑ à argument zéro pour des multiples du module et les relations entre les fonctions ϑ à argument quelconque. Mais plus intéressantes et plus importantes sont les recherches, dont les résultats ont été retrouvés plus tard par Abel, qui sont contenues dans le cahier terminé le 2 mai 1809; elles portent ce titre : *Fortsetzung der Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel.* Elles contiennent les relations entre les fonctions ϑ de module τ et les fonctions correspondantes de modules 4τ, 16τ, ..., les développements en série des fonctions ϑ à variables nulles, les relations entre les diverses fonctions ϑ pour le module augmenté d'une unité et la transformation linéaire complète de ces transcendantes pour la valeur zéro de l'argument. Là aussi sont traitées les relations qui existent entre les fonctions ϑ pour des relations linéaires entre des modules que l'on suppose racines d'équations quadratiques ayant le même déterminant négatif, c'est-à-dire pour les modules de la multiplication complexe. Enfin on y trouve encore les formules de transformation du second degré pour les fonctions ϑ, leur équation aux dérivées partielles et les formules connues pour la seconde dérivée logarithmique de ces fonctions.

Le cahier commencé en mai 1808 contient les formules d'addition et de multiplication (même pour un argument complexe), et aussi les formules de transformation de degré n pour les fonctions ϑ qui correspondent aux fonctions lemniscatiques. Enfin les *Hundert Theoreme über die neuen Transcendenten,* dont, d'après M. Schering, on ne peut pas fixer la date, concernent encore le développement des fonctions ϑ, contiennent différents cas simples de transformation de ces transcendantes pour l'argument zéro et diverses relations entre ces fonctions et la moyenne arithmético-géométrique.

Ce n'est plus que le 20 février 1817 qu'on retrouve dans les papiers de Gauss une indication relative à la *lemniscatische Function.* En faisant

$$\mathrm{sl}(x) = \mathrm{X}, \quad \int x^2 d\mathrm{X} = \mathrm{F}(\mathrm{X}),$$

elle contient le théorème de l'addition des intégrales de seconde

espèce, connu depuis longtemps, sous la forme

$$F(a+b) = F(a) + F(b) - \mathrm{sl}\, a . \mathrm{sl}\, b . \mathrm{sl}(a+b).$$

Les recherches d'Abel et de Jacobi fournirent de nouveau à Gauss l'occasion de revenir à des études abandonnées depuis longtemps; comme le fait ressortir M. Schering, les Lettres de Gauss à Schumacher, du 4 et du 19 août 1827, montrent que Schumacher, avant de publier la Lettre de Jacobi dans les *Astronomische Nachrichten,* en avait communiqué l'original à Gauss. On trouve dans les papiers posthumes de ce dernier un passage vraisemblablement inspiré par la lecture de la première Lettre de Jacobi à Schumacher. Dans un travail intitulé *Allgemeines Theorem* (6 août 1827), la transformation, pour les degrés 2, 3, 7, est traitée au moyen des formules de transformation, correspondantes à ces degrés, des fonctions ϑ de Jacobi que Gauss appelle P, Q, R, S; elle est fondée sur une méthode que Jacobi développa plus tard. La seconde Lettre de Jacobi, sur l'expression analytique générale des transformations rationnelles, donne à Gauss l'occasion (29 août) de rechercher quelles relations doivent exister, pour l'argument zéro, entre les fonctions ϑ primitives et transformées, et de former l'équation modulaire pour la transformation du cinquième degré. La fin des indications relatives à cette époque concerne le développement d'un cas de la transformation linéaire des fonctions ϑ et des conditions de convergence de ces dernières; à ces conditions se relie immédiatement une proposition appartenant à la théorie des fonctions : *Si à l'intérieur d'un contour fermé on a constamment*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

et si sur le contour V *est constamment égal à* A, *on a partout* $V = A$.

En considérant l'ensemble des recherches faites par ce géomètre d'un incomparable génie, que nous a fait connaître la publication des papiers posthumes de Gauss, on est sûr de ne pas aller trop loin en affirmant qu'il avait trouvé à peu près trente ans avant Abel et Jacobi, au moins dans leurs lignes principales, une bonne partie des résultats et des méthodes dont la Science, en ce qui touche la théorie des fonctions elliptiques, est redevable à ces deux

mathématiciens; il faut seulement excepter les recherches algébriques de Jacobi sur la théorie des fonctions elliptiques et ses découvertes concernant l'introduction des fonctions ϑ dans la théorie des intégrales de seconde et de troisième espèce, ainsi que les travaux d'Abel sur le théorème auquel on a donné son nom, sur la théorie de la transformation en général et sur la réduction des intégrales à différentielles algébriques. J. T.

MÉLANGES.

SUR LES POINTS DE DÉDOUBLEMENT DE M. J. PLATEAU;

Par M. P. Mansion.

Monsieur le Rédacteur,

Permettez-moi de vous indiquer une petite erreur typographique qui s'est glissée dans mon résumé (*Bulletin*, 2e série, t. II, IIe Partie, p. 243) de la Note de M. J. Plateau, intitulée *Quelques exemples curieux de discontinuité en Analyse*. Dans l'équation de la seconde courbe du n° 4, le facteur $(y - \cos\sqrt{x})$ doit être affecté de l'exposant 2. Cette équation est déduite de celle-ci,

$$x = my^2\left[(1+y^3) \pm (\sqrt{1+y^2})^3\right],$$

en remplaçant y par $(y - \cos\sqrt{x})$.

Si je signale ici ce petit erratum, c'est uniquement pour reproduire exactement, dans mon résumé, les exemples mêmes de l'article original. Nous avons observé en effet, avec M. Plateau, que, si dans les deux exemples rapportés dans sa Note on supprime l'exposant 2 qui affecte le facteur $(y - \cos x)$, les nouvelles équations ainsi obtenues, savoir

$$(1) \qquad x = (y - \cos\sqrt{x})\left\{1 \pm \sqrt{1 - [y - \cos\sqrt{x}]}\right\},$$

$$(2) \qquad x = m(y - \cos\sqrt{x})\left\{1 + (y - \cos\sqrt{x})^3 \pm \left[\sqrt{1 + (y - \cos\sqrt{x})^2}\right]^3\right\},$$

sont celles de deux nouvelles courbes présentant aussi, en

$$(x = 0,\ y = 1),$$

un point de dédoublement. A un certain point de vue, ces points de dédoublement sont même plus remarquables que ceux que M. Plateau a signalés dans la Note citée, parce que les tangentes aux deux branches de la courbe, qui se rencontrent en ces points, au lieu de se confondre, sont distinctes.

Considérons, en effet, l'équation (1). Elle se déduit de

$$(3) \qquad x = y\left(1 \pm \sqrt{1 - y}\right)$$

en changeant y en $\left(y - \cos\sqrt{x}\right)$. L'équation (3) représente une courbe ayant à l'origine un point double, tangente à l'axe des y et à la droite $x = 2y$, et formant une espèce de *folium* dans l'angle des x et des y positifs; au-dessous de l'axe des x, elle se prolonge indéfiniment suivant deux branches situées l'une d'un côté, l'autre de l'autre de l'axe des y. Si l'on remplace, dans l'équation (3), y par $\left(y - \cos\sqrt{x}\right)$, de manière à obtenir l'équation (1), la feuille et la branche de droite sont modifiées, les ordonnées étant augmentées de $\cos\sqrt{x}$; la branche de gauche disparaît. Le nouveau *folium* ainsi obtenu est maintenant tangent, au point $(x = 0, y = 1)$, à l'axe des y et à une parallèle à l'axe des x.

La courbe (2) présente des particularités analogues. Toutefois, dans l'angle des axes positifs, elle se compose, non d'une feuille, mais de deux branches indéfinies se rencontrant sous un angle dont la grandeur dépend de m. Si $m = 1$, cet angle est encore de 30°.

Agréez, etc. P. Mansion.

SUR UNE VALEUR APPROCHÉE DE $\sqrt{2}$ ET SUR DEUX APPROXIMATIONS DE $\sqrt{3}$;

PAR M. C. HENRY.

Dans ces derniers temps, deux savants géomètres, M. Léon Rodet et M. Alexéief, ont cherché [1] à retrouver, entre autres exemples

[1] *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1879.

numériques moins importants : 1° la valeur de

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34},$$

signalée dans les *Préceptes du cordeau* de Baudhâyana ; 2° les valeurs approchées par défaut et par excès de $\frac{265}{153}$ et de $\frac{1351}{780}$ attribuées un siècle après à $\sqrt{3}$ par Archimède (*Traité de la mesure du cercle,* proposition III).

M. Rodet a appliqué à la série de Baudhâyana une formule du Persan Al-Morouzi et aux fractions d'Archimède le procédé d'un géomètre français du XVIe siècle, Estienne de la Roche. Ce procédé, appelé par l'auteur *règle de médiation,* repose sur ce principe : si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ désignent deux fractions à termes positifs, la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est comprise entre les deux.

Il n'est pas sans intérêt d'observer que les anciens ont dû, en effet, connaître cette règle, puisque, en posant, au lieu de a et b, $\frac{a}{1}$ et $\frac{b}{1}$, on obtient $\frac{a+b}{2}$ également par moyenne arithmétique et par médiation. Toutefois, il ne semble pas que cette règle soit uniquement celle d'Archimède ni que la formule d'Al-Morouzi soit celle de Baudhâyana. La formule persane ne reproduit pas, en effet, la physionomie de cette dernière série ; en outre, l'application pure et simple de la règle de médiation paraît beaucoup trop laborieuse.

Dans le but de retrouver ces valeurs et, en général, les exemples numériques qui nous sont parvenus de l'antiquité, M. Alexéief a proposé, mais sans l'appliquer à ces exemples, une solution théorique du problème de l'extraction de la racine carrée par l'emploi de la moyenne arithmétique et de la moyenne harmonique.

Nous croyons pouvoir affirmer que ce procédé est bien véritablement, avec quelques modifications dans la pratique, celui de Baudhâyana et celui d'Archimède. Nous nous permettrons seulement de faire remarquer que, avant M. Alexéief, M. le professeur Oppermann (¹) avait appliqué à la fraction $\frac{265}{153}$ la méthode des deux

(¹) J.-L. HEIBERG, *Quæstiones Archimedeæ*. Hauniæ, 1879, p. 65 ; *Oversigt over det*

moyennes, et que les formules données par M. Alexéief, de même que celles données il y a quelques jours par M. le colonel Mathieu ([1]), se déduisent facilement des formules établies par M. Éd. Lucas dans la Section XIX de sa *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* ([2]).

Ces restrictions établies, soit à reproduire

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34};$$

posons, conformément à la règle, $2 = 1 \times 2$. Les moyennes arithmétiques et harmoniques de 1 et de 2 et les moyennes de ces moyennes sont $\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$, $\frac{17}{12}$ et $\frac{24}{17}$, $\frac{577}{408}$ et $\frac{816}{577}$. Les moyennes arithmétiques sont approchées par excès et continuellement décroissantes. Les moyennes harmoniques sont approchées par défaut et continuellement croissantes. Cherchons les différences des premières $\frac{3}{2} - \frac{17}{12} = \frac{1}{3.4}$, $\frac{17}{12} - \frac{577}{408} = \frac{1}{3.4.34}$. Prenons la première valeur approchée par défaut $= 1 + \frac{1}{3}$, et nous avons tous les éléments de la série, d'où il ressort que Baudhâyana employait en effet le procédé des deux moyennes, mais calculait en outre les différences entre les valeurs successives des approximations par excès et les différences de ces différences.

Si nous considérons maintenant que Woepcke ([3]) a établi par des raisons puissantes la haute probabilité d'une transmission de connaissances de l'Inde en Grèce vers le IIIe siècle avant J.-C., nous sommes conduits à supposer *a priori* de grandes ressemblances entre la méthode indienne et la méthode archimédéenne.

Soit, en effet, à retrouver $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$. Posons $3 = 3 \times 1$. Les moyennes arithmétiques et harmoniques de ces deux nombres sont

---

Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og det Medlemmers Arbejder, Aaret 1875, p. 18-22.

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* décembre 1879, p. 531.

([2]) *American Journal of Mathematics* de M. Sylvester, vol. I, 1878, p. 225.

([3]) *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens,* p. 90-91.

2 et $\frac{3}{2}$. Les moyennes de ces deux moyennes sont $\frac{7}{4}$ et $\frac{12}{7}$. Les nouvelles moyennes de ces deux moyennes sont $\frac{97}{56}$ et $\frac{168}{97}$. Sommons les numérateurs et les dénominateurs; il vient $\frac{265}{153}$. Il est clair que l'on pourrait, en continuant ces sommations, obtenir $\frac{1351}{780}$. En effet, $\frac{97}{56}+\frac{265}{153}=\frac{362}{209}$, $\frac{97+168+265+362}{56+97+153+209}=\frac{892}{515}$, $\frac{892+56}{515+97}=\frac{989}{571}$, $\frac{989+362}{571+209}=\frac{1351}{780}$; mais ce procédé n'explique évidemment pas le choix de $\frac{1351}{780}$. Il faut supposer ici un procédé direct et indépendant du précédent. Le suivant remplit ces deux conditions. Posons $3=3\times 1$. La moyenne arithmétique ou la médiation de ces nombres est 2, la moyenne harmonique $\frac{3}{2}$. La médiation de cette médiation et de cette moyenne est $\frac{5}{3}$, la moyenne harmonique $\frac{9}{5}$. Les moyennes arithmétique et harmonique de cette médiation et de cette moyenne sont $\frac{26}{15}$ et $\frac{45}{25}$, dont la moyenne arithmétique est $\frac{1351}{780}$, d'où il ressort qu'Archimède aurait employé le procédé des deux moyennes compliqué de médiations, mais en variant, selon que l'approximation cherchée de la racine doit être par excès ou par défaut, l'ordre des médiations.

D'ailleurs, il n'est pas sans intérêt de remarquer, indépendamment de ces coïncidences, que l'antiquité a dû être conduite à cette méthode d'approximation par plusieurs voies très-directes.

1. *Procédé géométrique.* — Soient sur une droite trois points successifs O, A, B; décrivons une circonférence sur AB comme diamètre et menons les tangentes OT, OT′; désignons par B_1 le centre de la circonférence et par A_1 l'intersection de TT′ avec OB; il vient $OA < OA_1 < OT$; $OB > OB_1 > OT$, et par similitude des triangles rectangles $\frac{OA}{OT}=\frac{OT}{OB}$, $\frac{OA_1}{OT}=\frac{OT}{OB_1}$; OA_1 et OB_1, les deux valeurs plus approchées de la moyenne proportionnelle, sont préci-

sément les moyennes arithmétique et harmonique de OB et de OA.

2. *Procédé arithmétique.* — Soient a et b deux valeurs quelconques et approchées de leur moyenne proportionnelle; tout nombre intermédiaire entre a et b est évidemment une valeur plus approchée de leur moyenne proportionnelle que l'un deux. Soit une valeur plus approchée $b_1 = \frac{a+b}{2}$; on obtient l'autre valeur $a_1 = \frac{2ab}{a+b}$ par la condition $ab_1 = ab$.

Enfin, de la méthode d'interpolation des parties proportionnelles appliquée par Hipparque (deuxième siècle avant J.-C.) à la détermination de l'équinoxe, on tire encore pour valeurs approchées les deux moyennes, car, en prenant la valeur a approchée par défaut, on obtient pour le carré un nombre trop faible de $ab - a^2$; en prenant la moyenne b approchée par excès, on obtient pour le carré un nombre trop grand de $b^2 - ab$; donc, en désignant par a_1 la valeur de la moyenne proportionnelle dans la supposition des accroissements proportionnels, on aura

$$\frac{a_1 - a}{b - a} = \frac{a}{2 + a},$$

d'où

$$a_1 = \frac{2ab}{a+b},$$

et par la proportion $\frac{a_1}{a} = \frac{b}{b_1}$, il vient

$$b_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Observons, en terminant, que, si la méthode des deux moyennes est comparée avec la méthode plus récente des fractions continues, l'avantage revient à la première. Qu'on développe, en effet, en fractions continues $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$; on constate que les valeurs trouvées par l'emploi des moyennes reviennent au calcul des réduites successives dont les rangs sont en progression géométrique de raison $= 2$, cas pour lequel M. Éd. Lucas veut bien nous faire observer que M. Serret

a donné dès 1847 (*Journal de Liouville,* t. XIII, p. 518) les formules retrouvées par lui-même et par M. Alexéief [1]. Il est également curieux d'observer que l'application simultanée des méthodes d'interpolation par les parties proportionnelles et de Newton à l'extraction de la racine carrée du produit ab fournit comme valeurs approchées par défaut et par excès la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique des deux nombres a et b.

---

(1) En 1873, une question proposée par M. le prince Boncompagni dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, tome XII, p. 191, a conduit aussi à ces formules M. Moret-Blanc (t. XII, p. 477-480).

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME III; 1879. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME III.

5253 Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel,* Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

8243 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE,
LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME III. — ANNÉE 1879.

(TOME XIV DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1879

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, fondé par J. LIOUVILLE et continué par H. RESAL. — 3e série (¹).

Tome IV; 1878.

Darboux. — Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Première Partie. (1-56).

Dans la première Partie de ce travail, l'auteur développe une méthode nouvelle pour obtenir les expressions approchées des fonctions de très-grands nombres. Parmi les applications de cette méthode, nous indiquerons les suivantes :

1° L'approximation des polynômes de Legendre. L'auteur donne en particulier une formule qui permet d'obtenir une expression approchée, l'erreur commise étant de l'ordre d'une puissance aussi grande qu'on le voudra de $\frac{1}{n}$.

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 48.

2° L'approximation indéfinie des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de

$$(1-x^2)^{-\alpha}, \quad (1+x^2)^{-\alpha},$$

et, en général, de

$$(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant quelconques.

3° L'approximation de l'intégrale

$$\int \varphi(x) f^n(x)\, dx.$$

L'auteur étend le résultat de Laplace au cas où les fonctions f et φ sont imaginaires, ainsi que les limites de l'intégrale.

4° L'approximation du terme général de la série de Lagrange

$$\frac{d^n}{dx^n} \cdot f(x)\, \varphi^n(x).$$

5° L'approximation indéfinie des polynômes qui naissent de la série hypergéométrique et qui ont été étudiés par Jacobi et par M. Tchebychef.

Le principe de la méthode adoptée par l'auteur consiste dans la détermination de l'ordre de grandeur des termes d'une série trigonométrique ou, ce qui est la même chose, des coefficients de rang élevé d'une série ordonnée suivant les puissances de la variable. M. Darboux montre que l'ordre de grandeur et l'expression approchée de ces coefficients se déterminent aisément quand on connaît les valeurs pour lesquelles la fonction devient infinie et la manière dont elle devient infinie dans le voisinage de ces valeurs.

Mannheim (*A.*). — Sur les surfaces réglées. (57-60).

Mathieu (*Ém.*). — Réponse à la Note de M. Allégret sur le problème des trois corps. (61-62).

Clausius (*R.*). — Sur la déduction d'un nouveau principe d'Électrodynamique. (63-118).

On sait que M. W. Weber [1] a cherché à ramener les phénomènes électrostatiques et électrodynamiques à un principe unique, à l'aide duquel il exprime la force que deux particules d'électricité en mouvement exercent l'une sur l'autre. Soient e, e' les masses de deux particules électriques situées au temps t à une distance r l'une de l'autre; l'action exercée par ces particules est une répulsion f:

$$(1) \qquad f = \frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2}\, r\, \frac{d^2 r}{dt^2}\right].$$

Dans cette expression, c représente une constante.

---

[1] Consultez, au sujet des formules de Weber et de Riemann, les Leçons de Riemann, publiées récemment par Hattendorff sous le titre : *Schwere, Elektricität und Magnetismus*, et dont nous avons rendu un compte sommaire dans ce *Bulletin* (t. XI, p. 97).

Riemann a énoncé une loi différente. En désignant par x, y, z, x', y', z' les coordonnées des particules de masse e, e' au temps t, la composante suivant l'axe des x de la force que e' exerce sur e est

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} X = {} & \frac{ee'}{r^2}\frac{dr}{dx} + \frac{ee'}{c^2}\frac{d\left[\frac{2}{r}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)\right]}{dt} \\ & + \frac{ee'}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)^2\right], \end{aligned} \right.$$

et les composantes suivant les autres axes sont données par des expressions analogues.

Les formules de Weber et de Riemann, appliquées à l'action réciproque de deux courants fermés, fournissent des résultats concordant avec la loi d'Ampère ; elles satisfont, de plus, aux lois connues de l'induction et ne sont point en contradiction avec le principe de la conservation de l'énergie. Elles suffisent donc à tous les besoins de la Physique actuelle.

Toutefois, Weber n'a établi la formule (1) qu'à la faveur d'une hypothèse particulière sur la constitution intime des courants, d'après laquelle des quantités égales d'électricités positive et négative se déplaceraient en sens contraire avec une vitesse égale dans chaque élément conducteur. M. Clausius rejette une conception aussi compliquée et se propose de trouver une expression générale des actions électriques compatible avec l'hypothèse d'un seul fluide en mouvement dans les conducteurs traversés par un courant. On pourra supposer l'électricité négative adhérente à la matière, tandis que l'électricité positive se déplace seule dans le sens du courant.

M. Clausius établit d'abord que les formules de Weber et de Riemann ne sont pas compatibles avec l'hypothèse d'un seul fluide en mouvement : elles conduisent, dans ce cas, à un résultat contraire à cette proposition expérimentale qu'*un courant fermé et constant, qui se trouve dans un conducteur au repos, n'exerce aucune force motrice sur l'électricité en repos.*

Il cherche ensuite une expression de la force exercée par une particule e' sur une particule e d'électricité dans l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans les conducteurs. Il suppose que cette force dépend de la position mutuelle des particules ainsi que des conditions de mouvement déterminées par les composantes de leur vitesse et de leur accélération, et forme, en conséquence, pour chacune des trois composantes suivant les axes, une expression générale qui dépend des coordonnées relatives de l'une des particules par rapport à l'autre et des coefficients différentiels du premier et du second ordre, par rapport au temps, des coordonnées des deux particules ; il y fait entrer provisoirement tous les termes possibles jusqu'au second ordre inclusivement, en entendant par là tous ceux qui proviennent d'une double différentiation par rapport au temps, et qui renferment comme facteurs ou un coefficient différentiel du second ordre, ou deux coefficients différentiels du premier ordre.

Cette expression se simplifie déjà beaucoup en choisissant pour axes de coordonnées la droite qui joint les points où se trouvent les particules d'électricité au temps t (nous l'appellerons *axe des l*), et deux autres axes perpendiculaires au premier, mais arbitraires (*axes des m et des n*). La distance des deux points est représentée par r, et nous supposons les deux masses électriques égales à l'unité.

L'expression cherchée doit d'abord renfermer un terme indépendant des mouve-

ments des particules, et qui représente la force électrostatique. Ce terme est parfaitement connu : c'est $\frac{1}{r^2}$.

Parmi les autres, les termes en $\frac{dm}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{d^2m}{dt^2}$, $\frac{d^2n}{dt^2}$, $\frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt}$, $\frac{dl}{dt}\frac{dn}{dt}$, $\frac{dm}{dt}\frac{dn}{dt}$, $\frac{dm'}{dt}$, $\frac{dn'}{dt}$, $\frac{d^2m'}{dt^2}$, $\frac{d^2n'}{dt^2}$, $\frac{dl'}{dt}\frac{dm'}{dt}$, $\frac{dl'}{dt}\frac{dn'}{dt}$, $\frac{dm'}{dt}\frac{dn'}{dt}$, $\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt}$, $\frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}$, $\frac{dl}{dt}\frac{dn'}{dt}$, $\frac{dl'}{dt}\frac{dn}{dt}$, $\frac{dm}{dt}\frac{dn'}{dt}$, $\frac{dm'}{dt}\frac{dn}{dt}$ ont un coefficient nul ; car ils changent de signe avec l'une des coordonnées m, n, m', n', et il n'y a pas de raison pour qu'un mouvement suivant l'axe de m, par exemple, produise, par rapport à la force développée suivant l'axe des l ou des n, un effet différent lorsqu'il l'exécute vers les m positifs ou les m négatifs.

Comme, d'autre part, rien ne distingue l'axe des m de l'axe des n, le nombre des coefficients distincts diminue encore, car il faut attribuer un même coefficient aux termes en $\left(\frac{dm}{dt}\right)^2$ et $\left(\frac{dn}{dt}\right)^2$, $\left(\frac{dm'}{dt}\right)^2$ et $\left(\frac{dn'}{dt}\right)^2$, $\frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt}$ et $\frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt}$.

En résumé, les trois composantes L, M, N de la force seront de la forme

$$L = \frac{1}{r^2} + L_1 + L_2 + L_3,$$
$$M = M_1 + M_2 + M_3,$$
$$N = N_1 + N_2 + N_3,$$

avec

$$L_1 = A\frac{dl}{dt} + A_1\frac{d^2l}{dt^2} + A_2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2,$$
$$L_2 = A_4\frac{dl'}{dt} + A_5\frac{d^2l'}{dt^2} + A_6\left(\frac{dl'}{dt}\right)^2 + A_7 v'^2,$$
$$L_3 = A_8\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 vv'\cos\varepsilon,$$
$$M_1 = B\frac{dm}{dt} + B_1\frac{d^2m}{dt^2} + B_2\frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt},$$
$$M_2 = B_3\frac{dm'}{dt} + B_4\frac{d^2m'}{dt^2} + B_5\frac{dl'}{dt}\frac{dm'}{dt},$$
$$M_3 = B_6\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt} + B_7\frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt},$$
$$N_1 = B\frac{dn}{dt} + B_1\frac{d^2n}{dt^2} + B_2\frac{dl}{dt}\frac{dn}{dt},$$
$$N_2 = B_3\frac{dn'}{dt} + B_4\frac{d^2n'}{dt^2} + B_5\frac{dl'}{dt}\frac{dn'}{dt},$$
$$N_3 = B_6\frac{dl}{dt}\frac{dn'}{dt} + B_7\frac{dl'}{dt}\frac{dn'}{dt};$$

v et v' sont les vitesses des particules e, e' ; ε l'angle de leurs directions. Les coefficients A, A_1, ..., B, B_1, ... sont des fonctions de r qu'il reste à déterminer.

Après avoir exprimé les composantes X, Y, Z de la force dans un système quelconque de coordonnées, M. Clausius a recours, pour la détermination des fonctions inconnues, à l'application de diverses propositions expérimentales, dont la première est qu'*un courant quelconque fermé et constant, circulant dans un conduc-*

teur fixe, n'exerce aucune force motrice sur l'électricité au repos et réciproquement. Les autres propositions dont il fait usage se rapportent à l'action de deux courants fermés, laquelle doit s'opérer conformément à la loi d'Ampère et aux lois de l'induction, telles qu'elles ont été établies par Neumann. En dernier lieu, il applique le principe de la conservation de l'énergie.

M. Clausius parvient ainsi à exprimer les composantes X, Y, Z de la force exercée par la particule e' sur la particule e avec une seule fonction inconnue de r, qu'il représente par R. Il trouve

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} X = &-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left[1+\frac{k}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right]-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)\\ &+\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2R}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{dR}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\right];\end{aligned}\right.$$

ds et ds' sont les deux éléments de trajectoire correspondants aux particules e et e' pendant le temps dt; Y et Z ont des expressions analogues. Quant à l'action exercée par la particule e sur la particule e', on trouve les composantes X′, Y′, Z′ en permutant les lettres accentuées et non accentuées dans les expressions de X, Y et Z.

Le travail effectué par les forces pendant le temps dt est

$$\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}+X'\frac{dx'}{dt}+Y'\frac{dy'}{dt}+Z'\frac{dz'}{dt}\right)dt.$$

Cette quantité doit, d'après le principe de la conservation de l'énergie, être la différentielle totale d'une autre quantité W qui dépend des positions actuelles et de l'état de mouvement des particules. On trouve

$$(4)\qquad W=-\left\{\frac{1}{r}-\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right\}.$$

Bien entendu, W, X, Y, Z, X′, Y′, Z′ doivent être multipliés par le produit ee' des masses électriques agissantes, quand on suppose celles-ci différentes de l'unité.

Par la considération des forces électrostatiques, on sait que la quantité dont la différentielle négative représente le travail s'appelle le *potentiel* des deux particules électriques l'une sur l'autre. Par analogie, M. Clausius considère l'expression ci-dessus, abstraction faite du signe —, comme un potentiel. Le premier terme

$$(5)\qquad U=\frac{ee'}{r}$$

est le *potentiel électrostatique;* le reste

$$(6)\qquad V=-ee'\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

reçoit le nom de *potentiel électrodynamique.* Son expression est beaucoup plus simple que celle des composantes de la force.

L'expression de V que l'on vient d'écrire est la seule possible dans l'hypothèse d'une seule électricité en mouvement dans un conducteur solide. La fonction R qu'elle renferme ne peut pas se déterminer au moyen des courants fermés, et, par suite, on ne peut, dans l'état actuel de la Science, énoncer à son sujet que des probabilités.

Par exemple, si l'on admet que la force doit être une fonction simple de la distance, on est conduit à poser

$$R = k_1 r,$$

k_1 étant une constante. Les valeurs de V, X, Y, Z, X', Y', Z' sont les plus simples possibles quand on fait $k_1 = 0$, c'est-à-dire $R = 0$.

L'expression du potentiel électrodynamique est particulièrement propre à la comparaison des différentes formules fondamentales de l'Électrodynamique proposées jusqu'à ce jour (à l'exception de celle de Gauss, qui ne satisfait pas au principe de la conservation de l'énergie) : d'après Weber,

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2;$$

d'après Riemann,

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right];$$

enfin, d'après l'auteur,

$$V = -ee'\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

ou, si l'on suppose $R = 0$,

$$V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

M. Clausius termine son Mémoire en cherchant quelle doit être, dans sa théorie, l'action réciproque de deux éléments de courant. Pour obtenir la composante de cette action suivant l'axe des x, on devra chercher successivement les composantes de l'action de $h\,ds$ sur $h'ds'$ et sur $-h'ds'$, et de celle de $-h\,ds$ sur $h'ds'$ et $-h'ds'$, en considérant les quantités d'électricité positive $h\,ds$ et $h'ds'$ comme en mouvement, et les quantités d'électricité négative $-h\,ds$ et $-h'ds'$ comme en repos; on fera enfin la somme algébrique de ces quatre expressions. En représentant par i et i' les intensités des deux courants $\left(i = \frac{h\,ds}{dt},\ i' = \frac{h'ds'}{dt}\right)$, on trouve définitivement, et dans l'hypothèse la plus générale à laquelle se rapporte la formule (6),

$$kii'\,ds\,ds'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\varepsilon-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{dx'}{ds'}\right). \tag{7}$$

Cette expression ne contient plus la fonction indéterminée R; elle est entièrement déterminée, et c'est la seule compatible avec l'hypothèse d'une seule électricité en mouvement dans les conducteurs. E. B.

Villarceau (Y.). — Sur le développement en séries des racines réelles des équations. (119-124).

a étant une valeur approchée d'une racine réelle de l'équation

$$f(x) = 0,$$

et la dérivée $f'(x)$ du premier membre étant supposée ne pas devenir très-petite dans le voisinage de cette racine, M. Villarceau cherche à mettre cette dernière

sous la forme d'une série infinie telle que

$$x = a - A_1 \frac{f(a)}{1} + A_2 \frac{[f(a)]^2}{1.2} - A_3 \frac{[f(a)]^3}{1.2.3} + \ldots$$

Cette série restant convergente lorsque a reste compris entre certaines limites, l'identité

$$\frac{dx}{da} = 0$$

le conduit à la détermination des coefficients A et, en posant

$$\alpha_1 = 1 : \frac{df}{da}, \quad \alpha_2 = \frac{d^2f}{da^2} : \left(\frac{df}{da}\right)^2, \quad \alpha_3 = \frac{d^3f}{da^3} : \left(\frac{df}{da}\right)^3, \quad \ldots,$$

il trouve

$$x = a - \alpha_1 \frac{f(a)}{1} - \alpha_1\alpha_2 \frac{[f(a)]^2}{1.2} + \alpha_1(a_3 - 3\alpha_2^2)\frac{[f(a)]^3}{1.2.3}$$
$$- \alpha_1(\alpha_4 - 10\alpha_2\alpha_3 + 15\alpha_2^3)\frac{[f(a)]^4}{1.2.3.4}$$
$$+ \alpha_1(\alpha_5 - 15\alpha_4\alpha_2 + 105\alpha_3 a_2^2 - 105\alpha_2^4 - 10\alpha_3^2)\frac{[f(a)]^5}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

formule qu'il applique à deux exemples.

Fuchs (L.). — Sur les équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques. Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite. (125-140).

L'auteur se propose, en général, de déterminer les coefficients de l'équation différentielle

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_0 y = 0,$$

de façon qu'elle soit vérifiée par un système fondamental d'intégrales uniformes $y_1, y_2, \ldots, y_m$, telles que, en posant

$$y_i = f_i(x),$$

on ait

$$\left.\begin{aligned} f_i(x+2K) &= \mu_i f_i(x) \\ f_i(x+2iK') &= \mu'_i f_i(x) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

On reconnaît de suite que ces coefficients sont des fonctions uniformes, doublement périodiques, et ne devenant infinies que de manière que leurs valeurs réciproques soient continues. Étudiant en particulier le cas d'une équation du second ordre, M. Fuchs montre qu'on peut se borner à étudier le cas où l'équation est de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Py.$$

Si l'on veut que cette équation admette une intégrale ayant les propriétés indiquées, il faut et il suffit que le coefficient P soit de la forme

$$P = \varepsilon + \sum_i A_i D_x \log H(x - a_i) + B_i D_x^2 \log H(x - a_i),$$

ε étant une constante, et les coefficients A_i, B_i, constants eux-mêmes, étant des fonctions déterminées des valeurs a_i des zéros et des infinis de l'intégrale et de leurs ordres de multiplicité. Si l'on suppose que la fonction P ne devienne infinie dans le parallélogramme des périodes que pour la valeur $x = 2iK'$, on obtient l'équation de Lamé sous la forme que M. Hermite lui a donnée (*Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 680),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2\sin^2\mathrm{am}\,x + h]y,$$

et la valeur donnée en général par l'auteur pour l'intégrale de l'équation du second ordre devient ici

$$y_1 = \frac{e^{\delta x + \delta'}\,\mathrm{H}(x - a_1^1)\,\mathrm{H}(x - a_2^1)\ldots\mathrm{H}(x - a_n^1)}{\Theta(x)},$$

où les quantités a_1^1, a_2^1, ... dépendent essentiellement de la valeur de h.

Pour le cas spécial, traité par M. Hermite, où l'équation de Lamé a la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2k^2\sin^2\mathrm{am}\,x + k^2\sin^2\mathrm{am}\,a - 1 - k^2)y,$$

on trouve

$$y_1 = \frac{\mathrm{H}(x-a)}{\Theta(x)}\,e^{x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}.$$

Quant à la seconde intégrale

$$y_2 = y_1\int\frac{dx}{y_1^2},$$

elle est

$$y_2 = \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}\,e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

pourvu que a ne soit pas de la forme

$$a = mk + nik' \quad (m, n \text{ entiers});$$

dans ces cas d'exception, y_1 se présente sous la forme $\sin\mathrm{am}\,x$, $\cos\mathrm{am}\,x$ ou $\Delta\,\mathrm{am}\,x$, et la valeur de y s'obtient aisément en effectuant l'intégration.

M. Fuchs fait suivre sa Lettre d'un résumé rapide des recherches qu'il a faites depuis qu'elle a été envoyée à M. Hermite, recherches publiées dans les *Nouvelles de la Société Royale de Gœttingue* (15 décembre 1877). Les équations différentielles qui servent de base à la théorie des fonctions de Lamé d'ordre supérieur, introduites par M. Heine, sont des cas particuliers d'une classe d'équations différentielles du second ordre étudiées par M. Fuchs dans le *Journal de Crelle* (t. LXXXI, p. 116-118), et intégrées par lui au moyen des intégrales abéliennes. Partant des résultats obtenus dans ce Mémoire, il donne les conditions pour que l'équation

$$\mathrm{R}(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{R}'(z)\frac{du}{dz} + \mathrm{H}(z)\,u = 0,$$

où $\mathrm{R}(z)$, $\mathrm{H}(z)$ sont des fonctions entières de degrés m et $m-2$, ait une intégrale de la forme

$$u = \mathrm{G}\,e^{\frac{1}{2}\sqrt{-c}\int\frac{dz}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{R}}}},$$

G étant une fonction entière et λ une constante. Ces conditions étant supposées remplies, M. Fuchs détermine la fonction G, et trouve ainsi un système fondamental d'intégrales; il se restreint ensuite au cas où l'équation est de la forme

$$R(z)\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{2}R'(z)\frac{dz}{du}-[n(n+1)k^2z^2+h]u=0,$$

où

$$R(z)=\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}.$$

Cette équation se déduit de celle de Lamé, en y faisant

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt{R(z)}.$$

Il parvient ainsi aux intégrales de l'équation de Lamé, et la même méthode lui fournit sans difficulté les cas d'exception.

Fiedler. — Géométrie et Géomécanique. Aperçu des faits qui montrent la connexion de ces sciences dans l'état présent de leur développement. (141-176).

Cette Notice a été le texte d'une leçon semestrale faite, en 1876, aux élèves de la 6e section de l'École Polytechnique Fédérale. Après avoir résumé les travaux de M. Mannheim, l'auteur expose rapidement la nouvelle conception de la Cinématique et de la Dynamique qui a son origine dans les recherches de Plücker et qui a été developpée par M. Klein et spécialement par M. Ball.

On sait, depuis Poinsot, que tout système de forces (*torseur*) peut être d'une seule manière mis sous une forme canonique, c'est-à-dire réduit à une force unique et à un couple agissant dans un plan normal à cette forme. Six quantités déterminent complétement ce torseur, à savoir : quatre grandeurs qui déterminent la ligne d'action de la force unique, un paramètre linéaire p; la *flèche*, qui exprime le quotient du moment du couple par la force unique; ces cinq quantités déterminent le complexe linéaire, ou la *vis* qui, comme l'on sait, correspond au torseur; enfin l'intensité α'' de la force. Tout mouvement d'un système solide, ramené aussi à la forme canonique d'un mouvement hélicoïdal, toute *torsion* est déterminée par six quantités analogues, dont quatre pour la direction de l'axe du mouvement, ou du complexe linéaire correspondant dont la cinquième, la *flèche*, ou paramètre linéaire du complexe, est la grandeur de la translation suivant l'axe qui correspond à la rotation de l'angle unité, et dont la sixième est l'amplitude de la rotation. Si l'on considère un torseur de flèche p_2, d'intensité α_2, et une torsion de flèche p_1, d'amplitude α''_1, le travail résultant sera

$$\alpha'_1\,\alpha''_2\,\omega_{12},\quad \text{où}\quad \omega_{12}=(p_1+p_2)\cos\lambda-d\sin\lambda,$$

d désignant la plus courte distance et λ l'angle des axes des deux vis; lorsque ce travail est nul, les deux vis sont réciproques.

On trouve la condition pour qu'un corps solide soit en équilibre sous l'influence de trois torseurs, en écrivant qu'en leur adjoignant une torsion quelconque la somme des trois travaux résultants est nulle; de même on trouvera la condition pour que trois torsions se détruisent. On est ainsi conduit à la solution du problème de la composition de deux torseurs ou de deux torsions; cette composition s'effectue au moyen d'une surface réglée du troisième degré, introduite par Plücker, qui est lieu

des axes des complexes compris dans le faisceau déterminé par les deux complexes qui correspondent aux deux torseurs ou aux deux torsions; l'axe de la vis résultante est situé sur cette surface, nommée *cylindroïde* par M. Cayley; sa flèche et son intensité s'obtiennent par des règles simples.

On reconnait aisément que toute vis réciproque à deux vis données est réciproque à toutes les vis du cylindroïde qu'elles déterminent et peut être dite réciproque à ce cylindroïde; les axes des vis réciproques à un cylindroïde et passant par un point donné forment un cône du second degré, lieu des perpendiculaires abaissées de ce point sur les génératrices du cylindroïde, en sorte que les axes de toutes les vis réciproques à un cylindroïde forment un complexe du deuxième degré; on conclut de là que les vis d'un cylindroïde sont réciproques à quatre vis prises à volonté et qu'à cinq vis arbitrairement choisies il n'existe qu'une seule réciproque.

Cette étude permet d'instituer le système de coordonnées le mieux approprié à ces recherches. Un torseur ou une torsion peut être décomposée suivant six vis données; les formules se simplifient singulièrement en choisissant ces six vis fondamentales de façon qu'elles soient, deux à deux, réciproques entre elles; elles forment alors un *système de coréciprocales*.

M. Fiedler montre ensuite comment on peut introduire les *masses* dans les mouvements et les systèmes de forces qui les produisent, comment les axes d'inertie principaux, considérés comme des vis et affectés des flèches $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, égales aux demi-axes de l'ellipsoïde central, forment un système coréciprocal et peuvent ainsi être appelées les *six vis d'inertie principales du système*. Il parvient ensuite à la notion des vis matériellement conjuguées, des vis d'inertie principales d'un système gêné dans son mouvement, et termine en établissant les *équations différentielles générales de la dynamique des systèmes invariables*.

Romilly (*W. de*). — Note sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x}\frac{dV}{dx} + V = 0.$$

L'auteur considère l'intégrale

$$\theta(x,\mu) = \int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\sin^\mu\omega\, d\omega$$

et celles qui s'en déduisent en remplaçant d'abord $\cos(x\cos\omega)$ par $\sin(x\sin\omega)$, puis en remplaçant dans $\theta(x,\mu)$ et dans l'intégrale obtenue comme on vient de le dire $\sin^\mu\omega$ par $\cos^\mu\omega$. Une quelconque de ces intégrales est connue lorsque l'on connaît sa valeur pour $\mu = 0, 1, 2, 3$. On voit ensuite que, si $V(x,\mu)$ est l'une quelconque d'entre elles, elle satisfera à l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x}\frac{dV}{dx} + V = 0,$$

pourvu que $V(x,0)$, $V(x,1)$ satisfassent à cette équation; on déduit de là que $\theta(x,\mu)$ est une intégrale, quel que soit μ, ce qui, dans quelques cas, permet d'obtenir l'intégrale générale.

Molins (*H.*). — Sur de nouvelles classes de courbes algébriques gauches dont les arcs représentent exactement la fonction elliptique de première espèce à module quelconque. (187-213).

Soit Σ une courbe dont les coordonnées rectangulaires d'un point s'expriment au moyen de l'indéterminée ζ par les formules

$$x = a\cos(p+1)\zeta + b\cos(p-1)\zeta,$$
$$y = a\sin(p+1)\zeta + b\sin(p-1)\zeta,$$
$$z = c\sin\zeta,$$

où p est un nombre commensurable, en sorte que la courbe Σ soit algébrique. et où a, b, c sont des constantes liées par la relation

$$\frac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2} = \frac{4ab-c^2}{(a+b)^2};$$

si l'on prend la transformée Σ' par rayons vecteurs réciproques de la courbe Σ, l'origine étant le pôle de transformation et λ^2 le module de la transformation, la différentielle de l'arc de Σ' sera

$$ds' = \frac{\lambda^2\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}}{(a+b)^2}\,\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}\sin^2\zeta}}.$$

M. Molins montre ensuite qu'on peut toujours disposer des trois constantes a, b, p, dont la dernière est commensurable, de façon que la valeur de c tirée de la relation précédemment posée soit réelle et pour que $\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}$ soit positif et moindre que l'unité. Dans ces conditions, la courbe Σ' répondra évidemment au problème posé. L'auteur donne ensuite plusieurs applications.

Laguerre. — Sur les courbes de troisième classe. (213-224).

Ce travail peut être regardé comme une application du Mémoire de l'auteur *Sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique* (¹) (*Journal de Mathématiques*, 3ᵉ série. t. I). Partant de l'*équation mixte* d'une courbe de troisième classe mise sous forme canonique, il introduit les équations mixtes de la hessienne et de la cayleyenne de cette courbe, étudie le faisceau tangentiel de la courbe et de sa hessienne, le faisceau ponctuel de la même courbe et de sa cayleyenne, et obtient divers théorèmes relatifs à ces éléments géométriques et aux polaires du premier et du second ordre d'une droite ou d'un point.

Laurent (H.). — Sur le calcul inverse des intégrales définies. (225-246).

Le problème principal que traite M. Laurent consiste à trouver une fonction $\varphi(x)$ telle que l'on ait

$$\int_a^b \varphi(x)dx = 0,\quad \int_a^b x\varphi(x)dx = 0,\quad \ldots,\quad \int_a^b x^{n-1}\varphi(x)dx = 0,$$

ou une fonction qui satisfasse aux équations qui se déduisent des précédentes en

---

(¹) Voir *Bulletin*, III, 379; IX, 124.

remplaçant les seconds membres nuls par des constantes; dans le premier cas, l'auteur trouve

$$\varphi(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)],$$

$\psi(x)$ désignant une fonction qui n'est pas infinie pour $x=a$ ou pour $x=b$. Le cas où $\psi(x)$ se réduit à une constante conduit aux fonctions X_n de Legendre, ou plutôt à des polynômes qui s'en déduisent par un changement de variable. La fonction

$$\varphi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s}]$$

constitue, lorsque r et s sont positifs, une solution du problème; laissant cette restriction de côté, l'auteur conclut de l'étude de cette fonction que l'intégrale définie

$$\varphi_n = \int_a^b (z-a)^{n+r}(z-b)^{n+s}(z-x)^{-n-1}dz$$

satisfait à l'équation linéaire

$$\frac{d^2V}{dx^2}(x-a)(x-b) + \frac{dV}{dx}[(2-r-s)x + b(r-1) + a(s-1)] - (n+1)(n+r+s)V = 0.$$

Laguerre. — Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux. (247-256).

I. Soient un point M situé sur une surface du second ordre, MT et MT′ les tangentes aux deux lignes de courbure qui se croisent en ce point. Par la droite MT′ et le centre de la surface menons un plan P, puis, au point où la normale élevée en M rencontre un des plans de symétrie de la surface, un plan perpendiculaire à cette normale. Ce plan coupe le plan P suivant une droite; par cette droite, menons un plan perpendiculaire au plan de symétrie considéré. Ce dernier plan rencontre la normale au centre de courbure de la section normale de la surface qui est tangente à la droite MT.

II. La normale menée en un point M d'une surface du second ordre rencontre les plans principaux de cette surface en trois points. Menons respectivement par ces points trois droites (D) perpendiculaires aux plans principaux; elles déterminent un hyperboloïde.

Cela posé, on peut construire deux génératrices de cet hyperboloïde appartenant au même système que les droites (D) et perpendiculaires au diamètre passant par le point M. Ces génératrices rencontrent la normale aux deux centres de courbure principaux de la surface relatifs au point M, et les plans menés par le diamètre, perpendiculairement à ces deux génératrices, coupent le plan tangent en M, suivant les axes de l'indicatrice.

Villié. — Sur l'équilibre relatif d'une masse fluide soumise à l'action de corps quelconques. (257-264).

Weill. — Sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux cercles. (265-304).

L'auteur considère une ligne polygonale A qui peut se mouvoir en restant à la fois inscrite à une circonférence O′ et circonscrite à une circonférence O, ainsi que la ligne polygonale correspondante α formée en joignant les points de contact des côtés consécutifs de la ligne A ; il montre que le centre des moyennes distances de m sommets consécutifs de la ligne α décrit une circonférence fixe pendant le déplacement de cette ligne ; si la ligne polygonale α se ferme une seule fois, elle se fermera toujours, et le centre des moyennes distances des sommets du polygone fermé α restera fixe pendant le déplacement de ce polygone. Cherchant ensuite le rayon de la circonférence sur laquelle se trouvent les centres des moyennes distances de n sommets consécutifs de la ligne α, M. Weill parvient à trouver la condition pour qu'un polygone d'un nombre donné de côtés soit inscrit et circonscrit à deux cercles ; il applique sa méthode aux polygones de trois, quatre, cinq, six, sept côtés, et montre en outre qu'on peut, avec la règle et le compas, passer d'un polygone de p côtés inscrit et circonscrit à deux cercles à un polygone de $2p$ côtés inscrit et circonscrit à deux cercles.

Il donne ensuite un assez grand nombre de propriétés des lignes polygonales et des polygones fermés A et α, dont voici quelques-unes : la surface d'un polygone A reste, pendant le déplacement, proportionnelle à celle du polygone α correspondant ; dans une ligne α qui se déplace, les centres des hyperboles équilatères passant par quatre sommets consécutifs décrivent une circonférence ; dans un tel polygone, la somme des carrés des côtés est constante, ainsi que la somme des carrés des droites qui joignent les sommets de p en p ; dans un polygone A, la somme des cosinus des angles formés par deux côtés pris de p en p reste constante ; la somme des cosinus des angles que font tous les côtés d'un polygone A avec une direction fixe reste constante pendant le déplacement de ce polygone ; quand un polygone de $2m$ côtés se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques, les côtés opposés se rencontrent en m points qui restent sur une droite fixe ; les droites qui joignent les sommets opposés passent par un même point qui reste fixe, etc.

Villarceau (Y.). — Origine géométrique et représentation géométrique des fonctions elliptiques, abéliennes, et de transcendantes d'ordres supérieurs. (305-314).

La courbe de degré $2m$

$$(x^2+b^2y^2)(x^2+b'^2y^2)(x^2+b''^2y^2)\ldots = a^{2m}$$

est une ovale fermée symétrique par rapport aux axes ; si l'on prend pour argument u le rapport de l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe et un rayon vecteur faisant avec l'axe des x l'angle φ, si en outre on pose

$$\Delta^2 = (\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(\cos^2\varphi + b'^2\sin^2\varphi)\ldots,$$

on aura

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta};$$

en posant

$$\varphi = \operatorname{am} u,$$

on aura, en désignant par r le rayon vecteur,

$$\frac{x}{r} = \cos \operatorname{am} u, \quad \frac{y}{r} = \sin \operatorname{am} u, \quad \frac{a^2}{r} = \Delta \operatorname{am} u,$$

en sorte que la courbe pourra servir à représenter les quatre transcendantes am u, cos am u, sin am u, Δ am u, définies comme précédemment. Dans le cas d'une courbe du second degré, on a affaire aux fonctions circulaires; la courbe

$$(x^2+y^2)(x^2+b^2y^2) = a^4$$

fournira la représentation géométrique des fonctions elliptiques.

Collet (*J.*). — Note sur le contact géométrique des courbes et des surfaces. (315-329).

Supposons deux lieux géométriques, lignes ou surfaces, se touchant en un point, et imaginons qu'une droite variable rencontre constamment les deux lieux en se mouvant suivant une loi quelconque, telle cependant que la droite ne soit pas tangente à l'un des deux lieux lorsqu'elle passe par leur point commun. Lorsqu'elle sera infiniment voisine de ce point, elle déterminera dans les deux lieux deux points infiniment voisins. M. Collet montre que l'ordre infinitésimal de la distance de ces deux points est indépendant de la loi du mouvement de la droite, et qu'il est l'ordre le plus élevé que l'on puisse obtenir pour la distance de deux points des deux lieux infiniment voisins de leur point commun. *Cet ordre, diminué d'une unité, sera celui du contact géométrique des deux lieux.* Considérant ensuite successivement deux courbes, deux surfaces, une courbe et une surface, l'auteur, pour chacun de ces cas, donne l'expression analytique des conditions d'un contact d'ordre quelconque.

Boussinesq (*J.*). — Complément à une étude intitulée « Essai sur la théorie des eaux courantes », publiée dans les Tomes XXIII, XXIV du *Recueil des Savants étrangers*, et à un Mémoire « Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides », inséré au Tome XIII du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, 1868. (335-376).

§ Ier. — Du régime graduellement varié dans un écoulement bien régulier ou non tourbillonnant.

§ II. — Influence du frottement extérieur sur les coefficients d'extinction des ondes, périodiques ou non périodiques, quand les mouvements sont bien continus.

§ III. — Complément au § XIV de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* : Des pertes de charge qui se produisent dans l'écoulement d'un liquide quand la section vive du fluide éprouve un accroissement brusque.

§ IV. — Modification à introduire dans une Note complémentaire du Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides.

Darboux (*G.*). — Sur l'approximation des fonctions de très-grands

nombres et sur une classe étendue de développements en série. Deuxième Partie. (377-401).

Dans la deuxième Partie du Mémoire, l'auteur reprend l'étude des polynômes de la série hypergéométrique. Il en fait connaître diverses impressions, indique diverses relations entre les polynômes consécutifs, leurs dérivées et leurs intégrales, et il aborde ensuite son objet principal, qui est l'étude d'une classe de développements en série de ceux qui sont ordonnés suivant les polynômes

$$X_n = F(-n, \alpha + n, \gamma, x),$$

où n reçoit toutes les valeurs entières positives. Il indique d'abord comment on déterminera d'une manière commode les coefficients de ces polynômes et montre que cette détermination peut toujours être ramenée à celle du développement d'une certaine intégrale suivant les puissances d'une autre variable ; puis il indique comment, la série étant déterminée, on en reconnaîtra la convergence et l'on en déterminera la somme.

L'auteur, après avoir traité cette première question, étudie le cas où la variable x, qu'on a d'abord supposée réelle et comprise entre zéro et 1, prend des valeurs quelconques réelles ou imaginaires. Il montre que les régions de convergence sont toujours limitées par des ellipses homofocales absolument comme on le savait déjà pour les fonctions de Legendre. En imitant une méthode donnée par M. Neumann pour les polynômes de Legendre, il introduit la considération de fonctions de deuxième espèce définies par l'équation

$$Q_n = \int_0^1 \frac{X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx}{x-y},$$

et il montre que toute fonction uniforme dans la région annulaire comprise entre deux ellipses homofocales sera développable en une série contenant généralement les fonctions des deux espèces.

L'auteur termine son Mémoire en indiquant avec précision ce qui peut être généralisé dans la méthode qu'il a employée, et comment on pourra appliquer cette méthode à tous les développements en série ordonnés suivant des fonctions quelconques formant une suite de Sturm.

Joukovski (*N.*). — Sur la percussion des corps. (417-424).

L'auteur montre que la question la plus générale de percussion de deux corps libres, quel que soit leur degré d'élasticité, peut être ramenée à la percussion de deux points massifs. Nous ferons remarquer que tous les résultats de l'auteur ont déjà été obtenus, et par une voie plus géométrique, par M. Darboux, dans plusieurs articles sur le choc des corps, insérés aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

Joukovski. — Sur un cas particulier du mouvement d'un point matériel. (425-428).

L'auteur donne une méthode pour trouver des intégrales particulières des équations du mouvement d'un point matériel dans un plan, quand les lignes de niveau sont des lignes isothermiques.

VIERTELJAHRSSCHRIFT der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von den Schriftführern der Gesellschaft, E. Schoenfeld und A. Winnecke. — Leipzig. In-8° (¹).

Tome XI; 1876.

Notice nécrologique sur *Heinrich-Louis d'Arrest*. (1-14).

D'Arrest, né à Berlin le 13 août 1822, est mort à Copenhague le 14 juin 1875. Dans la Notice qu'il lui consacre, M. J. Dreyer raconte sa vie scientifique et analyse rapidement ses principaux travaux.

Notice nécrologique sur *Christian-Theodor Schmidel*. (14).

Schmidel, né à Dornreichenbach (Saxe) le 3 décembre 1795, est mort à Zehmen le 20 juin 1875; il laisse quelques observations de comètes et quelques observations magnétiques ou météorologiques faites en majeure partie dans son observatoire particulier de Zehmen.

* *Plantamour* (*E.*). — 1° Expériences faites à Genève avec le pendule à réversion. Genève, 1866. In-4°, 108 p. — 2° Nouvelles expériences faites avec le pendule à réversion, et détermination de la pesanteur à Genève et au Righi-Kulm. Genève, 1872. In-4°, 88 p. (15-33). [Helmert.]

* *Peters* (*C.-F.-W.*). — *Beobachtungen*.... Observations faites à Königsberg et à Güldenstein avec le pendule de Bessel. Hambourg, 1874. In-4°, 151 p. (33-60). [Helmert.]

* *Herschel* (*J.-F.-W.*). — *A Catalogue*.... Catalogue de 10300 étoiles doubles ou multiples, arrangé par feu Herschel et publié par MM. R. Main et C. Pritchard. Extrait du Tome XL des Mémoires de la Société Astronomique de Londres. Londres, 1874. (61-65). [O. Struve.]

* Report *of the*.... Rapport du Comité des Tables mathématiques. Londres, 1873. In-8°, 175 p. — Extrait du Rapport de l'Association Britannique pour l'avancement des Sciences pour l'année 1873. (65-72). [A. Winnecke.]

(¹) Voir *Bulletin*, I₂, 149. — Les articles marqués d'un astérisque sont des analyses bibliographiques.

Schultz (*H.*). — Y a-t-il avantage réel à abandonner la notation d'Herschel et à décrire les nébuleuses par des chiffres? Quel compte doit-on tenir de l'équation personnelle dans les observations de nébuleuses? (73-77).

Anonyme. — Note sur la visibilité du disque entier de Vénus au voisinage de la conjonction. (77-78).

L'auteur cite divers passages des *Mémoires du Collége Romain* où cette visibilité est constatée.

Winnecke (*A.*). — Note sur une averse d'étoiles filantes, observée en l'an 900. (78-79).

D'après la chronique de S. Radbod, évêque d'Utrecht, l'averse aurait eu lieu le 3 décembre.

Notice nécrologique sur *Augustin Reslhuber*, par M. Schoenfeld. (82-88).

Reslhuber, né à Saass le 5 juillet 1808, est mort à Kremsmünster le 29 septembre 1875. Nommé adjoint à l'Observatoire de Vienne en 1834, il a dirigé l'Observatoire de Kremsmünster de 1836 à 1875.

* *Fergola* (*E.*). — *Sulla posizione*.... Sur la position de l'axe de rotation de la Terre par rapport à son axe de figure. Naples, 1874. In-4°, 32 p. (94-103). [Helmert.]

* *Friesach* (*K.*). — *Theorie der Planetenvorübergänge*.... Théorie des passages d'une planète devant le Soleil. Leipzig, 1874. In-8° de 73 p. avec 21 figures et 4 planches lithographiques. (103-113). [Bruhns.]

* *Gyldén* (*H.*). — *Framställning*.... Éléments d'Astronomie exposés d'après l'ordre historique. Stockholm, 1874. In-8°, 292 p. (113-116).

* *Hansen* (*P.-A.*). — 1° *Untersuchung*.... Recherches sur la marche d'un rayon de lumière à travers plusieurs surfaces sphériques réfringentes. In-8°, 202 p. Extrait du Tome X des Mémoires de l'Académie de Berlin. — 2° *Dioptrische*.... Recherches dioptriques sur la dispersion des rayons colorés et les aberrations de sphéricité. In-8°, 88 p. Extrait du Tome X des Mémoires de l'Académie de Berlin. (116-127). [H. Seeliger.]

* *Plantamour, Wolf et Hirsch.* — 1° Détermination télégra-

phique de la différence de longitude entre la station du Righi-Kulm et les observatoires de Zurich et de Neuchâtel. Genève, 1871. In-4°, 222 p. — 2° Détermination télégraphique de la différence de longitude entre les stations suisses de Weissenstein, Neuchâtel et Berne. Genève, 1872. In-4°, 162 p. (127-147). [Dr W. Schur.]

* *Khandrikof (M.).* — *System....* Système d'Astronomie. Kief, 1875. 3 vol. in-8°. (147-156). [K. Knorre.]

* *Newcomb (S.).* — *On the right ascensions....* Mémoire sur les ascensions droites des étoiles équatoriales fondamentales et sur les corrections nécessaires pour réduire les ascensions droites des différents Catalogues à un système moyen homogène. Washington, 1872. In-4°, 73 p. Extrait des observations de Washington pour 1870. (158-174). [A. Wagner.]

* *Gyldén (H.).* — *Forteckening....* Mémoire sur la détermination des ascensions droites de 103 étoiles fondamentales. Stockholm, 1874. Extrait des Mémoires de l'Académie. (174-176). [A. Wagner.]

* *Rogers.* — *On the....* Note sur les erreurs périodiques des ascensions droites observées de 1858 à 1871. Boston, 1874. Extrait du Tome I des *Proceedings of the American Academy* (176-178). [A. Wagner.]

* *First Melbourne....* Premier Catalogue général de 1227 étoiles pour 1870,0, déduit des observations faites à Melbourne, de 1863 à 1870, sous la direction du prof. Ellery. Melbourne, 1874. (178-188). [H. Gyldén.]

* *Hankel (H.).* — *Zur Geschichte....* Notes sur l'histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Leipzig, 1874. In-8°, 410 p. (118-199). [S. Günther.]

* *Gebler (K. von).* — *Galileo Galilei...* Galilée et la Curie romaine, d'après les documents originaux. Stuttgart, 1876. In-8°, xiv-433 p. (200-210). [S. Günther.]

* *Kortazzi.* — *Bestimmung....* Détermination de la différence de longitude entre Poulkova, Helsingfors, Åbo, Lowisa et Wiborg.

Saint-Pétersbourg, 1871. In-4°, 69 p. — *Fuss et Nyrén. Bestimmung....* Détermination de la différence de longitude entre les Observatoires de Stockholm et Helsingfors, d'après les observations de 1870. Saint-Pétersbourg, 1871. In-4°, 36 p. — *Harkness. Report....* Rapport sur la différence de longitude entre Washington et Saint-Louis. Washington, 1872. In-4°, 39 p. — *Fergola* et *Secchi. Sulla differenza....* Sur la différence de longitude entre Rome et Naples, déterminée au moyen des signaux télégraphiques et des observations de passage. Naples, 1871. In-4°, 52 p. (211-220). [W. Schur.]

* *Günther (S.).* — 1° *Ziele und Resultate....* But et résultat des nouvelles recherches sur l'histoire des Mathématiques. Erlangen, 1876. In-8°. — 2° *Vermischte Untersuchungen....* Recherches variées sur l'histoire des Sciences mathématiques. Leipzig, 1876. In-8°. — 3° *Der Einfluss....* Influence mutuelle des corps célestes, d'après leurs rapports de temps. Nürnberg, 1876. In-8°. (221-227). [R. Wolf.]

Struve (O.). — Note sur les séries d'observations proposées pour la comparaison des mesures micrométriques. (227-232).

Après avoir insisté sur l'utilité évidente de voir mesurer les mêmes étoiles doubles par les principaux observateurs de cette classe d'astres, et cela dans le but de déterminer les équations personnelles de chacun d'eux, le savant directeur de l'Observatoire de Poulkova propose une liste de trente étoiles qui lui semblent propres à ce genre d'études.

Société Jablonowski. — Programme des prix pour 1876, 1877 et 1878. (232-234).

Société Danoise des Sciences. — Programme des prix pour 1877. (235-236).

Schoenfeld (E.). — Époque des maxima de lumière des étoiles télescopiques variables comprises entre 80° et — 2° de déclinaison; éphémérides pour 1877. (238-247).

L'éphéméride est donnée pour 77 étoiles.

* *Schiaparelli (G.-V.).* — *Die Vorläufer....* Les précurseurs de Copernic dans l'antiquité. Leipzig, 1876. In-8°, 110 p. (248-257). [S. Günther.]

Le Mémoire original, publié en italien en 1873, dans le troisième Cahier des

publications de l'Observatoire de Milan, a été traduit en allemand par le professeur M. Curtze, et c'est sur cette traduction que l'analyse est faite.

* *Schiaparelli (G.-V.).* — *Le sfere....* Les sphères homocentriques d'Eudoxe de Calippe et d'Aristote. Milan, 1875. In-4°, 62 p. et 4 p. (257-269). [S. Günther.]

Ce Mémoire forme le neuvième Cahier des publications de l'Observatoire de Milan; il a été analysé dans le *Bulletin*.

* *Schönfeld (E.).* — *Astronomische....* Observations astronomiques faites à l'Observatoire de Mannheim. Deuxième Partie. Observations de nébuleuses et d'amas d'étoiles. Karlsruhe, 1875. In-4° de x-95 p. (269-276). [J. Dreyer.]

* *Vogel (H.-C.).* — *Positionsbestimmung....* Observations de la position de nébuleuses et d'amas d'étoiles situées entre + 9°30 et + 15°30′ de déclinaison, avec 2 planches lithographiques. Leipzig, 1876. In-4° de 32 p. (276-280). [J. Dreyer.]

* *Fergola (E.).* — *Dimensioni....* Dimensions de la Terre et recherche de la position relative de son axe de figure et de son axe de rotation. Naples, 1876. In-4° de 26 p. (280-287). [Helmert.]

* *Heis (E.).* — *Zodiakallicht....* Observations de la lumière zodiacale faites dans les vingt-neuf dernières années, de 1847 à 1875. — Première publication de l'Observatoire de Münster. Münster, 1875. In-4° de VI-60 p. (287-296). [Schoenfeld.]

* *Houzeau (J.-C.).* — Résumé de quelques observations astronomiques et météorologiques faites dans la zone surtempérée et entre les tropiques. Extrait du XXVe Volume des *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*. In-8° de 89 p. (296-301). [Schoenfeld.]

* *Jordan (W.).* — *Physische....* Géographie physique et Météorologie du golfe Libyque, d'après des observations faites dans l'hiver 1873-1874 par l'expédition du Dr Rohlf, avec 4 cartes géographiques et 3 planches météorologiques. Cassel, 1876. In-4° de 216 p. (301-313). [W. Schur.]

Tome XII; 1877.

Bruhns. — Catalogues et Notes sur les planètes et les comètes découvertes en 1875. (6-13).

* *Bredikhine* (*Th.*). — Annales de l'Observatoire de Moscou. Vol. I, II. Moscou, 1874, 1875, 1876. In-4°. (14-28). [Engelmann].

* *Schlegel* (*G.*). — Uranographie chinoise, ou Preuves directes que l'Astronomie primitive est originaire de la Chine.... Ouvrage accompagné d'un Atlas céleste chinois et grec. La Haye, 1875. In-4°. Première Partie, xvi-649 p., 1 planche; deuxième Partie, viii-283 p. (28-40). [S. Günther.]

Notes *sur les travaux effectués en* 1876 *dans les principaux Observatoires d'Allemagne.* (41-90).

Les Observatoires sur lesquels leurs directeurs ont envoyé des Notes sont ceux de Bonn, Düsseldorf, Kiel, Leipzig, Lund, Mannheim, Moscou, Stockholm, Strasbourg et Zürich.

Mahn. — Éphéméride pour la recherche de la comète de 1812. (93-98).

La comète découverte par Pons le 20 juillet 1812 a, d'après les recherches d'Encke, une période d'environ soixante-dix ans, en sorte qu'elle doit revenir au périhélie vers 1883; cette période est d'ailleurs mal déterminée et la comète peut être visible bien avant l'époque indiquée. Dans le but de faciliter sa recherche, M. Mahn a, sous la direction de M. Winnecke, calculé, d'après les éléments de Encke, une éphéméride approchée qui s'étend à toute l'année.

* *Dunér* (*N.-C.*). Mesures micrométriques d'étoiles doubles faites à l'Observatoire de Lund, 1876. In-4°. — *Wilson* (*J.-M.*) et *Seabroke* (*G.-M.*). *Catalogue of....* Catalogue de mesures micrométriques d'étoiles doubles faites à l'Observatoire de Temple (Mémoires de la Société Royale Astronomique de Londres, vol. XLII). — *Gledhill* (*J.*). *Measures....* Mesures micrométriques de 484 étoiles doubles faites à l'Observatoire de M. Ed. Grossley (Mémoires de la Société Royale Astronomique de Londres, vol. XLII). (99-111). [O. Struve.]

* *Newcomb* (*S.*). — *Investigation of....* Recherches sur les corrections aux Tables de la Lune de Hansen, et Tables auxiliaires

pour leurs applications. Troisième Partie des Mémoires publiés par la Commission du passage de Vénus. Washington, 1876. (111-115). [Kr.]

L'analyse du Mémoire de M. Newcomb est suivie d'une éphéméride calculée, d'après ses Tables, pour février et mars 1875, par M. Hartwig.

* *Riel* (*C.*). — *Das Sonnen*.... L'année solaire et l'année de Sirius, avec l'explication du système de l'intercalation comparée à l'année de Jules César. Recherches sur l'année normale des anciens Égyptiens et sur l'année commune des époques grecques et romaines, avec 9 planches lithographiées. Leipzig, 1875. In-4° de XXIV et 371 pages. (116-131). [S. Günther.]

* *Riel* (*C.*). — *Der Doppelkalender*.... Le double Calendrier du Papyrus d'Éber comparé au calendrier commun et au calendrier céleste de Denderah, avec 1 planche lithographiée. Leipzig, 1876. In-4° de II et 34 pages. (131-133). [S. Günther.]

* *Usener* (*H.*). — *Ad historiam*.... Contribution à l'histoire de l'Astronomie. (Programme de l'Université de Bonn pour 1876.) In-4° de 37 pages. (130-140). [S. Günther.]

* *Pitschner* (*W.*). — *Himmelskarte*.... Carte céleste des étoiles visibles à l'œil nu en Europe et situées jusqu'à 45° de déclinaison australe, rapportées à l'équinoxe moyen de 1840,0, dressée d'après les travaux d'Argelander, Behrmann et Heis. 2 cartes et texte. Munich, 1875. (141-146). [W. Schur.]

* Institut géodésique. — *Das Rheinische*.... Les triangles du Rhin. Première Partie : la base de Bonn. Berlin, 1876. In-4° de 75 p. et 1 Carte. (147-166).

* *Stein*. — *Das Licht*.... Emploi de la lumière dans les recherches scientifiques; manuel de l'emploi de la lumière et de la Photographie dans les sciences naturelles et en Médecine. Leipzig, 1876. In-8° de VIII et 480 pages, avec 431 figures dans le texte et 12 planches. (167-170). [Bruhns.]

Notice nécrologique sur *Eduard Heis*. (172-173).

Heis, né à Cologne le 18 février 1806, avait été nommé, en 1852, professeur d'Astronomie et de Mathématiques à Münster; il est mort dans cette dernière ville, le 30 juin 1877.

Schoenfeld. — Éphéméride des étoiles variables pour l'année 1878. (175-183).

* *Andræ* (*G. v.*). — *Den danske....* La triangulation et le méridien du Danemark. Ier Volume : triangles de premier ordre, et leurs liaisons avec les triangles de Suède et de Prusse. Copenhague, 1867. xx et 579 pages, avec 5 planches. IIe Volume : triangles de premier ordre le long du méridien, depuis l'Elbe jusqu'à Samsö, et leur liaison avec les mesures de la Seeland. Copenhague, 1872. viii et 490 pages, avec 3 planches. (184-239). [Helmert.]

* *Günther* (*S.*). — *Die Anfänge....* Études sur l'origine et le développement du principe des coordonnées. Extrait du Tome IV des Mémoires de la Société des Sciences de Nürnberg. 1877. In-8°, 80 pages, avec 1 planche. (240-244). [A. Wittstein.]

* *Holden* (*E.-S.*). — *On supposed....* Note sur un changement probable dans la nébuleuse n° 17 de Messier (*American Journal of Sciences and Arts,* vol. XI, p. 341 à 361). (244-246). [A. Winnecke.]

* *Observatoire de Cincinnati.* — Catalogue of.... Catalogue de cinquante étoiles doubles nouvelles, découvertes par M. Howe avec l'équatorial de 11 pouces. Cincinnati, 1876. In-8°, 5 pages. (246). [A. Winnecke.]

* *Dreyer* (*J.-L.-E.*). — *On personal....* Sur l'erreur personnelle dans les observations de passages méridiens. Extrait du vol. II (1876) des *Proceedings of the Royal Irish Academy.* (246-249). [A. Winnecke.]

* Société Jablonowski. — Programme des prix pour 1879. (249-250).

Le sujet proposé est le calcul des perturbations complètes de Jupiter d'après la méthode de Hansen. La valeur du prix est de 700 marks, et le concours sera clos le 30 novembre 1879.

Société Astronomique. — Compte rendu de la réunion tenue par la Société Astronomique, à Stockholm, du 30 août au 1er septembre 1877. (251-296).

Parmi les Communications faites à la Société, nous remarquons : Une lecture de

M. le professeur Bruhns sur les comètes périodiques ; une Note de M. Gyldén sur la parallaxe moyenne des étoiles de première grandeur ; un Mémoire de M. Förster sur la marche des pendules ; un Compte rendu par M. O. Struve, président du Congrès, de la situation du travail des zones : sur 270000 observations à faire, 160000 sont déjà exécutées ; des Communications de MM. Pechüle, Peters et Bruhns sur les passages de Vénus de 1874 et 1882 ; un Mémoire du Dr Gyldén sur l'histoire de la théorie des perturbations ; une description, par M. Bruhns, d'un nouvel instrument des passages, construit à Freiberg par M. Lingke.

Une annexe aux procès-verbaux du Congrès donne quelques chiffres intéressants sur le travail des zones.

A Poulkova, le travail des étoiles fondamentales est entièrement terminé, et le Catalogue est sous presse.

A Nikolaïef, zone de $-2°$ à $+1°$, les observations viennent seulement d'être commencées et 1015 étoiles seulement ont été déterminées.

A Leipzig, zone de 10 à 15°, les observations ont été peu nombreuses dans les deux dernières années, toutes les forces de l'établissement étant utilisées pour la réduction des observations du passage de Vénus. Cependant, toutes les Tables auxiliaires sont prêtes.

A Cambridge (Angl.), zone de 25 à 30°, il ne reste plus que 2253 étoiles qui n'ont pas encore été observées.

A Leyde, zone de 30 à 35 degrés, une partie des observations est déjà imprimée dans les *Annales*.

A Bonn, zone de 40 à 50°, 30000 étoiles environ ont déjà été observées.

A Cambridge (U. S.), zone de 50 à 55°, il ne reste que 2000 étoiles à observer une seule fois.

A Helsingfors, zone de 55 à 65°, 2500 étoiles nouvelles ont été observées une fois, ce qui porte le nombre total des observations à 25000.

A Christiania, zone de 65 à 70°, les observations sont terminées et environ deux tiers d'entre elles complètement réduites.

A Dorpat, zone de 70 à 75°, l'objectif de l'instrument méridien a été changé et les observations seront prochainement terminées.

Peters (*C.-H.-F.*). — *Ueber die....* Note sur les erreurs des positions des étoiles dans le Catalogue de Ptolémée. (296-299).

Les erreurs de longitude offrent un maximum par 180° et un minimum par 0° ; leurs variations sont assez régulières. Les erreurs de latitude ont un maximum par 140° et un minimum par 320°. Il est à remarquer que ces maxima et minima sont situés aux extrémités opposées d'un diamètre du cercle écliptique, comme s'il y avait eu une erreur dans la graduation ou dans la position de la sphère armillaire qui servait à l'illustre astronome.

Gyldén (*H.*). — *Ueber die....* Note sur la parallaxe moyenne des étoiles de première grandeur. (299-302).

L'hypothèse de M. Gyldén est que la parallaxe p d'une étoile de grandeur n, dont le mouvement apparent est s, peut s'exprimer par la formule

$$p = P\frac{s}{\sigma_n M_n},$$

dans laquelle σ_n désigne le moyen mouvement apparent des étoiles de $n^{\text{ième}}$ grosseur.

et M_n leur moyenne distance calculée d'après la considération de leur éclat. La constante P devient alors la parallaxe moyenne des étoiles de première grandeur pour lesquelles $M_1 = 1$.

En appliquant cette formule aux étoiles dont la parallaxe est directement connue, l'auteur trouve, suivant diverses combinaisons de calcul, des valeurs de P comprises entre 0",06 et 0",10.

Schwarz (*L.*). — *Neue Methode....* Nouvelle méthode pour déterminer la collimation d'un cercle méridien. (302-309).

M. Schwarz déduit cette collimation d'observations analogues à celles du nadir faites avec le fil méridien mobile.

Block (*E.*). — *Ueber ein....* Sur un nouvel instrument à réflexion, construit par Repsold. (309-313).

L'instrument décrit par M. Block est un cercle à réflexion destiné aux observations de Géodésie astronomique.

Backlund. — *Ueber die Berechnung....* Note sur le calcul des perturbations de la comète d'Encke par Jupiter. (313-323).

Société Astronomique. — Situation financière ; liste des Membres et des Institutions qui reçoivent ses publications. (323-338).

Bruhns. — *Uebersicht....* Note sur les planètes et les comètes découvertes en 1877. (338-339).

Tome XIII; 1878.

Notice nécrologique sur Philibert von Schrenck. (1-3).

Schrenck, né le 22 novembre 1800, est mort le 1er août 1877 ; il laisse de nombreux travaux de Géodésie ; en particulier des cartes du duché d'Oldenbourg.

Notice nécrologique sur Giovanni Capelli. (3).

Capelli, né à Milan en 1801, est mort dans cette ville le 3 novembre 1877. Entré à l'observatoire de Bréra en 1828, il avait, dans ces dernières années, la charge spéciale du calcul des *Éphémérides ;* il laisse en outre un Catalogue de 661 étoiles australes de Lalande.

* *Neison* (*E.*). — *The Moon....* La Lune, condition et configuration de sa surface ; illustrée de cartes et de planches. — Londres, 1876 ; XVIII-576 p. gr. in-8. (9-42). [Engelmann.]

* Notes sur l'histoire de Galilée. — *Wohlwill* (*E.*). *Ist Galilei....* Galilée a-t-il été mis à la question ? Étude critique.

Leipzig, 1877; XI-192 p. — *Gebler (K. von). Die Akten....* Les actes du procès de Galilée, publiés d'après les manuscrits du Vatican. Stuttgart, 1877; L-192 p. — *L'Epinois (H. de).* Les pièces du procès de Galilée, précédées d'un Avant-propos. Rome, Paris, 1877; XXIV-143 p. — *Berti (D.). Copernico e le vicende....* Copernic et les débats au sujet du système de Copernic en Italie pendant la seconde moitié du XVIe siècle et pendant la première partie du XVIIe, ainsi que quelques documents inédits sur G. Bruno et Galilée. Rome 1876; 255 p. (42-56). [S. Günther.]

* *Dänische....* Le méridien du Danemark; méthodes d'observation; recherches sur le degré d'exactitude; observations des angles secondaires. (57-80). [Helmert.]

* *Kaltenbrunner (F.). — Die Vorgeschichte....* Histoire de la réforme du calendrier grégorien (extrait des Mémoires de la classe de Philosophie et d'Histoire de l'Académie de Vienne pour 1876, t. LXXXII, 128 p.) (80-88). [A. Wittstein.]

* *Strasser (P.-G.). — Mittlere Oerter....* Positions moyennes des étoiles fixes, rapportées à l'équinoxe moyen de 1877,0, d'après les observations faites à Kremsmünster. Kremsmünster, 1877. In-8. (88-91).

* *Orff (C. von).— Bestimmung....* Mesure de la latitude géographique de l'Observatoire royal de Munich, d'après la méthode de Talcott et avec un instrument de passage situé dans le premier vertical. Munich, 1877; 62 p. et une carte, in-4. (91-97). [W. Schur.]

* *Thomson (W.). — Tafeln....* Tables pour abréger l'emploi de la méthode de Sumner pour le calcul des positions en mer. Berlin, 1877. In-4 de 9 pl. et 16 p. de texte. (97-101). [W. Schur.]

* *Das Brachyteleskop....* Le brachytéleseope imaginé et construit par MM. J. Förster et K. Fritsch. Vienne, 1877. In-8 de 16 p. et 5 bois. (101-102). [A. Winnecke.]

* *Zinger (V.) — Die Zeitbestimmung....* La détermination du temps par les hauteurs correspondantes de diverses étoiles; avec

une Introduction de O. Struve. Leipzig, 1877. In-8 de IV et 102 p. (102-104). [A. Winnecke.]

* *Bessel (F.-W.)*. — *Recensionen*.... Articles critiques de Bessel, publiés par R. Engelman. Leipzig, 1878. In-8 de VI-385 p. (104-106). [A. Winnecke.]

Newcomb (S.). — *Reduction of the*.... Réduction des constantes de précession déterminées par Bessel, Struve et Nyrén à un équinoxe commun. (107-110).

L'auteur remarque d'abord que la grandeur de la constante de précession dépend : 1° de l'ascension droite des petites étoiles relativement à celle des étoiles fondamentales employées au calcul de la correction du pendule; 2° de l'ascension droite des étoiles fondamentales par rapport à l'équinoxe des différentes époques. Considérant ensuite que ses travaux sur la position des étoiles fondamentales publiés dans les observations de Washington pour 1870 lui donnent le moyen de réduire les observations de Piazzi, Bessel, Struve et Nyrén à un Catalogue commun, il cherche les corrections à appliquer à ces divers Catalogues. Appliquant ensuite aux diverses valeurs de la précession les corrections qui résultent des changements ainsi apportés aux ascensions droites, M. Newcomb trouve, pour valeur de la constante de précession :

D'après Bessel.........	50″,214
» Struve........	50,232
» Nyrén.........	50,219
Moyenne....	50,225 ± 0″,010

SOCIÉTÉ JABLONOWSKI. — Prix pour 1881. (110-111).

Le sujet proposé pour le prix de 700 marks est le suivant : « Déterminer le mouvement de la comète d'Encke de 1848 à nos jours, en tenant compte de toutes les forces perturbatrices qui ont pu agir sur ses positions. »

COMPTE RENDU ANNUEL DES TRAVAUX DES PRINCIPAUX OBSERVATOIRES. Année 1877. (114-183).

Nous donnons ici un résumé succinct des Notes transmises à la Société Astronomique par les directeurs des principaux Observatoires de l'Europe centrale et de quelques autres pays. Ces Notes montrent la somme considérable de travaux d'observation ou de calcul faits chaque année au delà du Rhin.

Berlin. [Förster.] — Détermination des différences de longitude entre Berlin, Greenwich, Vienne et Odessa; observations méridiennes des étoiles de comparaison pour l'observation d'Ariane et de Melpomène; nombreuses observations équatoriales de planètes et de comètes. (114-119).

Bonn. [Schönfeld.] — Observations méridiennes pour le travail des zones; nombreuses observations de comètes. (119-125).

Bruxelles. [E. de Mailly.] — L'Observatoire a acquis, chez Merz, un objectif achromatique de 38 centimètres d'ouverture (14 pouces); il sera monté par Cooke et Breguet. L'Observatoire a encore commandé à Repsold un cercle méridien

semblable à celui de Strasbourg. Pendant l'année 1877, on a fait à Bruxelles une série d'observations spectroscopiques du Soleil et de nombreuses observations méridiennes d'étoiles à mouvement propre caractérisé. (125-130).

Cincinnati. [Ormond Stone.] — Observations d'étoiles doubles situées au sud de l'équateur. (130-132).

Düsseldorf. [R. Luther.] — Observations de petites planètes. (132-133).

Francfort. [Epstein.] — L'Observatoire possède un télescope de Browning ayant 16 centimètres d'ouverture. Observations d'amas d'étoiles. (133-134).

Gotha. [A. Krüger.] — Observations méridiennes et observations de comètes. (134-136).

O. Gyalla. [Von Konkoly]. — Les instruments sont : un télescope équatorial de Browning ayant 10 $\frac{1}{4}$ pouces de diamètre, une lunette équatoriale de Merz de 6 pouces, des chercheurs et un petit cercle méridien de Starke. Observations des taches solaires, observations spectroscopiques. (136-141).

Hambourg. [Rümcker.] — Observations méridiennes des zones, observations équatoriales de planètes et de comètes. (141-143).

Leipzig. [Bruhns.] — Observations méridiennes d'étoiles et de planètes; très-nombreuses observations équatoriales de planètes et de comètes. Réduction des observations photographiques de Vénus. (143-151).

Lund. [A. Möller.] — Observations de comètes et de planètes. (151-152).

Milan. [Schiaparelli.] — Observations d'étoiles doubles et de comètes à l'équatorial de 22 centimètres. Recherches sur la topographie de Mars. Calculs des différences de longitude entre Milan, Munich, Vienne, Padoue, Genève et Naples. (152-154).

Mannheim. [W. Valentiner.] — Observations d'amas d'étoiles; réduction des anciennes observations de Barry. (155-157).

Moscou. [Th. Bredikhine.] — Mesures de l'amas de Persée; observations de comètes; observations physiques du Soleil. (157-158).

Potsdam. — L'Observatoire est dirigé par une Commission composée de MM. Förster, Auwers et Kirchhoff; une grande partie de l'année a été employée à la régularisation du terrain de la colline sur laquelle le monument sera construit, à la bâtisse des fondations, ainsi qu'à la construction du logement des astronomes. Au commencement de l'année 1877, on avait installé d'une manière provisoire un équatorial de Grubb de 20 centimètres d'ouverture et un équatorial de Steinheil de 5 pouces de diamètre. Avec le premier instrument, le Dr Vogel a continué ses études de spectroscopie et spécialement étudié la nouvelle étoile du Cygne : avec le second, M. Spoerer a continué ses recherches sur les taches solaires et le spectre des protubérances.

Les deux instruments précédents doivent être placés dans des coupoles tournantes de 7 et de 6 mètres de diamètre, coupoles que l'on montait à l'époque de mon passage à Potsdam, en octobre 1878.

L'Observatoire doit recevoir cette année (1879) un équatorial de 11 $\frac{1}{2}$ pouces de Schroeder, monté par Repsold, et un héliographe de 6 pouces d'ouverture et de 4 mètres de distance focale, dont la lunette sera fixe et parallèle à l'axe du monde.

Des cabinets pour les recherches de Physique et de Chimie, un laboratoire photographique, sont préparés dans les bâtiments de l'Observatoire, et l'établissement offrira ainsi toutes les ressources nécessaires aux études de Physique astronomique. (158-165).

Stockholm. [H. Gyldén.] — Observations méridiennes. (165-166).

Strasbourg. [A. Winnecke.] — Observations méridiennes à la lunette méridienne de Cauchoix, ayant appartenu à la Faculté des Sciences. Observations de nébuleuses au chercheur de 6 pouces; observations de comètes; détermination des constantes des héliomètres employés aux observations du passage de Vénus.

L'Observatoire a acquis de Merz un objectif de 18 pouces d'ouverture destiné à l'équatorial du nouvel Observatoire, qui se construit activement au nord de la citadelle et dont l'installation ne laissera rien à désirer. (166-171).

Varsovie. [I. Wostokoff.] — Observations méridiennes pour les zones. Observations de hauteur pour la mesure de la latitude. (171-173).

Vienne. [E. Weiss.] — Observations méridiennes d'étoiles entre + 15° et + 18° de déclinaison. Observations équatoriales de comètes, de planètes et d'étoiles variables.

On sait que l'on construit activement aujourd'hui à *Türkenschanze* un nouvel Observatoire dont les instruments principaux seront : un équatorial de 27 pouces anglais d'ouverture par Grubb, un équatorial de 12 pouces par Clark, un cercle méridien par Repsold, et un instrument de premier vertical. (173-177).

Zurich. [R. Wolf.] — Observations des taches solaires. Détermination de la latitude. (177-183).

Bruhns. — *Zusammenstellung*.... Résumé des planètes et des comètes découvertes en 1877. (183-192).

Dix planètes, 170 à 179, ont été découvertes cette année; on a aussi observé cinq comètes nouvelles et le retour de la comète périodique de d'Arrest.

Notice nécrologique sur C. de Littrow. (194-200). [E. Weiss.]

C. de Littrow, né à Kazan le 18 juillet 1811, est mort à Venise le 16 novembre 1877. Son premier travail astronomique date de 1824; il a pour sujet la détermination, à l'aide des signaux de feu, de la différence de longitude entre Munich et Vienne. En 1831, il entra comme assistant à l'Observatoire de Vienne, que dirigeait alors son père; en 1835, il était promu astronome adjoint, et enfin il devenait, en 1840, directeur de l'Observatoire. Littrow laisse de nombreux Mémoires, publiés pour la plupart dans les *Annales de l'Observatoire de Vienne*, et quelques livres spéciaux, comme les *Wundern des Himmels*, qui ont obtenu un succès mérité et incontesté. On doit enfin aux efforts persévérants de Littrow la fondation du nouvel Observatoire de *Türkenschanze*, où les astronomes autrichiens trouveront, avec une installation vraiment splendide, toutes les conditions nécessaires à l'emploi fructueux des grands instruments qu'exigent les études d'Astronomie physique.

Auwers (*A.*). — Mélanges de la Commission des zones. (201-220).

M. Auwers publie, d'après l'ensemble des observations faites à Poulkova, Greenwich, Cambridge, Leipzig et Leyde, les corrections pour 1865,0, 1875,0 et 1885,0 de 539 étoiles du Catalogue de Flamsteed. Ces étoiles sont destinées à servir d'étoiles fondamentales dans la réduction des observations de zones.

Schoenfeld. — Éphéméride pour 1879 des maxima de lumière des étoiles télescopiques variables. (221-230).

* *Le Verrier.* — Annales de l'Observatoire de Paris. Tome X des Mémoires. Paris, 1873. In-4. (231-264). [H. Gyldén.]

* *Plantamour* (*E.*). — Recherches expérimentales sur le mouvement simultané d'un pendule et de ses supports. Genève, 1878. (264-274). [Savitch.]

* *Dreyer* (*J.-L.-E.*). — *A Supplement*..., Supplément au Catalogue général des nébuleuses et des amas d'étoiles par Herschel. Dublin, 1878. In-4. (274-278). [R. C.]

* *Secchi* (*A.*). — *Die Sterne*.... Les étoiles, essais d'Astronomie sidérale. Leipzig, 1878. Un vol. in-8 avec 78 bois et 9 planches en couleur. (278-282). [A. Winnecke.]

Le volume original a été publié en 1878, à Milan, sous le titre : *Le Stelle, saggio di Astronomia siderale;* il en existe une traduction française.

Winnecke (*A.*). — Sur une étoile variable, observée en 1612 par Scheiner dans le voisinage de Jupiter. (283-288).

Dans le second des écrits de Scheiner sur les taches solaires (*De maculis solaribus*..., Augustæ Vind., 1612) se trouvent trois Lettres à Welser; la seconde est relative à des observations de Jupiter et de ses satellites faites du 29 mars au 8 avril 1612. Le savant jésuite constate que, à cette époque, il y avait en même temps que la planète, dans le champ de la lunette, une étoile plus brillante que les satellites, qui disparut le 8 avril. D'après les indications de Scheiner et la position de Jupiter à cette date, l'étoile en question a pour position :

$$1855,0\ldots\ldots\quad \alpha = 9^{h}\,29^{m}\,21^{s}.2,\quad \delta = +\,15^{\circ}\,52',1.$$

Or il existe précisément dans ce point du ciel une étoile qui est de 7ᵉ ou de 8ᵉ grandeur depuis environ dix ans. L'étoile vue par Scheiner serait donc variable.

Notice nécrologique sur Jacob-Philippe Wolfers. (290-292). [W. Forster.]

Wolfers, né à Minden (Westphalie), le 21 mai 1803, est mort à Berlin le 28 avril 1878. Il a fait le plus grand nombre des calculs du *Berliner Jahrbuch* de 1827 à 1867. On lui doit encore deux des cartes de l'Académie de Berlin et de nombreux calculs pour les Tables de Bessel.

Notice nécrologique sur E. Quetelet. (292-293). [A. Winnecke.]

Ernest Quetelet, né à Bruxelles le 7 août 1825, est mort dans cette même ville le 6 septembre 1878. Il laisse un grand nombre d'observations d'étoiles faites dans le but de déterminer leurs mouvements propres.

* *Hasselberg* (*B*). — *Russische Expeditionen*.... Expéditions russes pour l'observation du passage de Vénus en 1874. Deuxième Partie, n° 1. Observations photographiques à Hafen Possiet. (294-308).

* *Darwin* (*G.-H.*). — *On the influence*.... Mémoire sur l'influence des phénomènes géologiques sur la position de l'axe de rotation de la Terre (extrait du Tome CLVII des *Philosophical Transactions*). Londres, 1877. In-4 de 42 p. (309-316). [Helmert.]

* *Hilgard* (*J.-E.*). — *Transatlantic Longitudes*.... Longitudes transatlantiques; dernier rapport sur les travaux de 1872, avec un résumé des déterminations précédentes (extrait des Rapports du *Coast Survey* pour 1874). Washington, 1877; 80 p. (316-327). [W. Schur.]

* *Lindstedt* (*A.*). — *Undersökning*.... Étude du cercle méridien de l'Observatoire de Lund et détermination nouvelle de sa latitude (*Acta Universitatis Lundensis*, t. XIII). Lund, 1877. In-4° de 54 p. et 1 pl. (327-338). [M. Nyrén.]

* *Newcomb* (*S.*). — *Researches on the*.... Recherches sur le mouvement de la Lune, faites à l'Observatoire naval de Washington. Partie I : Réduction et discussion des observations de la Lune antérieures à 1750. Washington, 1878. In-4° de 280 p. (338-366). [Schoenfeld.]

* *Hänselmann* (*L.*). — *Karl Friedrich Gauss*... K.-F. Gauss; douze chapitres de sa vie. Leipzig, 1878. In-8° de 106 pages. (366-372). [A. Winnecke.]

Hartwig (*E.*). — *Bestimmung der*.... Mesures des positions relatives de quelques étoiles du Petit Renard, faites au moyen de l'héliomètre de l'Observatoire de l'Université de Strasbourg. (373-386).

Les observations ont été faites en 1878 à l'aide de l'héliomètre de l'Observatoire de Gotha, légèrement modifié par Repsold en vue des observations du dernier passage de Vénus, et qui se trouve provisoirement à Strasbourg. Les divers éléments de réduction ont été déterminés avec le plus grand soin par des méthodes phy-

siques, et les observations sont assez nombreuses pour que les résultats soient très-exacts.

En prenant, avec Schultz, pour position de 20 du Petit Renard en 1865,0,

$$\alpha = 20^h 6^m 21^s,15, \quad \delta = -26^\circ 4' 39'',5,$$

on trouve, pour la position des quatre petites étoiles voisines :

	h m s	° ′ ″
a.......	$\alpha =$ 20.6.18,50	$\delta = -$ 26.20.33,8
b.......	20.6. 9,57	26.24.29,8
c.......	20.6.12,49	26.29.42,8
d.......	20.4.55,56	26.30.22,2

G. R.

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. Bruxelles, F. Hayez. In-4°.

Tome XXXVII ; 1869.

Plateau (*J.*). — Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur.

Huitième série : Recherche des causes d'où dépendent le facile développement et la persistance des lames liquides; tension des surfaces liquides; principe nouveau concernant ces surfaces (102 pages).

Neuvième série : Causes accessoires qui influent sur la persistance des lames liquides. Figures laminaires de très-grande durée. Historique concernant les lames liquides. Ascension capillaire à de grandes hauteurs dans des tubes de grands diamètres. Constitution d'un courant gazeux qui traverse un liquide (56 pages).

Dixième série : Résultats obtenus par les géomètres et vérifications expérimentales (52 pages et 1 planche).

Onzième et dernière série : Limites de stabilité des figures d'équilibre. Théorie générale de la stabilité de ces figures. Stabilité des systèmes laminaires. Stabilité dans les cas où la pesanteur intervient (63 pages et 1 planche). Table analytique des matières contenues dans les onze séries (21 pages).

Les sept premières séries de ces Recherches de l'illustre physicien de Gand ont paru dans les Tomes XVI, XXIII, XXX, XXXI, XXXIII (séries 5e et 6e) et XXXVI des *Mémoires de l'Académie*. La première série a un titre un peu différent de celui des séries suivantes : *Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur*. Les Recherches de M. Plateau ont la connexion la plus étroite avec une des plus belles théories de la Géométrie, celle des surfaces à courbure moyenne, nulle ou constante, et, à ce titre, elles intéressent les mathématiciens aussi bien que les physiciens.

L'auteur a donné une analyse de la huitième série dans les *Annales de Chimie et de Physique* de Paris (4e série, t. XVII, p. 260), de la neuvième, de la dixième et de la onzième dans le même Recueil (t. XIX, p. 369). Enfin, il a exposé l'en-

semble de ses travaux sur les liquides dans le grand Ouvrage intitulé *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires* (Paris, Gauthier-Villars, 1873-1874).

Catalan (*E.*). — Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler, et sur quelques intégrales définies. (19 p.).

Voir une analyse de ce Mémoire dans l'Ouvrage intitulé *Rapport séculaire sur les travaux mathématiques de l'Académie royale de Belgique*, par J.-M. De Tilly, p. 38-39. Bruxelles, Hayez, 1872 (¹).

Gilbert (*Ph.*). — Mémoire sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque. (III-47 p.).

Voir une analyse de ce Mémoire dans l'Ouvrage cité de M. De Tilly, p. 160-165.

Tome XXXVIII; 1871.

Houzeau (*J.-C.*). — Considérations sur l'étude des petits mouvements des étoiles. (103 p., 1 pl.).

Voir l'article intitulé *les Mathématiques en Belgique en* 1871, 1873, 1874, 1875, par le Dr P. Mansion (*Bullettino di Bibliografia*, pubbl. da B. Boncompagni, t. X, p. 471-542), p. 542, ou tirage à part de cet article, p. 112.

Steichen. — Essai sur quelques questions élémentaires de Mécanique physique. (33 p.).

Voir même article, p. 536 du *Bullettino*.

Catalan (*E.*). — Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes. (64 p.).

Voir même article, p. 529-530, dans le *Bullettino*.

Gilbert (*P.*). — Sur une propriété des déterminants fonctionnels

---

(¹) Cet Ouvrage fait lui-même partie de la publication académique intitulée *Académie royale de Belgique. Centième anniversaire de fondation* (1772-1872). Bruxelles, F. Hayez, 1872; 2 forts vol. gr. in-8°. Outre le Rapport de M. De Tilly cité dans le texte et divers autres Rapports qui n'ont trait ni aux Mathématiques ni à l'Astronomie, on trouve encore dans ces Volumes les Mémoires suivants que nous croyons devoir signaler. 1er Volume : *Premier siècle de l'Académie royale de Belgique*; par Ad. Quetelet (174 pages). 2e Volume : *De l'Astronomie dans l'Académie royale de Belgique* (1772-1872); par Ed. Mailly (208 pages). *Rapport sur les travaux de la classe des Sciences* (1772-1872) : *Physique, Météorologie et Physique du globe* (88 pages).

et son application au développement des fonctions implicites. (12 p.).

Voir même article, p. 489-491 du *Bullettino.*

Tome XXXIX; 1872.

Folie (*F.*). — Fondements. d'une Géométrie supérieure cartésienne. (II-142 p., 1 pl.).

Analysé dans l'article intitulé *les Mathématiques en Belgique en* 1872; par le Dr P. Mansion (*Bullettino*, etc., t. VI, p. 277-312), p. 296-302, ou p. 34 à 43 du tirage à part de cet article.

Tome XL; 1873.

Catalan (*E.*). — Recherches sur quelques produits infinis. (II-127 p.).

Voir l'Opuscule *les Mathématiques en Belgique en* 1871, etc. (*Bullettino*, t. X, p. 498-499).

Tome XLI; 1875-1876.

Gilbert (*Ph.*). — Recherches sur le développement de la fonction Γ et sur certaines intégrales définies qui en dépendent. (60 p.).

Voir l'Opuscule *les Mathématiques en Belgique en* 1871, etc. (*Bullettino*, t. X, p. 500-503).

Tome XLII; 1877-1878.

Plateau (*J.*). — Bibliographie analytique des principaux phénomènes subjectifs de la vision, depuis les temps anciens jusqu'à la fin du XVIIIe siècle, suivie d'une bibliographie simple pour la partie écoulée du siècle actuel. (IV-59-59-26-44-35-38-43 p.).

Avant-propos. — Première section : persistance des impressions sur la rétine. — Deuxième section : couleurs accidentelles ordinaires de succession. — Troisième section : images qui succèdent à la contemplation d'objets d'un grand éclat ou même d'objets blancs bien éclairés. — Quatrième section : irradiation. — Cinquième section : phénomènes ordinaires de contraste. — Sixième section : ombres colorées. Supplément à l'Ouvrage entier comprenant l'année 1877.

Pour la période antérieure à notre siècle, l'auteur analyse les écrits dont il parle.

Pour ceux qui datent du XIXᵉ siècle, il ne se borne pas à en donner le titre, il en fait connaître aussi très-sommairement le contenu.

Catalan (*E.*). — Notes d'Algèbre et d'Analyse. (32 p.).

Voir *Bulletin*, II_1, 237.

Catalan (*E.*). — Sur quelques formules relatives aux intégrales eulériennes. (20 p.).

Voir *Bulletin*, II_1, 278.

MÉMOIRES couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. — Bruxelles, F. Hayez. In-4.

Tome XXXIV; 1867-1870.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur la tension superficielle des liquides considérée au point de vue de certains mouvements observés à leur surface. (67 p.).

Premier Mémoire. — Considérations générales. Historique des recherches des physiciens sur les mouvements provoqués à la surface d'un liquide lors de l'approche ou d'un contact d'un solide ou d'un liquide n'exerçant pas d'action chimique. Discussion des théories émises pour expliquer ces mouvements. Théorie nouvelle.

Tome XXXV; 1870. — Tome XXXVI; 1871.

Ne contiennent aucun Mémoire de Mathématiques ou d'Astronomie.

Tome XXXVII; 1873.

Pérard (*L.*). — Étude sur les procédés suivis pour déterminer les éléments du magnétisme terrestre. (VI-194 p., 2 pl.).

Voir une Notice sur ce travail dans l'Opuscule intitulé *les Mathématiques en Belgique en* 1871, etc.; par le Dʳ P. Mansion (*Bullettino* de Boncompagni, t. X, p. 471-542), p. 540, ou tirage à part, p. 109.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur la tension superficielle des liquides considérée au point de vue de certains mouvements observés à leur surface. (32 p.).

Second Mémoire. — Complément et suite de l'historique des recherches antérieures. Réfutation de quelques objections. Expériences diverses. Conclusion.

Terby (*F.*). — *Areographische Fragmente.* Manuscrits et dessins originaux et inédits de Schröter. (31 p., 1 pl.).

Le petit-fils du célèbre astronome de Lilienthal a communiqué à M. Terby un manuscrit de Schröter relatif à la planète Mars et contenant des observations des taches de cette planète de 1785 à 1805. M. Terby donne une analyse de ce manuscrit, qui contient, outre 1000 pages de texte, environ 200 dessins des taches de Mars.

Tome XXXVIII; 1874.

Ce Tome ne contient aucun Mémoire de Mathématiques ou d'Astronomie.

Tome XXXIX; 1876.

Terby (*F.*). — Aréographie, ou Étude comparative des observations faites sur l'aspect physique de la planète Mars depuis Fontana (1636) jusqu'à nos jours (1873). (119 p., 2 pl.).

Tome XL; 1876.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — L'électricité statique exerce-t-elle une influence sur la tension superficielle des liquides? (28 p.).

Historique des recherches sur les rapports de l'électricité statique et de la cohésion des liquides. — Cas de l'électrisation d'une bulle de liquide glycérique. — Faits relatifs à une lame plane électrisée. — Cas d'une masse liquide pleine. — Observation de la hauteur capillaire sous l'influence de l'électricité. — Comment la théorie de la tension superficielle se concilie avec la théorie de Laplace et la complète. — Flotteurs capillaires sur un liquide électrisé. — Colonnes liquides suspendues par le procédé de M. Duprez et soumises à l'action électrique. — Cas des flotteurs aréométriques.

Conclusions. — 1° La tension superficielle, soit d'une lame, soit d'une masse pleine d'un liquide bon conducteur, n'est pas modifiée par l'électricité statique. 2° L'électricité statique, au lieu d'être répandue à l'intérieur de la couche extrême des corps bons conducteurs, se trouve, au contraire, entièrement extérieure et simplement appliquée contre la surface limite de ces corps.

Boussinesq (*J.*). — Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui des massifs solides, et sur la poussée des terres sans cohésion. (180 p.).

Ce Mémoire considérable, qui a paru aussi en Volume séparé chez Gauthier-Villars, est si important, que nous croyons utile d'en donner ailleurs une analyse détaillée, d'après une Note inédite de l'auteur lui-même.

Tome XLI; 1876-1878.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur le problème des liquides superposés dans un tube capillaire. (44 p.).

Introduction. — *Première Partie.* Solution du problème d'après la théorie de la tension superficielle. — Solution d'après la théorie de Laplace. — Solutions données par Poisson. — Solutions déduites de la théorie de Gauss. — *Seconde Partie.* Résumé des principales expériences relatives à la question. — Comparaison avec la théorie. — Description de quelques faits nouveaux.

Dans la première Partie, le problème, traité de quatre manières différentes, est celui-ci : « Déterminer le poids total soulevé ou déprimé dans un tube capillaire dont l'extrémité inférieure est plongée dans un liquide quelconque et qui contient un ou plusieurs liquides superposés au premier. » L'auteur tâche de faire voir la parfaite identité des résultats auxquels on arrive dans tous les cas, pourvu que l'on se place dans les mêmes conditions et que l'on interprète convenablement les constantes. Dans la seconde, à propos des expériences rapportées ou entreprises par lui, il essaye d'expliquer le désaccord qui semble exister entre la théorie et les faits observés par des causes perturbatrices que l'on ne peut éviter.

ANNUAIRE de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. — Bruxelles, Hayez. In-18.

Tome XXXIV; 1868.

Quetelet (*Ad.*). — Notice sur J.-A. Timmermans. (99-113).

Timmermans (1801-1864) a écrit un *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* (1860) et un *Traité de Mécanique rationnelle* (1862). Il fut longtemps professeur à l'Université de Gand.

Quetelet (*Ad.*). — Notice sur Mathias Schaar. (115-130).

On doit à Schaar (1817-1867) de belles recherches sur la théorie des résidus quadratiques.

Tome XXXV; 1869.

Liagre (*J.*). — Notice sur J.-B. Brasseur. (121-146).

Brasseur (1802-1868) a écrit un *Programme* d'un *Cours de Géométrie descriptive*, qu'il sera difficile de surpasser, et un Mémoire *Sur une nouvelle méthode d'application de la Géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue*, digne d'être placé à côté des plus beaux travaux de Géométrie supérieure moderne.

Tome XXXVI; 1870.

Ne contient de Notice sur aucun mathématicien.

Tome XXXVII; 1871.

Liagre (*J.*). — Notice sur G.-A. Nerenburger. (369-389).

Nerenburger (1804-1869) est l'un des principaux auteurs de la triangulation de la Belgique.

Tome XXXVIII; 1872.

Quetelet (*Ad.*). — Notice sur sir John Frederic William Herschel. (161-199).

L'auteur ne parle guère que des travaux de John Herschel (1792-1871) qui ont quelque connexion avec les siens propres sur le Calcul des probabilités appliqué aux Sciences morales.

Tome XXXIX; 1873.

Houzeau (*J.-C.*). — Notice sur Ph.-M.-G. Vandermaelen. (109-147).

Vandermaelen (1795-1869) a longtemps dirigé un important établissement géographique à Bruxelles.

Quetelet (*Ad.*). — Notice sur Charles Babbage. (149-165).

Quetelet ne donne pas une biographie complète de Babbage (1792-1871); il traite seulement de ses recherches de Statistique.

Tome XL; 1874.

Quetelet (*Ad.*). — Notice sur le capitaine M.-F. Maury. (291-341).

Contributions à la biographie de Maury (1806-1873).

Tome XLI; 1875.

Mailly (*Ed.*). — Notice sur L.-A.-J. Quetelet. (109-297).

Voir *Bulletin*, 2e série, t. II, p. 240.

Tome XLII; 1876.

Ne contient de Notice sur aucun mathématicien.

Tome XLIII; 1877.

Mailly (*Ed.*). — Notice sur Richard van Rees. (227-240).

Van Rees (1797-1875) est auteur de quelques Mémoires importants sur le magnétisme.

Tome XLIV; 1878.

Folie (*F.*). — Notice sur Michel Glœsener. (277-344).

Glœsener (1794-1876), auteur d'appareils électriques très-remarquables, a aussi écrit quelques dissertations théoriques sur l'électricité.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (1). — 2e série.

Tome XVII; 1878.

Casorati (*F.*). — Sur les coordonnées des points et des droites dans le plan, des points et des plans dans l'espace. (5-20).

Cet article, traduit de l'italien par un abonné, a été inspiré, comme nous l'apprend l'auteur, par la lecture de l'opinion émise à la page 61 des *Vorlesungen über Geometrie,* de A. Clebsch. Le savant professeur de l'Université de Pavie se propose de transformer géométriquement la conception ordinaire des coordonnées cartésiennes en un système de coordonnées, pour la droite, qui est préférable au système plückérien. Les professeurs et les élèves liront l'article de M. Casorati avec beaucoup d'intérêt.

Laguerre. — Sur la résolution des équations numériques. (20-25, 97-101).

Ces deux articles renferment quelques notions intéressantes sur quelques points de la théorie des équations. Il est à regretter que jusqu'à présent ils n'aient pas été suivis de la continuation qu'on annonçait.

---

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 177.

E. G. — Détermination analytique des foyers dans les sections coniques. (26-28).

La détermination se fait à la fois très-élégamment et suivant une méthode tout à fait élémentaire, en conservant la définition ordinaire des foyers.

Concours d'admission a l'École Centrale (1re session : juillet 1877. — 2e session : octobre 1877). Énoncés des compositions. (29-33).

Brocard (H.). — Bibliographie : *Johannis Kepleri astronomi Opera omnia*, publiées par le Dr Frisch, de Stuttgart; 8 vol. gr. in-8. (34-39).

Brisse (Ch.). — Solution de la question 34 : « Sur le degré d'un lieu géométrique de l'espace. » (39-40).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1099 : « Propriété du quadrilatère circonscriptible. » (40-44).

Moreau (C.). — Solution des questions 1218 et 1219 : « Sur certaines formes de nombres entiers. » (45-46).

Berthomieu. — Solution de la question 1230 : « Enveloppe d'une droite. » (46-47).

Moret-Blanc. — Solution géométrique de la question 1230. (48).

Tissot (A.). — Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des Cartes géographiques. (49-55, 145-163, 351-366).

Ce Mémoire, fort intéressant, non-seulement au point de vue des applications, mais aussi par les considérations purement théoriques qu'il contient, a pour objet principal l'étude de la déformation dans la représentation d'une surface sur une autre. Voici l'indication sommaire des principaux sujets qui s'y trouvent traités : Préliminaires. — Loi de la déformation. — Tangentes principales. — Ellipse indicatrice. — Altérations d'angles. — Altérations de longueurs. — Altérations de surfaces. — Détermination des axes de l'ellipse indicatrice. — Formules dans lesquelles les directions se trouvent rapportées à d'autres lignes que les tangentes principales. — Séries de couples de courbes satisfaisant à certaines conditions. — Doubles canevas satisfaisant à certaines conditions. — Applications.

Laguerre. — Sur la cardioïde. (55-69).

Étude fort complète de cette courbe, définie comme une courbe de troisième

classe, ayant une tangente double et un foyer singulier de rebroussement. *Voir* les Mémoires suivants du même auteur : Théorèmes généraux sur les courbes algébriques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, janvier 1865). — Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes (*Bulletin de la Société Philomathique*, février 1867). — Sur les courbes unicursales de troisième classe (*Société Mathématique*, novembre 1877). — Sur les spiriques (*Bulletin de la Société Philomathique*, novembre 1869).

Faure. — Théorie des indices. (69-75).

Fin de la série des articles qui ont paru sur ce sujet dans les années précédentes.

Gambey. — Solution de la question de Mécanique élémentaire proposée au Concours d'agrégation en 1875 : « Positions d'équilibre d'un système pesant. » (75-77).

Gambey. — Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'agrégation en 1875 : Problème sur des surfaces de second ordre circonscrites à un ellipsoïde. » (77-83).

Jamet (*V.*). — Solution de la question 1228 : « Propriété des surfaces du second degré. »(83-86).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1231 : « Propriété des normales aux coniques. » (86-90).

Barthe. — Solution de la question 1245 : « Propriété de la parabole. » (91).

Bibliographie étrangère. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni.* T. IX. (1876) et tirages à part. (92-96).

Publications récentes. — 1. Appendice aux exercices de Géométrie, par F. J. C. (1877). — 2. Exercices de Géométrie descriptive, par F. J. C. (1877). — 3. Sopra alcune questioni dinamiche, del prof. D. Chelini. Bologna, 1877. — 4. Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante, di E. d'Ovidio; Roma, 1877. — 5. L'Astronomie pratique et les Observatoires en Europe et en Amérique, par C. André et A. Angot; Paris, 1877. (96).

Longchamps (*G. de*). — Sur le binôme de Newton. (101-104).

Démonstration directe de la formule du binôme, dans le cas d'un exposant entier, au moyen d'une identité algébrique.

Un abonné. — Remarques sur quelques points de la théorie des équations numériques. (104-106).

Ces remarques sont relatives à la séparation des racines et contiennent une application à l'équation du cinquième degré.

Concours général de 1877. — Énoncés des compositions. (106-110).

Griess (*J.*). — Question de licence (1866) : « Trouver une courbe plane telle que la projection de son rayon de courbure sur une droite fixe située dans son plan ait une longueur constante. » (111-113).

Courbe (*H.*). — Question de licence (novembre 1875) : Détermination de toutes les surfaces qui satisfont à une condition donnée. (113-115).

Moret-Blanc. — Concours d'admission à l'École Polytechnique (1875) : « Lieu géométrique relatif à une conique mobile. » (116-118).

Laurent (*H.*). — Théorie élémentaire des fonctions elliptiques (119-129, 247-252, 235-408, 387-557).

Suite des articles antérieurement parus sur le même sujet. Ceux-ci contiennent les matières suivantes : Relations différentielles entre les fonctions auxiliaires. — Relations entre sn x, cn x et dn x. — Formules d'addition. — Autre manière pour arriver aux formules d'addition des fonctions elliptiques. — Sur les periodes élémentaires. — Sur la forme générale des fonctions doublement périodiques et leur expression en fonction de l'une d'elles. — Décomposition des fonctions à deux périodes en éléments simples. — Études de la fonction Z(x). — Étude de l'intégrale elliptique de troisième espèce. — Expression d'une fonction doublement périodique au moyen d'une fonction du second ordre aux mêmes périodes; théorème de M. Liouville. — Application des considérations précédentes au problème dit de la multiplication. — Application à l'addition des fonctions de troisième espèce. — Développement des fonctions doublement périodiques en séries trigonométriques. — Sur le problème de la transformation. — Transformation du deuxième degré. — Méthode d'Abel. — Transformation de Landen. — Sur les applications des théories précédentes. — Resumé des principales formules elliptiques. — Théorème de Poncelet.

Lucas (*Éd.*). — Théorème sur la Géométrie des quinconces. (129-130).

Les sommets d'un échiquier quelconque ne sont jamais situés aux sommets d'un triangle équilatéral.

Lez (*H.*). — Solution de la question 1232 : « Propriété de la parabole osculatrice à une conique. » (130-132).

Cauret. — Solution de la question 1237 : « Décomposition d'une somme de quatre carrés en un produit de deux facteurs. » (132-133).

Chambon (*J.*). — Solution de la question 1241 : « Enveloppe d'un plan passant par les extrémités de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde. » (133-135).

Moreau (*C.*). — Solution de la question 1248 : « $\sqrt{5}$ est égal au rapport de deux séries. » (136-138).

Moreau (*C.*). — Solution de la question 1249 : « Développement en série de $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. » (138-140).

Moreau (*C.*). — Solution de la question 1250 : « Lignes telles que la corde qui sous-tend leurs intersections avec les côtés d'un angle droit pivotant sur un point fixe enveloppe un cercle autour de ce point. » (141-144).

Correspondance. (144).

Laguerre. — Sur les normales aux surfaces du second ordre. (163-178).

Cet article renferme d'intéressantes recherches et les énoncés d'assez nombreuses propriétés géométriques concernant les normales.

Realis (*S.*). — Particularités relatives à l'équation du troisième degré. (178-181).

Les remarques, dignes d'attention, de M. Realis sont fondées sur la considération de la fonction $\varphi(x) = P^2 - 4Qx$. Elles conduisent à des conséquences relatives à l'analyse indéterminée et à la théorie des formes quadratiques.

Laguerre. — Sur les systèmes de droites qui sont normales à une même surface. (181-185).

Cette Note contient plusieurs propriétés remarquables, spécialement en ce qui

concerne les lignes géodésiques. *Voir* du même auteur : « Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces » (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XI, p. 60).

Genty. — Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'agrégation de 1874 : « Lieu géométrique relatif aux coniques bitangentes à une ellipse et à une hyperbole homofocales. » (186-188).

Gambey. — Solution de la question d'Analyse donnée au Concours d'agrégation en 1871 : « Propriété réciproque de deux courbes gauches. » (188-190).

Realis (*S.*). — Solution des questions 833 et 748 : « Propriétés des racines entières d'une équation du troisième degré. » (190-191).

Bibliographie. — « Dynamique analytique ». par Émile Mathieu ; Paris, 1878. (192).

Lez. — Solution de la composition de Mathématiques proposée au Concours d'admission à l'École Polytechnique (1877) : « Problème relatif à l'hyperbole. » (193-195).

Tourrettes (*A.*). — Solution de la composition de Mathématiques proposée au Concours d'admission à l'École Normale supérieure (1877) : « Lieux géométriques relatifs à des coniques circonscrites à un triangle rectangle. » (195-200).

Chambon (*J.*). — Solution de la composition proposée au Concours d'admission à l'École Centrale (1re session, juillet 1877) : « Problème relatif aux hyperboles satisfaisant à certaines conditions. » (200-203).

Moret-Blanc. — Solution de la composition proposée au Concours d'admission à l'École Centrale (2e session, 1877) : « Sur les coniques circonscrites à un trapèze isoscèle. » (203-206).

Robaglia. — Solution de la composition proposée au Concours d'admission à l'École spéciale militaire (1877, 2e question) : « Résoudre l'équation $x+\sqrt{a^2x^2}=b$. » (206-207).

Soudat. — Solution de la composition proposée au Concours d'admission à l'École spéciale militaire (1877, 3e question) : « Pro-

blème de Géométrie sur les volumes engendrés par des figures tournant autour d'une droite. » (207-209).

Moret-Blanc. — Solution de la question proposée au Concours général de 1877 pour les Mathématiques spéciales : « Sur les surfaces du second degré jouissant d'une propriété déterminée. » (209-213).

Un abonné. — Solutions des questions proposées au Concours général de 1877. — *Mathématiques élémentaires :* « Sphères passant par un point et tangentes à deux plans. » — *Philosophie :* « Trièdres circonscrits à une sphère. » — *Rhétorique :* « Volumes engendrés par des figures tournant autour d'une droite. » — *Seconde :* « Propriété du triangle rectangle. » — *Troisième :* « Construction relative au triangle. » (213-218).

Jonquières (E. de). — Lettre à M. Gerono sur un caractère du nombre 5 et sur une propriété des réduites d'une certaine classe de fractions continues. (219-220).

Realis (S.). — Extrait d'une Lettre sur la question 1237. (221).

Gerono. — Remarques sur la question 1237. (221-223).

Genty. — Exercices sur le tétraèdre ; neuf énoncés, se rapportant surtout au tétraèdre *isoscèle* (celui dont les arêtes opposées sont égales deux à deux). (223-225).

Pellissier (A.). — Seconde solution de la question 1232 : « Propriété de la parabole osculatrice à une conique. » (225-227).

Lucas (Ed.). — Solution de la question 1239 : « Sur une équation du troisième degré. » (227-228).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1240 : « Sur une équation du troisième degré. » (228-229).

Pisani (F.). — Solution de la question 1243 : « Propriété des triangles circonscrits à une conique. » (229-230).

Dunoyer (E.). — Solution de la question 1247 : « Propriété de surfaces du second ordre à centre unique. » (230-231).

Beaujey. — Solution de la question 1252 : « Question de minimum relative à une construction de Géométrie plane. » (231-234).

Gambey. — Solution de la question 1253 : « Résolution d'un système de six équations du second degré. » (234-235).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1254 : « Formule d'Analyse combinatoire. » (236-237).

Questions proposées : 1255 à 1266. (237-240).

Jonquières (E. de). — Étude sur les décompositions en sommes de deux carrés du carré d'un nombre entier, composé de facteurs premiers de la forme $4n+1$, et de ce nombre lui-même. Formules et application à la résolution complète en nombres entiers des équations indéterminées simultanées $y = x^2 + (x+1)^2$ et $y^2 = z^2 + (z+1)^2$. (241-247, 289-310).

Cette remarquable étude est véritablement riche en résultats nouveaux et constitue un sérieux progrès dans l'Analyse indéterminée. Elle mérite d'être lue avec le plus grand soin et elle fait le plus grand honneur à l'auteur, dont le nom est déjà célèbre par ses travaux de Géométrie pure.

Catalan (E.). — Sur les questions 1248 et 1249 : « Sur certaines séries. » (252-258).

Thiébault (G.). — Note sur le système articulé de M. Peaucellier. (258-261).

Koehler. — Solution d'une question proposée par M. Realis : « Sur l'équation du troisième degré. » (261-262).

Moret-Blanc. — Démonstration d'un théorème proposé par M. Desboves : « Propriété du quadrilatère. » (263-264).

Dewulf (E.). — Démonstration d'un théorème fondamental de la théorie des figures homographiques dans l'espace. (265-267).

Ce théorème est celui des quatre points correspondants communs ; M. Dewulf en donne une démonstration élémentaire et en reproduit un énoncé plus complet que celui qu'on donne d'ordinaire ; ce nouvel énoncé est dû à M. Schoute, de Leyde.

Bergson (H.). — Solution de la question proposée au Concours général de 1877 pour la classe de Mathématiques élémentaires :

« Sur les sphères passant par un point et tangentes à deux plans donnés. » (268-276).

Agrégation des Sciences mathématiques (1877). — Énoncés des compositions. (276-277). — Sujets des leçons et autres épreuves. (278-280).

Correspondance. — M. G. Chambon : « Conique des neuf points. » — MM. F. Sautreau et Dunoyer : « Théorème de Pascal. » (281-282).

Publications récentes. — 1. Traité de Géométrie analytique, par A. Boset; Bruxelles, 1878. — 2. Sulla cinematica di un corpo solido, del prof. G. Bardelli; Milano, 1878. — 3. Greek Geometry, from Thales to Euclid, by G. Johnston; Dublin, 1877. — 4. Grundlagen der Ikonognosie, von Franz Tilšer; Prag, 1878. — 5. Théorie mathématique des opérations financières (2e édition), par H. Charlon; Paris, 1878. — 6. Théorie des intérêts composés et des annuités; par Fédor Thoman, traduit de l'anglais; Paris, 1878. (282-286).

Questions proposées. — 1267 à 1274 (287-288).

Genty. — Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École Normale en 1872 : « Surface du second degré coupée par une série de plans passant tous par l'un de ses points. » (310-316).

Tourrettes (A.). — Solution du problème de Mathématiques élémentaires donné au Concours d'agrégation de 1871 : « Sur un triangle dont on donne la bissectrice et la somme des deux côtés adjacents. » (316-319).

Tourrettes (A.). — Solution de la question de Mécanique élémentaire donnée au Concours d'agrégation de 1872 : « Centre de gravité d'un système de circonférences. » (319-320).

A. M. — Démonstrations directes de quelques propriétés connues relatives à la courbe enveloppe d'un segment de droite de longueur constante qui se meut dans un angle. (321-323).

Bibliographie étrangère. — Bullettino di Bibliografia e di Storia

delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni; t. X, 1877. (323-325).

Correspondance. — M. Catalan : Extrait d'une Lettre sur la question 1257. (325).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1233 : « Propriété de l'ellipse. » (325-328).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1235 : « Problème relatif à l'ellipse. » (328-331).

Realis (*S.*). — Solution de la question 1238 : « Sur l'équation du troisième degré. » (331-332).

Morel (*A.*). — Solution de la question 1258 : « Propriétés du triangle. » (332-333).

Morel (*A.*). — Solution de la question 1260 : « Propriétés de la circonférence. » (333-335).

Questions proposées. — 1275 à 1278. (335-336).

Laguerre. — Sur les courbes du quatrième degré qui ont trois points doubles d'inflexion, et en particulier sur la lemniscate. — (337-351).

Étude contenant des résultats dignes d'intérêt. *Voir* du même auteur : « Sur les singularités des courbes de quatrième classe » (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 365).

Vidal (*V.*). — Résolution des équations numériques du quatrième degré. (367-370).

Dostor (*G.*). — Inscription dans le cercle des quatre polygones réguliers de trente côtés. (370-374).

Jonquières (*E. de*). — Détermination de certains cas généraux où l'équation $x^3 \pm a = y^2$ n'admet pas de solutions en nombres entiers. (374-380).

Realis (*S.*). — Scolies pour un théorème de Fermat. (381).

Le théorème en question est celui-ci : « Tout nombre entier est la somme de trois nombres triangulaires. »

Gerono. — Note sur la résolution en nombres entiers positifs du sys-

tème des trois équations $x = u^2$, $x + 1 = 2v^2$, $2x + 1 = 3w^2$. (381-383).

M. Gerono déduit la solution unique, déjà donnée par M. Éd. Lucas, d'un théorème de M. de Jonquières, donné plus haut dans le même *Recueil*, page 308. (*Voir* ci-dessus).

Questions proposées. — 1279 à 1282 (383-384).

Un ancien élève de Mathématiques spéciales. — Solution de la composition mathématique pour l'admission à l'École Polytechnique, et remarques sur cette question. (408-413).

La question est celle-ci : « On donne deux axes rectangulaires qui se coupent en O, et une droite N qui rencontre ces axes en a et b : on demande le lieu du pôle de N par rapport aux coniques qui coupent cette droite à angle droit, et dont les axes sont dirigés suivant Oa et Ob. » L'élégance de la solution, purement géométrique, nous donne à penser que l'« ancien élève de Mathématiques spéciales » pourrait bien être l'un des géomètres actuels les plus connus et les plus appréciés.

Gambey. — Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'agrégation en 1876 : « Équation générale de certaines surfaces de révolution du second ordre. » (414-418).

Jonquières (*E. de*). — Décomposition du carré d'un nombre N et de ce nombre lui-même en sommes quadratiques de la forme $x + ty^2$, t étant un nombre rationnel positif ou négatif ; résolution en nombres entiers du système des équations indéterminées $y = x^2 + t(x+\alpha)^2$, $y^2 = z^2 + t(z+\beta)^2$. (419-424, 433-446).

Lucas (*Éd.*). — Sur l'équation indéterminée $X^3 + Y^3 = AZ^3$. (425-426).

M. Lucas démontre que, pour qu'il y ait des solutions entières, il faut et il suffit que A appartienne à la forme $xy(x+y)$, préalablement débarrassée de ses facteurs cubiques.

Hilaire. — Lettre sur le problème donné en Mathématiques élémentaires au Concours général de 1877. (426-428).

Publications récentes. — 1. Teoria generale dei logaritmi, per P. Caminati; Novara, 1878. — 2. Démonstration de deux théorèmes analogues, en Géométrie de l'espace, à celui de Pascal en Géométrie plane, par P. Sautreaux; 1878. — 3. Théorèmes

d'Arithmétique, par Éd. Lucas ; Turin, 1878. — 4. Mémoire sur les lois de réciprocité relatives aux résidus de puissances, par le P. Pepin. (428).

Hugo (*L.*). — Remarques sur les propriétés du nombre 10. (429).

Brocard (*H.*). — Solution de la question 140 : « Projection conique de deux hyperboles conjuguées. » (429-430).

Delmas (*E.*). — Solution de la question 1255 : « Propriété du triangle. » (430-432).

Questions proposées. — 1285 à 1287. (432).

Lucas (*Éd.*). — Sur le système des équations indéterminées $x^2 - Ay^2 = u^2$, $x^2 + Ay^2 = v^2$. (446-453).

Article plein d'intérêt, qui s'ajoute utilement aux autres travaux du même auteur sur l'analyse indéterminée.

Realis (*S.*). — Note sur quelques équations indéterminées du troisième degré. (454-457).

Haillecourt (*A.*). — Foyers des surfaces du second ordre. (457-461).

Concours d'admission a l'École Polytechnique (1878): « Énoncés des compositions. (461-462).

Marchand (*D.*). — Lettre sur une question de M. Realis sur les nombres carrés et triangulaires. (462-464).

Meyl (*A.-J.-J.*). — Solution de la question 1194 : « $\frac{n(n+1)(n+2)}{b}$ n'est un carré que si $n = 1$, 2 ou 48. » (464-467).

Realis (*S.*). — Solution de la question 1251 : « Propriété de l'expression $bxy(3x^4 + y^4)$. » (468).

Michel. — Solution de la question 1261 : « Enveloppe d'une droite. » (469-471).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1265 : « Enveloppe des polaires d'un point fixe par rapport à une circonférence mobile. » (471-473).

Lacazette (*A.*). — Solution de la question 1271 : « Géométrie de la droite et du plan : lieu géométrique. » (473-475).

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question 1273 : « Dans un triangle, p étant le demi-périmètre et r le rayon du cercle inscrit, on a $p^2 > 27r^2$. » (475-476).

Virieu (*J. de*). — Solution de la question 1274 : « Sur l'équation indéterminée $24x^2 + 1 = y^2$. » (476-477).

Genese (*R.-W.*). — Solution de la question 1276 : « Propriété du triangle. » (477).

Lez (*H.*). — Solution de la question 1276. (478-479).

Questions proposées. — 1288 à 1294.

Laisant (*A.*). — Réflexions sur la cinématique du plan. (481-507).

Application de la méthode des équipollences à quelques questions relatives à la cinématique du plan. Voici les principales divisions de cet article : Préliminaires. — Mouvement d'un point; vitesses. — Accélérations. — Accélérations centrales. — Autres propriétés des accélérations. — Accélérations des divers ordres. — Mouvement d'une figure dans un plan. — Problème. (*Voir* Bellavitis, « Exposition de la méthode des équipollences »; traduction française).

Lucas (*Éd.*). — Sur l'analyse indéterminée du troisième degré et sur la question 802. (507-514).

Les considérations très-intéressantes que produit M. Lucas sur les équations indéterminées du troisième degré le conduisent à la solution de la question 802, posée depuis bien des années par M. Sylvester, et que personne n'avait encore abordée.

Jonquières (*E. de*). — Au sujet du cas d'impossibilité d'une solution en nombres entiers de l'équation $x^3 \pm a = y^2$. (514-515).

Correspondance. — M. Landri : « Coordonnées trilinéaires. » — M. Goldenberg : « Sur la question 1255. » — Anonyme : « Solution d'un problème de Mathématiques élémentaires du Concours d'agrégation de 1871 » (*voir* même *Recueil*, p. 316). — M. Catalan : « Conique de neuf points; propriété du nombre 10. » — M. Lacazette : « Sur la question 1276. » (516-519).

Publications récentes. — 1. Ricerche sulle equazioni algebrico-

 A. L.

NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE, rédigée par E. CATALAN, avec la collaboration de MM. MANSION, LAISANT, BROCARD, NEUBERG et ÉD. LUCAS (¹).

Tome IV; 1878.

Lucas (Éd.). — Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques (suite; *voir* t. III, p. 369, 401). (1-8, 33-40, 65-71, 97-103, 129-134, 225-228).

Suite de l'important Mémoire analysé partiellement dans le Tome précédent du *Bulletin*. — VII. *Relations des fonctions* U_n, V_n *avec la théorie de la divisibilité*. 1° Posons $\alpha = a^r$, $\beta = b^r$; divisons $\alpha^n - \beta^n$ par $\alpha - \beta$, que n soit pair ou impair; $\alpha^n - \beta^n$ par $\alpha + \beta$ si n est pair, $\alpha^n + \beta^n$ par $\alpha + \beta$ si n est impair. Nous trouverons des formules remarquables pour les quotients $U_{nr} : U_r$, $U_{nr} : V_r$, $V_{nr} : V_r$. On en déduit que U_m est divisible par U_n si m est divisible par n, etc., puisque U_m ou V_m ne peuvent être premiers que si m est premier. 2° De $V_n = \left(\frac{P+\delta}{2}\right)^n + \left(\frac{P-\delta}{2}\right)^n$ on déduit $V_n = P^n +$ multiple de Q. Ensuite $V_n^2 - \delta^2 U = 4Q^n$. De ces deux relations on peut conclure que U_n, V_n sont premiers entre eux. — VIII. *Formules concernant l'addition des fonctions* U_n, V_n. Ces formules correspondent à celles de la théorie des lignes trigonométriques. La plus simple, écrite sous la forme

$$2\frac{U_{m+n}}{U_n} = \frac{U_m}{U_n} V_n + V_m,$$

multipliée par le rapport $(U_{m+n-1}, U_{m+n-2}, \ldots, U_{m+1}) : (U_{n-1}, U_{n-2}, \ldots, U_1)$, donne cette proposition : « Le produit de n termes consécutifs de la série U_n est divisible par le produit des n premiers termes ». Ce paragraphe se termine par quelques formules importantes, faciles à établir, qui sont la base de la *théorie des fonctions numériques doublement périodiques*. — IX. *De la somme des carrés des fonctions* U_n, V_n. L'auteur trouve, comme cas particulier de formules très-générales, la valeur de

$$\mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=n+1} \frac{U_{kr}^2}{Q^{kr}}, \quad \mathop{\mathrm{S}}_{k=0}^{k=n} \frac{U_{2kr+r}^2}{Q^{2kr+r}},$$

et des sommes analogues pour les V_n. — X. *Digression sur la théorie des formes*. Notions historiques. Démonstration du théorème d'Euler : un nombre premier ne peut se mettre que d'une seule manière sous la forme $x^2 + ky^2$, k étant un nombre positif donné. — XI. *Des formes linéaires et quadratiques des diviseurs de* U_n *et de* V_n. (a) Tables des formes linéaires $4\Delta + r$ des diviseurs impairs de $x^2 \pm \Delta y^2$, pour

(¹) Voir *Bulletin*, 1re série, t. VIII, p. 217, t. X, p. 146; 2e série, t. I, p. 269, t. II, p. 111. La *Nouvelle Correspondance mathématique* paraît mensuellement par livraison de deux feuilles. Prix d'abonnement pour la Belgique, 10 francs par an; pour l'Union postale, 12 francs.

Δ non multiple d'un carré. (b) Théorèmes. Si n est impair, U_n est diviseur de la forme quadratique $x^2 - Qy^2$; si n est pair, V_n est diviseur de la forme quadratique $x^2 + \Delta y^2$; si n est impair, V_n est diviseur de la forme quadratique $x^2 + Q\Delta y^2$. Application aux séries de Fibonacci, de Fermat et de Pell. — XII. *Des relations entre les fonctions U_n, V_n et la théorie du plus grand commun diviseur.* De la formule $2U_{m+n} = U_m V_n + U_n V_m$ on déduit que le plus grand commun diviseur de U_m et U_n est, à des facteurs 2 près, U_D, si D est le plus grand commun diviseur de m et n. — XIII. *De la multiplication des fonctions numériques.* On trouve de proche en proche, U_0, U_1 étant deux fonctions U consécutives, V_0, V_1 deux fonctions V consécutives,

$$U_{n+1} = \Phi_n U_1 - Q\Phi_{n-1} U_0, \quad V_{n+1} = \Phi_n V_1 - Q\Phi_{n-1} V_0,$$

$$\Phi_n = P^n - \frac{n-1}{1} P^{n-2} Q + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} P^{n-4} Q^2 - \ldots.$$

Si $U_1 = 1$, $U_0 = 0$, $U_{n+1} = \Phi_n$, ... On généralise ces résultats en changeant P en V_r, Q en Q^r, comme plus haut. — XIV. *Autres formules de multiplication des fonctions numériques.* Expressions de U_{np}, V_{np} en fonction entière de U_n, V_n, analogues aux formules de Moivre donnant $\cos kx$ en fonction de $\cos x$, etc. — XV. *Formules de duplication.* Les formules

$$V_{2n} = \Delta U_n^2 + 2Q^n, \quad V_{2n} = V_n^2 - 2Q^n,$$

conduisent au théorème : « Les diviseurs de V_{2n} sont des diviseurs des formes quadratiques $\Delta X^2 + 2Q^n Y$, $X^2 - 2Q^n Y^2$ ». La seconde, pour $Q = 2g^2$, $n = 2\mu + 1$, conduit au théorème : « Lorsque le produit $Q = ab$ est le double d'un carré, $V_{4\mu+2}$ est décomposable en un produit de deux facteurs entiers. » Ainsi, pour $Q = 2$, il vient $2^{58} + 1 = 5 \times 107367629 \times 536903681$. On tire des théorèmes semblables de la première formule. — XVI. *Sur les formules de décomposition des fonctions U_n et V_n.* Généralisation du théorème précédent. — XVII. *Formules de triplication.* — XVIII. *Des relations des fonctions U_n, V_n avec les radicaux continus.* En supposant P positif et Q négatif, on trouve $a = \lim \sqrt{-Q + P\sqrt{-Q + P\sqrt{-Q + \ldots}}}$. Les formules de duplication et de triplication donnent des résultats semblables. — XIX. *Développements de U_n^p, V_n^p, en fonction linéaire des termes dont les arguments sont des multiples de n.* Formules semblables à celles qui donnent $\cos^p z$, $\sin^p z$ en fonction des sinus et cosinus des multiples de z. — XX. *Autres formules de développement pour U_{nr}, V_{nr}.* Soient

$$\alpha = \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 4h}}{2}\right)^n, \quad \beta = \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 4h}}{2}\right)^n.$$

Les quantités α, β, $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ vérifient l'équation $4hD_0^{p+2} = (p^2 - n^2)D_0^p$, où D_0 indique une dérivée par rapport à z, dans laquelle on a fait $z = 0$. Posant $z = V_r$, $h = Q^r$, on trouve le développement de V_{nr}, U_{nr} suivant les puissances de V_r, U_r, par la formule de Maclaurin.

Catalan (*E.*). — Sur le problème des partis. (8-11).

Si les probabilités des joueurs A et B pour faire un point sont α et β; s'il manque d'ailleurs, au joueur A, a points pour gagner la partie, b au joueur B,

la probabilité pour celui-ci de gagner la partie est $q = \beta^b \sum_0^{a-1} \frac{\overline{b-1+n}!}{\overline{b-1}!\,n!}$. On aura, par suite, si $p = q - 1$, $p = \beta^b (1-\alpha)^{-b} - q = \beta^b \sum_a^{\infty} \frac{\overline{b-1+n}!}{\overline{b-1}!\,n!}$. On déduit de là le théorème suivant : « La probabilité que A gagnera en $a+b-1$ coups est égale à la probabilité que B fera b points en un nombre de coups égal ou supérieur à $a+b$.

Van Aubel (*H.*). — Note concernant les centres des carrés construits sur les côtés d'un polygone quelconque. (40-44).

Brocard (*H.*). — Notes sur divers articles de la *Nouvelle Correspondance*. (45-50, 135-142).

Mansion (*P*). — Extraits analytiques. (51-52).

Notice, d'après M. Siacci, sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.

Catalan (*E.*). — Quelques quadrateurs. (53-58).

Renseignements curieux sur quelques quadratures du cercle, la plupart assez récentes. Voici deux des valeurs de π trouvées par les auteurs de ces quadratures. 1° $\pi = 3{,}15$; 2° $\pi = 2(1 + \cos 54°) = 3{,}17557\ldots$.

Mansion (*P.*). — Sur le théorème de Fermat. (72-78).

Exposé de la deuxième démonstration du théorème de Fermat, due à Euler, en regardant cette proposition comme identique au principe fondamental de la théorie des fractions périodiques. Notice sur le théorème : la démonstration que Poinsot s'est attribuée appartient en réalité à M. Catalan.

Le Paige (*C.*). — Sur une transformation de déterminants (79-82).

De Longchamps (*G.*). — Sur les fonctions U_n, V_n de M. É. Lucas. (83-84).

Catalan (*E.*). — Théorèmes de MM. Smith et Mansion. (103-112).

Démonstration simplifiée du théorème de M. Smith, publié par ce savant dans les *Proceedings* de la Société Mathématique de Londres, en 1876 (t. VII, p. 108-112), et d'un théorème que M. Mansion en a déduit.

Dewulf (*Ed.*). — Note sur la question 173. (112-114).

Neuberg (*J.*). — Quelques propriétés du triangle. (142-145).

Une question anglaise. — (145-146).

Catalan (*E.*). — Sur la méthode des isopérimètres. (147-148).

Soient

$$R_n = \sqrt{R_{n-1} r_n}, \quad 2r_n = r_{n-1} + R_{n-1}, \quad 2r_0 = 1, \quad 2R_0 = \sqrt{2};$$

on aura

$$4 = \pi [R_0 + r_0 + (R_1 - r_1) + (R_2 - r_2) + \ldots].$$

Mennesson (*P.*). — Sur le théorème de Sturm. (152-153, 212).

Soient $X = 0$ une équation n'ayant que des racines simples, X_1, X_2, ..., X_n les fonctions de Sturm. On trouve $\Phi_{q-1} X_p + X_{p+q+1} = F_q X_{p+1}$, Φ_{q-1}, F_q étant des fonctions de degré $q-1$, q. Il résulte de là, en général, que X_p, X_{p+q+1} ne peuvent avoir plus de q racines communes.

Mansion (*P.*). — Propriété fondamentale des équations linéaires différentielles. (154-155).

Une équation linéaire d'ordre n en y, x se ramène à une autre équation linéaire d'ordre $n-1$, en posant $y = z\int t\,dx$, z étant une solution particulière. L'équation en t se transforme en une autre équation en u, linéaire et d'ordre $n-1$, en posant $u = zt = y' - \frac{z'}{z} y$.

Brocard (*H.*). — Notes élémentaires sur le problème de Pell. (161-169, 193-200, 228-232).

Exposé de la solution de Lagrange; application de sa méthode à la résolution algébrique des équations indéterminées $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = -1$. Notes bibliographiques.

Lucas (*Éd.*). — Sur un principe fondamental de Géométrie et de Trigonométrie. (85-86, 169-176, 200-204).

1. *Lemme.* — Les puissances d'un point par rapport à cinq cercles d'un plan, ou par rapport à six sphères de l'espace, sont liées entre elles par une équation linéaire homogène, dans laquelle la somme des coefficients est nulle. 2. *Théorème fondamental.* — Appelons *puissance mutuelle* de deux cercles ou de deux sphères dont les rayons sont r_m, r_n et la distance des centres d_{mn} l'expression a_{mn} telle que $d_{mn}^2 = r_m^2 + r_n^2 - 2a_{mn} r_m r_n$. Cela posé, le déterminant $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55}$ de cinq cercles dans un plan, ou le déterminant $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{66}$ de six sphères dans l'espace est identiquement nul. 3. Cette relation reste vraie si les cercles ou les sphères se réduisent à des points, des droites ou des plans, moyennant diverses conventions très-naturelles. 4. Applications innombrables : en général, toute propriété exprimant une relation entre des points, des droites et des plans s'étend au système obtenu en remplaçant ces points, ces droites et ces plans par des cercles et des sphères (*Principe de mutualité*).

Le Paige (*C.*). — Sur un théorème de M. Mansion. (176-178).

Proth (*F.*). — Propriété des nombres de la forme $bx+1$. (179-181).

De Polignac (*C.*). — Théorème d'Arithmétique. (181-183).

Postula (*H.*) et *Catalan* (*E.*). — Sur un problème d'Arithmétique. (204-209).

Le double de la somme des nombres premiers et non supérieurs à n est égal à $n\varphi(n)$, comme on le voit, en remarquant, avec M. Catalan, que ces nombres peuvent être associés, deux à deux, de manière à avoir une somme égale à n.

Réalis (*S.*). — Note sur un théorème d'Arithmétique. (209-210).

Tout nombre est la somme de quarante-sept nombres bicarrés, dont six au moins sont égaux.

Le Paige (*C.*). — Sur un théorème de M. Catalan. (232-236).

Proth (*F.*). — Sur la série des nombres premiers. (236-240).

Soient écrites la série naturelle des nombres premiers, puis leurs différences premières prises positivement; puis les différences de celles-ci, et ainsi de suite indéfiniment. Le tableau triangulaire des différences jouit de propriétés curieuses : la première colonne oblique, par exemple, est 1 0 1 0 1 0 indéfiniment.

Mennesson (*P.*). — Sur le cercle des neuf points. (241-242).

Brocard (*H.*), *Catalan* (*E.*), *Mansion* (*P.*). — Sur une prétendue incorrection de langage. (242-247, 360-362).

M. Catalan trouve l'expression « la parabole $y^2=2px$ » incorrecte et est d'avis qu'on ne doit pas l'employer; M. Brocard, qu'on peut l'employer, à cause de sa brièveté, quoiqu'elle soit incorrecte; M. Mansion, qu'elle est seule correcte et doit être employée, parce que, en Géométrie analytique, on considère aussi bien les points imaginaires que les points réels.

Mansion (*P.*). — Sur la transformation harmonique linéaire. (257-261, 313-318).

La transformation harmonique linéaire, définie par les relations

$$(z+a)(z'+a)=zz',\quad xy'=x'y,$$

est la seule transformation linéaire réversible. (Ce théorème se trouve déjà, croyons-nous, dans von Staudt, *Geometrie der Lage*.) [P. M.]

Van Aubel (H.). — Sur un lieu géométrique. (261-272).

De Tilly (J.-M.). — Sur la résolution des problèmes qui exigent des constructions dans l'espace, avec la règle et le compas. (272-278).

Principes — 1. Étant donnée une figure à trois dimensions, on peut trouver sur cette figure autant de points que l'on veut, appartenant à un même plan, en décrivant, de deux points quelconques comme centres, deux courbes sphériques de même rayon, se coupant sur la figure donnée, puis répétant la même construction autant de fois qu'on voudra. Tous les points d'intersection obtenus appartiendront à un même plan. Il suffira d'en construire trois pour déterminer le plan, cinq pour déterminer une conique dans ce plan. 2. Pour projeter un point O quelconque de la figure sur un plan déterminé par trois points D, E, F, on décrira dans le plan DEF, ou dans un plan où le triangle DEF a été reporté, trois circonférences ayant respectivement pour centre ces trois points et pour rayons les distances DO, EO, FO. Le point unique (centre radical), intersection des trois cordes communes, est la projection de O sur DEF. 3. On peut reporter par autant de points qu'on voudra sur la figure dans l'espace un plan P représenté dans l'épure, pourvu que les intersections de la figure par trois plans quelconques soient des lignes l, m, n dont on peut trouver les points de rencontre avec une droite. Pour cela, on construira sur la figure dans l'espace trois plans auxiliaires (principe 1); on reportera ces trois plans sur deux plans de projection d'une épure (principe 2); on cherchera les droites d'intersection du plan P, avec ces trois plans auxiliaires, sur l'épure; puis les points de rencontre de ces droites avec les lignes l, m, n. On reportera les points de rencontre sur la figure. *Applications :* Mener une génératrice d'un cône ou d'un cylindre du deuxième degré, dont une portion quelconque est donnée. Trouver les sommets et les axes d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde de révolution.

De Longchamps (G.). — Théorèmes sur les normales aux coniques à centre. (279-281).

Lucas (Éd.). — Remarques sur la question 280. (282-283).

Cesaro (E.). — Quelques propriétés de la courbe représentée par $u = R\frac{\sin\omega}{\omega}$. (283-284).

Bouniakovsky (V.). — Nouveau cas de divisibilité des nombres de la forme $2^{2^m}+1$. (284-285).

Tchebychef. — Sur une transformation de séries numériques. (305-308). Notes du rédacteur. (308-313).

On a

$$\text{(T)} \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\infty} lx.fx = \mathrm{S}' lx.\mathrm{F}x, \quad \mathrm{F}x = \mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty} \mathop{\mathrm{S}}_{m=1}^{m=\infty} f(nx^m),$$

x, dans la somme S', étant fait égal successivement à tous les nombres premiers. Cette formule comprend comme cas particuliers celles qui ont été données par A. de Polignac et Tchebychef lui-même, relativement à la répartition des nombres premiers. M. Catalan établit, d'une manière simple, aussi bien ces formules particulières que la formule générale (T).

Genocchi. — Sur une formule de Libri. (319-323).

Exposition simplifiée d'une méthode de résolution de l'équation indéterminée $by - ax = c$.

Lucas (*Éd.*). — Sur la décomposition des nombres en bicarrés. (323-325).

Tout nombre entier est la somme de quarante-cinq bicarrés.

Realis (*S.*). — Note sur quelques équations indéterminées. (325-328, 346-352, 369-371).

Neuberg (*J.*).— Sur l'addition des fonctions elliptiques. (343-346).

Soit $\Delta\gamma = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\gamma}$. Posons $\frac{d\alpha}{dt} = \Delta\alpha$, $\frac{d\beta}{dt} = -\Delta\beta$, on trouve

$$\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} \pm \frac{d^2\beta}{dt^2}\right) : \left(\frac{d\alpha}{dt} \pm \frac{d\beta}{dt}\right) = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\sin(\alpha \mp \beta)} \left(\frac{d\alpha}{dt} \mp \frac{d\beta}{dt}\right),$$

dont l'intégrale est $\Delta\alpha \mp \Delta\beta = C \sin(\alpha \mp \beta)$. Si $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ sont deux points d'une ellipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, telle que $k^2 a^2 = a^2 - b^2$, posons $x_1 = a_1 \cos\alpha$, $y_1 = b_1 \sin\alpha$, $x_2 = a \cos\beta$, $y_2 = b \cos\beta$. La relation $\Delta\alpha - \Delta\beta = C \sin(\alpha - \beta)$ deviendra $\frac{1}{M_1 H_1} - \frac{1}{M_2 H_2} = \text{const.}$, $M_1 H_1$, $M_2 H_2$ étant les hauteurs du triangle $OM_1 M_2$. L'équation $\frac{d\alpha}{\Delta\alpha} - \frac{d\beta}{\Delta\beta} = 0$ a pour intégrale $\Delta\alpha + \Delta\beta = C \sin(\alpha - \beta)$, qui conduit de même à $\frac{1}{M_1 H_1} + \frac{1}{M_2 H_2} = \text{const.}$ On déduit de là ce beau théorème : « Déterminons sur une ellipse une suite de points $M_1, M_2, M_3, \ldots$, tels que, dans les triangles $OM_1 M_2$, $OM_2 M_3$, ..., les inverses des hauteurs partant des points M aient une somme constante. Si le point M_n coïncide avec M_1, le polygone $M_1 M_2 \ldots M_n$ se ferme quel que soit le point M_1 de l'ellipse. »

Catalan (*E.*). — Décomposition d'un cube en quatre cubes. (352-354, 371-373).

Van Aubel (*H.*). — Deux propriétés générales des courbes du troisième degré. (355-356).

Falk (*M.*). — Sur une propriété des déterminants nuls. (373-376).

Démonstration rigoureuse du théorème : « Pour qu'un déterminant soit nul, il faut

P. M.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome LXXXVIII; 1879, 1er trimestre.

N° 1; 6 janvier.

N° 2; 13 janvier.

Villarceau (*Y.*). — Sur l'établissement des arches de pont réalisant le maximum de stabilité. (45).

Cailletet. — Recherches sur la compressibilité des gaz. (61).

Baillaud (*B.*). — Observations des satellites de Jupiter, faites à l'Observatoire de Toulouse en 1877 et 1878, avec le grand télescope Foucault. (77).

Thollon (*A.*). — Nouveau prisme composé pour spectroscope à vision directe, de très-grand pouvoir dispersif. (80).

Laurent (*L.*). — Sur le spectroscope de M. Thollon. (82).

Renou (*E.*). — Sur la détermination des variations de niveau d'une surface liquide. (84).

N° 3; 20 janvier.

Tisserand (*F.*). — Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où, les excentricités étant petites, l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable. (97).

Dans ce cas, ainsi que Le Verrier l'a montré, le développement de la fonction perturbatrice peut être pénible, mais reste possible. M. Tisserand donne la forme générale du développement, qui peut être très-utile pour certaines petites planètes; pour y parvenir, il met à profit une partie des résultats obtenus par Jacobi dans son Mémoire intitulé *De evolutione expressionis* $2(l + 2l' \cos\varphi + l'' \cos\varphi')^{-n}$ (*Journal de Crelle*, t. 15).

Becquerel (*H.*). — Sur les propriétés magnétiques temporaires développées par influence dans divers échantillons de nickel et de cobalt, comparées à celles du fer. (111).

Laguerre. — Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre. (116).

Si dans une telle équation on change d'abord la variable indépendante x en faisant $x = f(z)$, puis l'inconnue y en faisant $y = \mathrm{V}(z)u$, on obtient une équation de même forme en z, u. M. Laguerre détermine des *invariants* des coefficients de l'équation primitive, se reproduisant après les transformations indiquées, à un fac-

teur près, qui ne dépend que des formules mêmes de ces transformations, et utilise ses résultats pour montrer comment, au moyen de simples quadratures, toute équation linéaire du troisième ordre peut être ramenée à la forme

$$\frac{d^3u}{dz^3} + 2F(z)\frac{du}{dz} + [F'(z) + \tfrac{1}{2}]\,u = 0.$$

Cros (*C.*). — Sur la classification des couleurs et sur les moyens de reproduire les apparences colorées au moyen de trois clichés photographiques spéciaux. (119).

Hugues. — Recherches sur les effets d'induction à travers les circuits téléphoniques au moyen du microphone et du téléphone. (122).

Héraud (*A.*). — Nouvel élément voltaïque à courant constant. (124).

N° 4; 27 janvier.

Tisserand (*F.*). — Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où, les excentricités étant petites, l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable. (137).

Saint-Venant (*de*). — Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion. (142).

Lockyer. — Recherches sur les rapports de l'analyse spectrale avec le spectre du Soleil. (148).

Cruls. — Sur les diamètres du Soleil et de Mercure déduits du passage du 6 mai 1878. (162).

Bjerknes. — Hydro-électricité et hydromagnétisme; résultats analytiques. (165).

Picard (*E.*). — Sur un développement en série. (167).

Si dans le système

$$x = f(\lambda, \theta),$$
$$y = f_1(\lambda, \theta)$$

les courbes obtenues en faisant varier θ sont fermées, si les courbes $\lambda = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ sont orthogonales, si enfin le rapport $\frac{\partial f}{\partial \lambda} : \frac{\partial f_1}{\partial \theta}$ est simplement une fonction de λ, $F(\lambda)$, toute fonction $\varphi(z)$ de la variable imaginaire z, uniforme et continue dans l'intervalle compris entre les deux courbes correspondantes aux valeurs λ_1 et λ_2

du paramètre λ, sera développable en une série procédant suivant les puissances entières, positives et négatives de

$$R(\lambda)(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \text{où} \quad R(\lambda) = e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(\lambda)\,d\lambda},$$

en supposant que la fonction $R(\lambda)$ varie toujours dans le même sens quand λ varie de λ_1 à λ_2.

Thollon. — Déplacement de raies spectrales dû au mouvement de rotation du Soleil. (169).

Violle (J.). — Sur la radiation du platine incandescent. (171).

Crookes (W.). — Sur l'illumination des lignes de pression moléculaire, et sur la trajectoire des molécules. (174).

Du Moncel (Th.). — Observations relatives à la Communication précédente (176).

Meaux (H. de). — Sur les phénomènes électrodynamiques, et en particulier sur l'induction. (177).

Gower. — Sur un nouveau téléphone Bell, parlant à haute voix. (179).

N° 5; 3 février.

Tisserand (F.). — Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où, les excentricités étant petites, l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable. (201).

Suite et fin de l'importante Communication du 20 janvier.

La Gournerie (de). — Sur l'invention des diverses dispositions de l'héliomètre. (215).

Laguerre. — Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires. (224).

Analogies entre ces invariants et les covariants de la forme algébrique correspondante.

Fouret (G.). — Sur le mouvement d'un corps qui se déplace et se déforme en restant homothétique à lui-même. (227).

André (D.). — Intégration, sous forme finie, de trois espèces

d'équations différentielles linéaires à coefficients quelconques. (230).

Les équations traitées par M. D. André appartiennent à la classe des équations relatives à la fonction Y et à la variable x, telles qu'en les différentiant assez de fois, puis faisant $x = 0$ dans le résultat, on arrive à une équation de cette forme

$$A_0 F(n) Y_0^{(n)} + A_1 F(n-1) Y_0^{(n-1)} + \ldots + A_k F(n-k) Y^{(n-k)} = 0,$$

qui subsiste pour toutes les valeurs de n supérieures à un entier déterminé, dans laquelle les Y représentent pour $x = 0$ les dérivées de la fonction Y, où $F(n)$ est une fonction quelconque de n, et où les coefficients A, ainsi que l'entier k, sont indépendants de n.

Malarce (*de*). — Extension du système métrique des poids et mesures; développement de systèmes monétaires conformes ou concordants dans les divers États du monde civilisé. (233).

Ogier. — Liquéfaction de l'hydrogène silicié. (236).

N° 6; 10 février.

Farkas (*F.*). — Note sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. (273).

Combescure (*E.*). — Remarques sur les équations différentielles du troisième ordre. (275).

Une telle équation, au moyen d'une solution particulière d'une équation différentielle du second ordre et de deux quadratures, peut être ramenée à la forme binôme.

Boussinesq. — Sur une manière simple de présenter la théorie du potentiel et sur la différentiation des intégrales dans les cas où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie. (277).

Bjerknes. — Hydro-électricité et hydromagnétisme; résultats expérimentaux. (280).

Crookes (*W.*). — De la lumière verte et phosphorescente du choc moléculaire. (283).

N° 7; 17 février.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'astronome

royal, M. G.-B. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le quatrième trimestre de l'année 1878. (313).

Phillips. — Sur la détermination du coefficient d'élasticité des différents corps et de leur limite d'élasticité. (315).

Gruey. — Sur la toupie de Foucault transformée en pendule gyroscopique. (328).

Saltel. — Sur la détermination du nombre de points doubles d'un lieu défini par des conditions algébriques. (329).

Boussinesq. — Application des potentiels directs de Lamé au calcul de l'équilibre d'élasticité d'un solide isotrope et homogène indéfini, sollicité dans une étendue finie par des forces extérieures quelconques. (334).

Amagat. — Recherches sur la compressibilité des gaz à des pressions élevées. (336).

Korteweg. — Note à propos du phénomène observé par M. Duter. (338).

Ducretet. — Perfectionnements apportés à la lampe électrique d'Harrison. (350).

N° 8; 24 février.

Du Moncel (Th.). — Sur les courants induits résultant du mouvement d'une bobine à travers un système électromagnétique. (353).

Becquerel (E.). — Observations à propos d'un Ouvrage de M. G. Planté, intitulé « Recherches sur l'électricité ». (359).

Baillaud (B.). — Observations des éclipses des satellites de Jupiter, faites à l'Observatoire de Toulouse en 1878. (373).

Zenger. — Photographie directe des protubérances solaires, sans l'emploi du spectroscope. (374).

Boussinesq. — Lois géométriques des déformations que produit une force appliquée en un point d'un solide indéfini, et calcul

des erreurs que l'on commet lorsque l'on conçoit ce point déplacé dans la direction de la force. (376).

Crookes (*W.*). — Propriétés des ombres moléculaires. (378).

Cros (*C.*). — De l'action des différentes lumières solaires sur une couche de bromure d'argent imprégnée de diverses matières colorantes organiques. (379).

Becquerel (*E.*). — Observations relatives à la Communication de M. Cros. (381).

N° 9; 3 mars.

Stephan. — Découverte d'une petite planète à l'Observatoire de Marseille. (412).

Ferrari (*D.*). — Lettre relative à la planète intra-mercurielle. (413).

Gasparis (*de*). — Formules relatives à la théorie des perturbations planétaires. (413).

Halphen. — Sur la multiplication des fonctions elliptiques. (414).

Sur une classe de polynômes à deux variables qui s'introduisent dans la théorie de la multiplication de l'argument, et auxquels se rattache une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y(y+1) - 4x}{8y - 1},$$

qui jouit de la curieuse propriété de se reproduire elle-même par une infinité de transformations rationnelles.

Pellet (*A.*). — Résolution d'une classe de congruences. (417).

Sur la congruence

$$A t^m + B u^n + C \equiv 0 \pmod{p},$$

où le module premier p ne divise aucun des nombres A, B, C.

Gouy. — Du pouvoir émissif des flammes colorées. (418).

N° 10; 10 mars.

Prix des Sciences mathématiques, proposés pour 1879, 1880, 1881, 1882 et 1883.

Grand prix des Sciences mathématiques (1880). — Étude de l'élasticité d'un ou de plusieurs corps cristallisés, au double point de vue expérimental et théorique.

Grand prix des Sciences mathématiques (1880). — Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante.

Prix Poncelet. — Décerné à l'auteur de l'Ouvrage le plus utile aux progrès des Sciences mathématiques pures et appliquées.

Prix Montyon. — Mécanique.

Prix Plumey. — Décerné à l'auteur du travail le plus important sur le perfectionnement des machines à vapeur ou de toute autre invention qui aura le plus contribué au progrès de la navigation à vapeur.

Prix Dalmont. — Décerné aux ingénieurs des Ponts et Chaussées qui auront présenté à l'Académie le meilleur travail ressortissant à l'une de ses sections.

Prix Fourneyron (1879). — Construction d'une machine motrice propre au service de la traction sur les tramways.

Prix Bordin (1880). — Question déjà proposée pour 1876 [1].

Prix Lalande. — Astronomie.

Prix Damoiseau (1879). — Question déjà proposée pour 1876.

Prix Valz. — Décerné à l'auteur de l'observation astronomique la plus intéressante qui aura été faite dans le courant de l'année 1879.

N° 11; 17 mars.

Jamin. — Sur un brûleur et un chalumeau électriques. (541).

Decharme. — Note sur la correspondance entre les figures acoustiques de Chladni et les réseaux liquides produits sur les plaques circulaires vibrantes. (553).

Coggia. — Observations de la planète (193), découverte à l'Observatoire de Marseille. (556).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XII, IIe Partie, p. 33.

Henry (*Paul* et *Prosper*). — Sur un nouveau télescope catadioptrique. (556).

Escary. — Démonstration de la convergence d'une série double rencontrée par Lamé dans ses recherches de Physique mathématique. (558).

Halphen. — Sur l'intégration d'une équation différentielle. (562).

Suite des recherches (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 415), concernant l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y(y+1)-4x}{(8y-1)x}.$$

L'auteur donne l'intégrale générale de cette équation, intégrale qui est algébrique : il examine divers cas où, en vertu de certaines valeurs données à la constante arbitraire, le degré de l'équation qui lie x et y, degré qui est généralement égal à 12, s'abaisse à 4 et à 6.

Farkas (*J.*). — Sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. (565).

Liais (*E.*). — Sur un système de signaux de feu permettant la détermination des différences de longitude entre les diverses stations non reliées électriquement, d'une triangulation de parallèle ou de méridien. (568).

Cruls (*L.*) et *La Caille* (*J.*). — Sur la distribution de la chaleur à la surface du Soleil. Résultats de la première série des observations faites à l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. (570).

Geoffroy (*L.*). — Détermination de la valeur approchée d'un coefficient relatif à la viscosité de l'eau. (573).

Ader. — Nouvelles expériences sur les téléphones sans diaphragme. (575).

Du Moncel (*Th.*). — Observations relatives à la Communication de M. Ader. (578).

Resio (*C.*). — Note sur un téléphone hydro-électrique. (578).

N° 12; 24 mars.

Tempel. — Observations de la comète périodique de Brorsen. (637).

Gasparis (*de*). — Formules relatives aux perturbations des planètes. (637).

Pellet (*A*). — Sur les équations résolvantes. (638).

Le degré de l'équation résolvante d'une équation à coefficients entiers est un multiple des degrés des divers facteurs irréductibles en lesquels se décompose le premier membre de l'équation suivant un module premier quelconque.

Desboves. — Sur la résolution en nombres entiers de l'équation

$$aX^4 + bY^4 + dX^2Y^2 + fX^3Y^3 + gXY^3 = cZ^2.$$

(638).

Ader. — Vibrations moléculaires dans les métaux magnétiques pendant le passage des courants ondulatoires dans ces métaux. (641).

N° 13; 31 mars.

Coggia. — Observations de la planète (193) découverte à l'Observatoire de Marseille le 28 février 1879. (698).

Halphen. — Sur deux équations aux dérivées partielles relatives à la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques. (698).

Boussinesq. — Du potentiel cylindrique ou logarithmique à trois variables, et de son emploi dans la théorie de l'équilibre d'élasticité. (701).

Flammarion (*C.*). — Anomalie présentée par les observations magnétiques de Paris. (704).

Villari (*E.*). — Sur les lois thermiques et galvanométriques de l'étincelle électrique produite dans les gaz. (708).

Becquerel (*H.*). — Pouvoir rotatoire magnétique des gaz à la température et à la pression ordinaires. (709).

Bichat (*E.*). — Sur le pouvoir rotatoire magnétique des vapeurs. (712).

Bouty (*E.*). — Pression exercée par les dépôts galvaniques. (714).

N° 14; 7 avril.

Chevreul (*E.*). — Sur les pirouettes complémentaires. (727).

André (*D.*). — Sur la sommation d'une espèce particulière de séries. (739).

Sur la somme des séries convergentes, dont le terme général U_n est de la forme

$$U_n = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1.2.3\ldots n} u_n x^n,$$

n étant un entier quelconque non négatif, p un nombre quelconque, positif ou négatif, mais non entier, et u_n le terme général d'une série récurrente proprement dite quelconque.

Boussinesq (*J.*). — Des déplacements que produit, à l'intérieur d'un sol élastique, une pression normale exercée en un point de sa surface. (741).

Crookes (*W.*). — Foyer de la chaleur produite par les chocs moléculaires. (743).

Marié-Davy. — Réponse à la Note de M. Flammarion sur la déclinaison de l'aiguille aimantée. (745).

Houzeau (*A.*). — Sur le gravivolumètre. (747).

N° 15; 14 avril.

Aoust. — De la courbe lieu des positions des centres de courbure d'une courbe gauche après son développement sur une ligne droite. (768).

L'auteur suppose que le développement est effectué de manière à ne pas altérer l'angle dièdre de deux plans osculateurs consécutifs.

Dejean de Fonroque. — Sur diverses expériences faites avec un pendule oscillant avec de grandes amplitudes. (771).

Cornu. — Observations relatives à la Communication de M. Dejean de Fonroque. (771).

Flammarion (*C.*). — Anomalie des observations magnétiques de Paris. (773).

MÉMORIAL DE L'OFFICIER DU GÉNIE (¹).

2ᵉ Série. Tome XXV; 1876.

Le *Mémorial de l'Officier du Génie* s'est transformé, peu à peu, en un recueil technique, dans lequel les recherches scientifiques tiennent aujourd'hui une plus large place que par le passé. De très-nombreuses figures, intercalées dans le texte, ajoutent à l'intérêt de cette publication.

Le tome XXV renferme divers travaux qui se rattachent plus spécialement à l'art de l'ingénieur militaire; mais, pour rester fidèle à la règle que nous avons adoptée dans notre précédente analyse, nous mentionnerons ici au moins le titre de ces Mémoires.

Grillon. — Étude sur le casernement à l'étranger. (1-210, 136 figures).

Mangin (A.). — Étude de divers dispositifs optiques destinés à projeter la lumière électrique sur les objets éloignés. (211-289, 19 figures, 1 planche).

Curie. — Note sur la forme à adopter pour une lentille, afin qu'elle fasse converger rigoureusement en un point donné les rayons lumineux issus d'un autre point également donné. (290-328, 17 figures).

La détermination analytique conduit facilement à l'équation $\delta + n\delta' = c$, en coordonnées bipolaires. Cette propriété renferme le principe d'un premier dispositif permettant de tracer la courbe d'un mouvement continu.

L'auteur étudie ensuite les singularités de cette courbe, et décrit un système articulé donnant un tracé continu; puis il examine les cas particuliers pour lesquels la solution est simplement une conique. Mais, dans le cas général, il aurait été intéressant de rappeler que la condition de la question peut servir de définition géométrique aux ovales de Descartes, ainsi désignées depuis que leur inventeur a reconnu les curieuses propriétés de ces courbes, entre autres celle de réfracter, vers un foyer donné F′, les rayons lumineux issus d'un point donné F. Le point F′ doit ensuite être considéré comme source de lumière par rapport à la seconde face nécessaire à la constitution de la lentille dans l'appareil optique; mais il est évident que la méridienne de cette seconde face est également une ovale de Descartes.

La question se réduit donc à l'étude analytique de ces courbes, et nous n'avons insisté aussi longuement sur cette indication que pour rappeler cette désignation et cette remarquable propriété des ovales de Descartes, qui n'ont pas été signalées dans la Note du *Mémorial*, bien qu'elles soient classiques et données dans de

(¹) Voir *Bulletin*, t. XI, p. 244.

nombreux Ouvrages. Ces renseignements historiques auraient précisé l'état de la question, au moment où cette étude a été faite, c'est-à-dire vers 1851. L'élégante construction trouvée par Descartes pour la tangente aurait mérité une mention spéciale.

Ces courbes, dit M. Chasles, imaginées par Descartes, ont joué un grand rôle, surtout dans sa *Dioptrique*. Newton a fait voir, d'une manière très-simple, que ces courbes sont le lieu d'un point dont les distances à deux circonférences de cercle sont entre elles dans un rapport constant. C'est aussi ce qu'avait montré la construction géométrique de ces courbes, donnée par Descartes, et ce que Huygens avait conclu immédiatement, et sans démonstration, de son système ondulatoire, dans son *Traité de la lumière*. Descartes, il est vrai, ne les a pas étudiées complétement, et, dans la suite, d'autres géomètres leur ont trouvé d'intéressantes propriétés. J. Herschel les a appelées *lignes aplanétiques* (sans aberration) à cause de leur usage en Optique. Quetelet leur a découvert de singulières et curieuses propriétés.

Voir aussi, à ce sujet, le livre de M. P. Serret : *Des Méthodes en Géométrie*, p. 78-80.

De la Noë. — Mémoire sur un procédé de figuré du terrain dans l'hypothèse de la lumière oblique. (329-365, 15 figures).

L'emploi d'une méthode géométrique susceptible de définir rigoureusement le relief du terrain remonte à peine aux premières années de notre siècle. Le Rapport de la Commission de 1802 constate, en effet, qu'à cette date le service du Génie, à peu près seul, employait pour cet objet la méthode *des sections horizontales*, tandis que celle dite *des demi-perspectives* conservait encore des partisans, et que celle *des lignes de plus grande pente* était suivie par la plupart des géographes et des ingénieurs.

Il était naturel que, de ces trois méthodes, la première l'emportât à une époque où l'esprit scientifique venait de se réveiller avec tant d'éclat; mais une transformation aussi radicale, dans l'art des levers, ne pouvait s'exécuter sans quelque résistance. La Commission de 1802 maintint la méthode des lignes de plus grande pente : malgré cette décision, le service du Génie conserva ses procédés, et, successivement, les Écoles Polytechnique, de Saint-Cyr, d'État-major, et même les ingénieurs géographes, se rendant à l'évidence, entrèrent dans la voie nouvelle.

L'évidence avait conduit à l'emploi des courbes horizontales, malgré les conclusions de la Commission de 1802; mais on ne pouvait rompre entièrement avec le passé, et, pour se rapprocher des méthodes le plus généralement suivies, on employa concurremment les hachures, c'est-à-dire les lignes de plus grande pente.

Cette méthode parut simple et commode à la Commission de 1826, qui l'adopta; mais dès lors il n'y avait plus de place sur les Cartes pour des teintes nouvelles.

Telle est l'origine du système suivant lequel a été rédigée la Carte de France du Dépôt de la Guerre, système malheureux, dont on eût reconnu à temps les inconvénients, si l'on avait écouté les avertissement de M. le colonel Puissant.

Pour remédier à ces inconvénients, l'auteur du présent Mémoire a trouvé une méthode, à la fois simple et précise, de teinter les Cartes, en supposant le terrain éclairé obliquement. Cette méthode est basée sur une indication donnée, depuis longtemps, par le colonel Breton. Elle conduit à trois solutions très-simples, que l'auteur discute et justifie au moyen d'une intéressante analyse.

Peaucellier. — Note sur l'emploi des systèmes articulés à liaison

complète, en Géométrie, en Mécanique et dans les Sciences appliquées. (369-389, 24 figures).

On se rappelle le succès de la brillante et féconde découverte de ces assemblages, qui permettent de tracer rigoureusement la droite et un grand nombre de courbes algébriques. Le célèbre parallélogramme de Watt n'était qu'une solution approximative du tracé de la ligne droite : il remplaçait le segment de droite par un arc, très-allongé et très-aplati, de la courbe à longue inflexion décrite par un point du plan du système articulé. La solution rigoureuse avait été regardée, et même démontrée, comme impossible; cependant elle a été réalisée, et d'une manière extrêmement simple, au moyen d'une combinaison de deux tiges égales, réunies à un losange articulé, auquel sa propriété fondamentale, de déterminer deux segments en ligne droite dont le produit soit constant, a fait donner le nom d'*inverseur*.

Aujourd'hui, ce remarquable dispositif est universellement répandu. Les études de MM. Sylvester, Hart, Kempe, Liguine, ont contribué à son perfectionnement. Nous ne saurions les reproduire ici, et nous nous bornerons à rappeler que la découverte de M. le colonel Peaucellier a été honorée, en 1874, du prix de Mécanique de la fondation Montyon, que lui a justement décerné l'Académie des Sciences. Le Rapport relatif à ce prix se trouve dans le même numéro du *Mémorial* (p. 366-368).

Collignon (*G.*). — Note sur quelques travaux récents relatifs à la théorie des voûtes. (394-398).

Cette Note, ainsi qu'un Rapport académique inséré dans le même Tome, expose les récents progrès que les recherches de MM. A. Durand-Claye et Peaucellier ont fait faire à la théorie des voûtes. Les travaux de M. le colonel Peaucellier, dans cette dernière voie, méritent une attention toute spéciale. Le Mémoire qui les renferme a été déjà signalé à nos lecteurs, à propos du t. XXIV du *Mémorial*. (Voir *Bulletin*, t. XI, p. 254.)

L'emploi du polygone funiculaire, la détermination graphique des limites des poussées qui correspondent au glissement de la voûte sur un joint, dans un sens ou dans l'autre, la construction d'une courbe auxiliaire dont la sous-normale définit la poussée amenant la réaction mutuelle à toucher l'intrados ou l'extrados, le procédé suivi pour déplacer la réaction mutuelle et la faire rentrer à distance convenable dans l'intérieur du bandeau, constituent autant d'applications élégantes des principes de la Géométrie et de la Statique.

Magué. — Extrait d'un Mémoire sur les applications, à la défense des places, de l'eau employée comme moyen de transmission de travail. (399-507, 28 figures).

Principe, description, disposition et emploi de l'organe mécanique inventé par sir Armstrong, et auquel a été très-justement donné le nom d'*accumulateur*.

Le Mémoire en question fait connaître les applications diverses de ce nouvel organe.

Mengin (*A.-N.*). — Mémoire sur l'organisation des chantiers des forts, à Toul. (508-584, 24 figures).

Langlois. — Note sur le casernement en Angleterre. (585-673, 102 figures). H. B.

THE OBSERVATORY, A MONTHLY REVIEW OF ASTRONOMY, edited by W.-H.-M. Christie. — Londres, in-8° (¹).

Tome I (avril 1877-avril 1878).

RÉUNION DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE de Londres, le 13 avril 1877. (1-4).

Brett (J.). — Dessin de Copernic. (4).

Huggins (W.). — Photographie du spectre des étoiles (4-7).

Les essais commencés en 1863 n'ont donné de bons résultats que depuis 1870. L'appareil employé consiste en un télescope à miroir métallique, de 18 pouces anglais de diamètre, et en un spectroscope à pente, lentilles de quartz et prismes de spath d'Islande. La plaque est préparée avec du collodion sec très-sensible. Pour les belles étoiles, la durée d'exposition varie de un quart d'heure à une demi-heure; avec les étoiles moins brillantes, elle peut s'élever à une ou deux heures.

La Note de M. Huggins est accompagnée d'une reproduction du spectre chimique de α de la Lyre.

Gill (D.). — Notes sur la détermination de la parallaxe. Ire Partie. (7-13).

L'auteur débute par une classification des méthodes qui peuvent conduire au résultat cherché :

1° Méthodes théoriques déduites de la considération du mouvement des périhélies de Mars et de Vénus et de l'inégalité parallactique de la Lune.

(¹) Le Journal de M. Christie est, pour ceux qui désirent être au courant des travaux des astronomes anglais, un complément indispensable aux *Monthly Notices;* ces dernières sont un procès-verbal officiel, où toute discussion est soigneusement omise, des séances de la Société astronomique et donnent *in extenso* les Notes qui y ont été lues; l'*Observatory* se fait l'écho des discussions qui se produisent dans ces réunions, discussions parfois fort importantes et toujours très-intéressantes à suivre. Les *Monthly Notices* étant analysées dans le *Bulletin*, nous nous bornerons à mentionner d'une manière sommaire ces discussions.

M. Christie donne également dans son Journal, qui compte de nombreux collaborateurs parmi les astronomes de profession, des Notes et des Articles originaux et aussi une analyse des principales publications nouvelles.

Suivant la convention adoptée dans le *Bulletin*, les analyses bibliographiques seront marquées d'un astérisque.

2° Méthodes pratiques, comme la mesure directe de la parallaxe de Mars ou d'une petite planète.

3° Méthodes physiques résultant de la mesure de la constante de l'aberration et de la vitesse de la lumière par des expériences de laboratoire.

La considération du mouvement du périhélie de Mars de 1672 à l'époque actuelle a donné à Le Verrier $\pi = 8,866$.

Les changements de latitude de Vénus pendant le dernier siècle ont également donné à Le Verrier $\pi = 8,853$.

Enfin, d'un siècle d'observations de cette dernière planète, le célèbre directeur de l'Observatoire de Paris a déduit $\pi = 8'',859$.

La parallaxe solaire est donc connue à $0'',01$ près et toute méthode qui ne pourra conduire à la même exactitude, dans laquelle il y aura des erreurs systématiques, et qui, appliquée par deux calculateurs différents, ne conduira pas au même résultat numérique doit, par suite, être repoussée. La méthode de l'inégalité parallactique de la Lune est dans ce dernier cas.

Darwin (*G.-H.*). — L'hypothèse de la nébuleuse cosmique et l'obliquité des axes de rotation des planètes sur le plan de leurs orbites. (13-17).

Birmingham (*J.*). — Sur la variabilité des étoiles. (17-18).

L'auteur l'attribue à un anneau de matière nébuleuse tournant autour de l'étoile.

Tupman (*G.-L.*). — Note sur la comète I, 1877. (18-19).

Tupman (*G.-L.*). — Note sur le bolide du 17 mars 1877. (19-20).

Pritchard (*C.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète II de 1877. (20-21).

L'Éditeur. — Notes sur la comète d'Encke, les taches solaires et les protubérances, l'étoile temporaire de 1866, le catalogue d'étoiles rouges du P. Secchi. (21-27).

MEMORANDA astronomique pour mai 1877. (28-29).

Marth (*A.*). — Éphéméride pour les observations physiques de Jupiter et de la Lune en mai 1877. (30-32).

RÉUNION DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE de Londres le 11 mai 1877. (33-38).

Discussion sur la stabilité de l'héliomètre de lord Lindsay.

Gill (*D.*). — Notes sur la détermination de la parallaxe solaire. Partie II. (38-44).

Examinant le degré d'exactitude de la constante d'aberration de Struve et les

remarques de M. Y. Villarceau à ce sujet, l'auteur conclut que cette méthode physique ne pourra donner de résultats exacts que lorsque la détermination de Struve aura été reprise et que les astronomes auront de nouvelles Tables des satellites de Jupiter.

Ledger (*E.*). — Résumé d'une lecture sur la scintillation des étoiles. Partie I. (44-50).

Dennig (*W.-F.*). — Points radiants des météores d'avril. (50-51).

Lecky (*R.-J.*). — Bolide du 6 avril 1877 en Angleterre. (52-53).

L'Éditeur. — Notes sur la déviation de la verticale au Canada, la longitude d'Ogden (Utah), la construction des télescopes, etc. (53-58).

Memoranda astronomique pour juin 1877. (59-61).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour les observations physiques de Mars, Jupiter et la Lune en juin 1877. (62-64).

Sande Bakhuyzen (*E.-F. v. d.*). — Éphéméride de la comète II de 1877. (64). [Winnecke.]

Réunion de la Société astronomique de Londres, le 8 juin 1877. (65-70).

Pritchard (*C.*). — Note sur le mouvement du périgée de la Lune. (71-72).

Pritchard (*C.*). — Aberration planétaire ou cométaire. (72-74).

Gill (*D.*). — Notes sur la détermination de la parallaxe solaire. Partie III. (74-82).

Ce troisième Chapitre est consacré à l'examen de la méthode dite *instrumentale*. M. Gill montre que la forme et les dimensions de la Terre sont connues avec une approximation telle et que les méthodes pour la détermination des latitudes et des longitudes sont assez exactes pour que la situation réciproque des deux observateurs soit fixée avec une rigueur amplement suffisante pour le but qu'on se propose.

Ledger (*E.*). — Résumé d'une lecture sur la scintillation des étoiles. Partie II. (82-91).

L'auteur, après avoir analysé les recherches de MM. Montigny, Wolf et Respighi, arrive à cette conclusion que la scintillation est un phénomène purement atmosphérique dû au mouvement de rotation de la Terre et aux réfractions inégales des rayons lumineux dans des couches atmosphériques à des températures différentes.

Memoranda astronomique pour juillet 1877. (92-93).

Denning (*W.-F.*). — Points radiants pour juillet. (94).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour les observations physiques du Soleil, de Mars et de Jupiter en juillet 1877. (95-96).

Société Royale Astronomique. — Modification dans le mode d'élection du Conseil. (97-100).

Gill (*D.*). — Notes sur la détermination de la parallaxe solaire. Partie IV. (101-106).

M. Gill expose les principes de la méthode de Halley relative aux passages de Vénus et montre les difficultés que l'on rencontre dans sa réalisation soit par l'observation directe, soit par l'observation photographique.

Denning (*W.-F.*). — Note sur la variation diurne du nombre des étoiles filantes. (106-107).

Knott (*G.*). — Mesure du diamètre du cercle de diffraction des étoiles. (107-109).

L'auteur propose d'observer des étoiles doubles et de réduire le diamètre de l'objectif jusqu'à ce que le premier anneau brillant passe par le compagnon; il a fait quelques essais de la méthode.

Pritchard (*C.*). — Compte rendu annuel des travaux de l'Observatoire de l'Université d'Oxford. (109-113).

Notice nécrologique sur G. Santini. [E. Dunkin]. (113-114).

Christie (*W.-H.-M.*). — Note sur l'activité solaire. (114-119).

C'est un résumé des travaux de M. Janssen et des spectroscopistes italiens.

L'Éditeur. — Notes sur les spectres des trois premières comètes de 1877 et les relations entre les taches solaires et les variations de la déclinaison magnétique. (119-122).

Memoranda astronomique pour août 1877. (123-124).

Denning (*W.-F.*). — Points radiants pour août. (125).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique du Soleil, de la Lune, de Mars, de Jupiter et de Saturne en août. (126-128).

Gill (*D.*). — Notes sur la détermination de la parallaxe solaire. Partie V. (129-134).

Examen critique des diverses méthodes photographiques.

Abney (*W.-S.-W.*). — Spectres photographiques montrant la rotation du Soleil. (134-135).

Par l'intermédiaire d'un héliostat et d'une lentille d'héliomètre, on amène les images des bords est et ouest du Soleil à se former sur une même région de la fente d'un spectroscope formé de plusieurs prismes ou d'un réseau. En photographiant le spectre, on constate que les lignes sont déplacées ; le déplacement est toujours dans le sens que doit produire la rotation du Soleil, mais sa grandeur varie avec les heures du jour.

Erck (*Wentworth*). — Description de l'Observatoire construit par lui à Sherrington Bray. (135-137).

L'Observatoire renferme un équatorial de $7\frac{1}{2}$ pouces, fait autrefois par Alvan Clark pour M. Dawes.

Notice nécrologique sur L. Heiss. [Dunkin]. (137-139).

* Annales de l'Observatoire de Moscou. Vol. III; in-4°. Moscou, 1877.

Brett (*J.*). — Lettre sur la Société Royale Astronomique. (142-145).

Hunt (*G.*). — Remarques sur la mesure du diamètre du premier anneau de diffraction des étoiles. (145-146).

M. Dawes a autrefois mesuré ce diamètre par les procédés micrométriques.

Gill (*D.*). — Visite à l'Observatoire de Halley à Sainte-Hélène. (147-148).

* L'Éditeur. — Notes sur les observations anglaises de Vénus, l'exactitude des déterminations télégraphiques de longitude, le passage de Vénus en 1882, la nouvelle méthode spectroscopique du professeur Langley, Hypérion, la possibilité d'observations de passages sans erreurs personnelles. (148-154).

Memoranda astronomique pour septembre 1877. (155-156).

Denning (*W.-F.*). — Points radiants pour septembre. (157).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique de Mars, Jupiter et Saturne. (159-160).

Todd (*D.-P.*). — Note sur les éclipses des satellites de Jupiter. (161-164).

Denning (*W.-F.*). — Note sur les observations des étoiles filantes d'août 1877. (164-166).

* *Airy* (*G.-B.*). — Observations du passage de Vénus en 1874 par les expéditions anglaises. [Christie]. (166-173).

* ANNALES de l'Observatoire de Moscou. — Observations photométriques, par M. W. Ceraski. (173-174).

Gill (*D.*). — Lettre écrite de l'Ascension. (175-176).

Gore (*J.-E.*). — Variabilité de l'étoile R(*v*) de l'Hydre. (176-177).

Lassell (*W.*). — Note sur l'offre de son télescope pour l'Observatoire de Melbourne. (178-179).

* *Hall* (*A.*). — Notes sur les satellites de Mars. (181-182).

ÉCLIPSE DE LUNE du 23 août 1877. — Résumé de diverses observations sur le spectre de la partie éclipsée. (182-184).

* *Draper* (*H.*). — Découverte de l'oxygène dans le Soleil (*American Journal,* August 1877). (184-185).

MEMORANDA astronomique pour octobre 1877. (186-187).

Denning (*F.-W.*). — Points radiants en octobre. (188).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique des planètes en octobre 1877. (189-192).

Darwin (*G.-H.*). — Densité interne des planètes. (193-197).

Plummer (*J.-J.*). — Note sur les phénomènes physiques de l'éclipse de Lune du 23 août 1877. (197-199).

Kirkwood (*D.*). — Relation entre les moyens mouvements des quatre satellites intérieurs de Saturne. (199).

Relation très-simple, mais empirique.

NOTICE nécrologique sur Le Verrier. [E. Dunkin]. (199-206).

* Annales de l'Observatoire de Moscou. — Erreurs de division du cercle méridien, par M. A. Gromadzki; parallaxe de l'étoile nébuleuse H IV 37; spectre des nébuleuses planétaires. (206-208).

Lindsay (lord) et *Walker* (*C.-V.*). — Notes sur les modifications du règlement de la Société Astronomique. (208-212).

Airy (*G.-B.*). — Note sur la forme des anneaux de diffraction des étoiles. (212-213).

Newcomb (*S.*). — Période des satellites de Mars et masse de la planète. (213-214).

	h m
Révolution du satellite intérieur..........	7.38
Révolution du satellite extérieur...........	30.14

$$\text{Masse de Mars} = \frac{\text{masse du Soleil}}{3\,090\,000}.$$

Cranston (*T.*). — Nouvelle méthode de distances lunaires. (214-215).

Dreyer (*J.-L.-E.*). — Remarques sur la distribution des étoiles d'après les zones de Bonn. (216).

Capron (*J.-R.*). — Note sur l'éclipse de Lune du 23 août 1877. (216-218).

* *Hall* (*A.*). — Rotation de Saturne. (218-219).

La durée de la rotation est de $10^h\,14^m\,23^s,8$.

* *Vogel* (*H.-C.*). — Effet de la rotation des étoiles sur leur spectre (*Monthly Notices* de mars 1877). (220-221).

* *Stone*. — Observations faites au Cap en 1874. (221-222).

* *Mouchez*. — L'auréole autour de Vénus (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXV, n° 7. (223).

* *Reslhuber* et *Strasser*. — Catalogue de 750 étoiles observées à Kremsmünster. (223-224).

Memoranda astronomique pour novembre 1877. (225-226).

Denning (*W.-F.*). — Points radiants pour novembre. (227).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique du Soleil, de la Lune et des planètes en novembre 1877. (228-230).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 9 novembre 1877. (231-237).

Discussion entre MM. Adams, Airy et Neison sur la théorie de la Lune.

Neison (*E.*). — Note sur les observations physiques de la Lune. (238-242).

L'auteur fait un appel pressant aux astronomes et à tous ceux qui ont des lunettes de 8 à 10 pouces d'ouverture, afin d'étudier d'une manière précise la surface de notre satellite et de décider la question des changements possibles de cette surface.

Denning (*F.-W.*). — Note sur les étoiles filantes d'octobre du groupe des Orionides. (243-244).

Gill (*D.*). — Lettre écrite de l'Ascension. (244-245).

Flammarion (*C.*). — L'étoile triple θ de Persée. (245-246).

Le catalogue de Smyth renfermerait une erreur relativement à la position de la troisième étoile du groupe.

Capron (*J.-R.*). — Remarques sur les lignes brillantes découvertes dans le spectre solaire par M. Draper. (247-248).

Barneby (*T.*). — Remarques sur Saturne et ses satellites. (248-250).

M. Barneby a vu, le 22 octobre 1877, l'ombre de Titan passer sur la planète.

Plummer (*J.-J.*). — Note sur la distribution des étoiles. (251-253).

Dunkin (*E.*). — Mouvement propre de 3511 Groombridge. (253).

Les mouvements propres sont :

Ascension droite..............	$+0^s,050$.
Déclinaison....................	$+0'', 04$.

* *Oppolzer*, *Plantamour* et *R. Wolf*. — Jonction télégraphique des triangles géodésiques autrichiens et suisses. (254-255).

* *Schmidt* (*J.-F.-J.*). — Note sur la comète II de 1877 (Winnecke). (*Astronomische Nachrichten*, n° 2145). (256).

Memoranda astronomique pour décembre 1877. (257-258).

Denning (*W.-F.*). — Points radiants pour décembre. (259).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique du Soleil, de la Lune et des planètes en décembre 1877. (260-262).

Pritchard (*C.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète II de 1877. (262).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 14 décembre 1877. (264-272).

Adams (*J.-C.*). — Note sur le mouvement des nœuds de la Lune. (272-273).

Gill (*D.*). — Notes sur la détermination de la parallaxe solaire. Partie VI. (273-280).

Cette dernière Note débute par une discussion de la méthode héliométrique. Au point de vue théorique et aussi au point de vue de la facilité des mesures et de l'élimination des erreurs d'observations par leur répétition, le procédé est des plus corrects; mais les réductions reposent toutes sur la détermination des constantes instrumentales (valeur de l'échelle des distances), et l'on peut craindre qu'il n'y ait dans cette détermination des erreurs systématiques que les méthodes de calcul n'éliminent pas. M. Gill pense donc que la méthode héliométrique ne présente pas en elle-même tous les caractères de rigueur nécessaires.

L'auteur donne donc, parmi toutes les méthodes proposées, ses préférences à la méthode des différences de déclinaison de Mars, et surtout à celle, préconisée par M. Galle, des différences de position des petites planètes par rapport à des étoiles voisines prises pour points de repère. La mesure héliométrique des distances de la planète aux étoiles lui semble une opération d'une exactitude absolue et de laquelle il est facile de faire disparaître toutes les erreurs systématiques.

Kirkwood (*D.*).— Les satellites de Mars et l'hypothèse de la nébuleuse cosmique. (280-282).

La rotation du satellite intérieur de Mars, environ trois fois plus rapide que celle de la planète, n'est pas une objection à la théorie cosmique de Laplace et Herschel.

Tupman (*G.-L.*). — Le bolide du 23 novembre 1877. (282-283).

Notice nécrologique sur C.-L. de Littrow. [E. Dunkin]. (283-284).

Schoenfeld (*E.*). — Notes sur les Cartes de Bonn et la distribution des étoiles dans l'espace. (284-285).

Gill (*D.*). — Lettres écrites de l'Ascension. (286-288).

Capron (*J.-R.*). — Observation du passage de l'ombre de Titan sur Saturne le 9 décembre 1877. (288-289).

Tennant (*J.-F.*). — Note sur le passage de Vénus. (290-291).

Corder (*H.*). — Remarques sur les étoiles filantes de novembre et décembre 1877. (291-292).

* *Tempel.* — Nébuleuses découvertes à Arcetri (*Astron. Nach.*, n°s 2138 et 2139). (292-294).

* *Tisserand.* — Masse de l'anneau de Saturne. (*Comptes rendus*, t. LXXXV), n° 16. (294-295).

* *Airy* (*G.-B.*). — Observations de Greenwich pour 1875. (296).

* *Lindsay* (*lord*). — Publications de l'Observatoire de Dun-Echt. T. II. (297).

Memoranda astronomique pour janvier 1878. (298-300).

Denning (*W.-F.*). — Points radiants pour janvier. (301).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique de la Lune et des planètes en janvier 1878. (302).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 11 janvier 1878. (303-314).

Schuster (*A.*). — Note sur la présence de l'oxygène dans le Soleil. (315-316).

M. Schuster a déterminé les longueurs d'onde des lignes du spectre de l'oxygène; le Tableau suivant résume le résultat de ses expériences et les longueurs d'onde des lignes correspondantes du Soleil :

	Oxygène.	Soleil.
α	6156,86	6156,70
β	5435,55	5435,50
γ	5329,41	5329,20
δ	4367,62	4367,58.

La coïncidence est très-grande; mais les lignes de l'oxygène, à basse température, paraissent un peu moins réfrangibles que celles du Soleil.

Tupman (*G.-L.*). — Notes sur le bolide du 23 novembre 1877, d'après les observations faites en Angleterre. Partie I. (316-322).

* *Tupman* (*G.-L.*). — Parallaxe solaire (*Monthly Notices* du 14 décembre 1877). (322-325).

Hunt (*G.*). — L'étoile λ Petite Ourse considérée comme une épreuve de la vision à l'œil nu. (325-326).

L'étoile, située entre la Polaire et δ Petite Ourse, est de 6 ½ grandeur; elle paraît n'être visible que pour quelques observateurs privilégiés.

Knobel (*E.-B.*). — Remarques sur la distribution des étoiles. (326-327).

L'auteur, comparant les résultats de ses déterminations photométriques des étoiles de l'amas de Persée avec les grandeurs indiquées par Argelander, montre que ces dernières sont en général très-exactes.

Grover (*C.*). — Observation de l'ombre de Titan sur Saturne le 9 décembre 1877. (327-328).

* *Vogel.* — Note sur la photométrie des diverses parties du spectre et l'absorption de l'atmosphère solaire (*Monatsbericht d. K. Akad. d. Wissensch.* Berlin, 1877, march.). (328-331).

* Académie de Vienne. — Prix pour la découverte des comètes. (331).

* *Stone.* — Catalogue des étoiles observées au Cap de 1871 à 1875. (331-332).

* *Le Verrier.* — Tables d'Uranus et de Neptune. (332-333).

* *Flammarion.* — Les mouvements propres et les distances des étoiles (*Comptes rendus,* t. LXXXV, nos 10, 18, 22). (334).

Ellery (*R.-L.*). — Observation d'un satellite de Mars le 16 octobre 1877. (335).

Memoranda astronomique pour février et mars 1878. (336).

Denning (*W.-F.*). — Points radiants pour février. (337).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique du Soleil et des planètes en février 1878. (338).

Réunion annuelle de la Société Royale Astronomique le 8 février 1878. (339-351).

Tupman (*G.-L.*). — Le bolide du 23 novembre 1877. Partie II. (351-355).

Les éléments de l'orbite parabolique sont

$$i = 0, \quad \varpi = 154^\circ, \quad q = 0{,}471,$$

mouvement direct.

* *Flammarion* (*C.*). — Les terres du ciel. 1 vol. in-8°. Paris, 1877. (355-358).

* *Chambers* (*G.-F.*). — *Handbook of descriptive Astronomy*. Third edition. Oxford, 1877. (358-360).

Neison (*E.*). — Réflexion spéculaire de la surface de Vénus. (360-366).

M. Neison pense que les effets attribués à une réflexion spéculaire sur Vénus sont dus à la présence autour de la planète d'une atmosphère épaisse et dense. Ces idées sont contredites par M. Christie dans une Note qui suit la Lettre de M. Neison.

Denning (*W.-F.*). — Remarques sur l'exactitude de ses déterminations de points radiants. (366-368).

Backhouse (*T.-W.*). — Notes sur les étoiles filantes de novembre. (369-370).

Dreyer (*J.-L.-E.*). — La forme spirale des nébuleuses. (370-371).

M. Tempel avait émis l'idée que la forme spirale donnée par lord Ross à plusieurs nébuleuses était due à une illusion d'optique provenant d'une sorte de pulsation de la lumière. M. Dreyer pense que cette forme est bien réelle.

* *Birmingham* (*J.*). — *The red stars*.... Observations et Catalogues d'étoiles rouges. 1 vol. Londres, 1877. (372-373).

* *Kirkwood* (*D.*). — *On the*.... Sur l'âge relatif du Soleil et de quelques étoiles fixes (*Amer. Philos. Soc.*). (373-374).

* *Main* (*R.*). — *Radcliffe*.... Observations faites à l'Observatoire d'Oxford en 1875. (375).

Memoranda astronomique pour mars et avril 1878. (376).

Denning (*W.-F.*). — Points radiants pour mars. (377).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique du Soleil et des planètes en mars et avril 1878. (378).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 8 mars 1878. (379-392).

Intéressante discussion sur la cause des différences entre les parallaxes solaires calculées par MM. Airy, Tupman et Stone d'après les observations du passage de Vénus en 1874.

* *Celoria* (*G.*). — *Sopra alcuni....* Mémoire sur les sondages du ciel et la distribution des étoiles dans l'espace. Milan, 1878. [J. Brett]. (392-396).

* *Lohrmann* (*W.-G.*). — *Mondcharte....* Carte de la Lune en 25 planches, avec un texte explicatif par J.-F.-J. Schmidt. Leipzig, 1878. [E. Neison]. (396-399).

Sawyer (*E.-F.*). — Nombres relatifs des étoiles filantes des diverses grandeurs. (399-400).

Voici le résultat moyen des calculs faits sur ce sujet par MM. Schmidt, Denning et Sawyer :

	Nombre pour 100 des divers météores.					Nombre total
	1re grandeur.	2e grandeur.	3e grandeur.	4e grandeur.	5e grandeur.	des météores.
Moyenne......	3,0	10,6	17,4	24,9	44,1	11094

Christie (*W.-H.-M.*). — Instructions pour le passage de Mercure du 6 mai 1878. (400-402).

Notice nécrologique sur le P. Secchi. (402-403).

Tempel (*W.*). — Sur la forme spirale des nébuleuses. (403-405).

Réponse aux critiques que M. Dreyer avait faites de son travail.

Allsop (*W.-J.*). — Remarques sur λ de la Petite Ourse. (406).

L'étoile est visible à l'œil nu; observation confirmée par M. Christie.

* *Holden.* — Mouvement propre de la nébuleuse Messier n° 20 (*American Journal*, décembre 1877). [E. D.]. (406-407).

* *Godward.* — *Corrections to....* Correction des éléments de Cérès (*Monthly Notices*, janvier 1878). [E. D.]. (407).

* *Pickering.* — *Harvard College Observatory....* Rapport annuel (1877) sur les travaux de l'Observatoire de Harvard College. (408-409).

* *Lockyer (N.)*. — *Discovery*.... Découverte des métaux rares dans le Soleil (*Comptes rendus*, t. LXXXV, n° 5). (409-410).

* *Hennessey*. — *The Trigonometrical*.... Rapport sur les progrès de la triangulation de l'Inde en 1875-1876. (411-413). [D. G.].

* *Hall*. — *The south*.... La tache polaire sud de Mars (*Astron. Nach.*, n°s 2174 et 2178). (414).

Memoranda astronomique pour avril et mai 1878. (416).

Denning (W.-F.). — Points radiants pour avril. (417).

Marth (A.). — Éphémérides pour l'observation physique du Soleil, de la Lune et des planètes en avril et mai 1878. (418).

Tome II; (avril 1878-mai 1879).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 12 avril 1878. (1-13).

Intéressante discussion entre le capitaine Abney et M. de La Rue sur les photographies de la partie ultra-rouge du spectre solaire et les procédés qui permettent de l'obtenir.

Gould (B.-A.). — La Photographie céleste. (13-19).

M. Gould, faisant l'historique des progrès de la Photographie astronomique, rappelle d'abord les essais faits en 1850, sous la direction de W.-C. Bond, avec le grand équatorial de Cambridge; on obtint des images de la Lune ainsi que de Vega et de Castor. L'image de cette dernière, qui est double, parut allongée. En 1854, on photographia l'éclipse de Soleil du 26 mai; enfin, en 1857, M. Whipple obtint à Cambridge des images d'Alcor et de Mizar, de la Grande Ourse, assez parfaites pour permettre des mesures de la position du compagnon de la dernière.

Les essais de Draper à New-York et de M. de La Rue à Londres sont connus de tout le monde.

Depuis 1864, M. Rutherfurd, en employant un objectif achromatique pour les rayons chimiques, obtient de magnifiques photographies des principaux amas d'étoiles, notamment des Pléiades et de Præsepe.

A partir de 1873, des travaux analogues ont été faits à Cordoba, et l'on a obtenu des photographies de l'amas X du Navire (185 étoiles) et de η d'Argo (180 étoiles), ainsi que des vues nombreuses des planètes Jupiter, Mars et Saturne.

Denning (W.-F.). — Note sur le nombre pour 100 des étoiles filantes des diverses grandeurs. (20-21).

Nous reproduisons dans son entier le Tableau de M. Denning :

Nombre pour 100 *des étoiles des diverses grandeurs.*

Observateurs.	Époque des observations.	Ordre de grandeur : Classe I. Supérieures à la première.		Classe II 1re grandeur.	Classe III. 2e grandeur	Classe IV. 3e grandeur.	Classe V. 5° grandeur. et au-dessous.	No t d'é
Schmidt.....	1842-1868	3,8		14,6	18,0	22,3	41,3	1
Denza.......	1869	2,4		8,4	13,2	32,0	44,0	1
Zezioli	1867-1870	»	11,5	»	20,8	27,1	40,6	8
Sawyer......	1868-1877	2,8		10,7	17,0	25,4	44,1	6
Corder......	1871-1878	»	8,3	»	18,4	29,6	43,7	3
Tupman.....	1869-1871	3,6		11,2	15,5	24,7	45,0	1
Denning	1876-1877	2,9		7,3	19,5	24,7	45,6	2
Konkoly.....	1871-1876	4,5		14,5	21,3	24,9	34,8	2
Schiaparelli..	1872	3,1		12,7	22,0	25,1	37,1	7
Heiss........	1833-1875	2,1		19,3	35,7	28,5	14,4	13
Weiss.......	1867-1874	1,9		11,5	24,6	32,3	29,7	6
Lucas	1869-1877	3,5		21,1	26,8	28,0	20,6	1
Tanger......	1871	»	9,2	»	9,2	16,3	65,3	
Moyenne..	1833-1878	2,8		11,9	20,2	26,2	38,9	57

Dreyer (*J.-L.-E.*). — Réponse à M. Tempel sur la forme spirale des nébuleuses. (22-23).

Corder (*H.*). — Note sur la couleur des étoiles filantes. (23-24).

Liveing et *Dewar*. — *On the*.... Sur le renversement des lignes des vapeurs métalliques (*Proceedings of the R. Society*, t. XXVII). (25-27).

Christie. — Notes sur le futur passage de Mercure le 6 mai 1878. (27-28).

Memoranda astronomique pour mai et juin 1878. (29-30).

Denning (*W.-F.*). — Points radiants pour mai. (31).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique des planètes en mai 1878. (32).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 10 mai 1878. (33-45).

Discussion entre MM. Airy, Rutherfurd, Dunkin, Proctor, Ranyard, Huggins et Christie sur les anneaux brillants vus autour de Mercure pendant son passage du 6 mai.

Airy (*G.-B.*). — *The interior*.... L'intérieur de la Terre; extrait d'une adresse à l'Association du Cumberland pour l'avancement des Sciences. (45-52).

Abbadie (*A. d'*). — Note sur les changements de direction du fil à plomb. (52-54).

Résumé des observations faites de 1867 à 1872 à Abbadia avec le *Nadirane*.

Johnson (*S.-J.*). — Note historique sur les principales occultations de Mars. (54-55).

Notice nécrologique sur le Rév. Main. [C. Pritchard]. (55-56).

* *Capron* (*R.*). — *Photographed*.... Photographies de cent trente-six spectres de métaux ou de gaz reproduits par l'autotypie. 1 vol. Londres, 1877. (56-59).

Pritchard (*C.*) et *Mathison* (*R.*). — Observations du passage de Mercure le 6 mai. (59-60).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur le compagnon de δ de l'Écrevisse. (60-61).

Les mouvements du compagnon et de l'étoile principale s'effectuent suivant des lignes droites parallèles.

* *Liveing* et *Dewar*. — *On the*.... Sur le renversement des lignes spectrales des vapeurs métalliques. II[e] Note (*Proceedings of the R. Society*). [M.-L. H.]. (62-64).

* *Rosse* (*lord*). — *Polarization of*.... Polarisation de la lumière de la Lune et de Vénus (*Proceedings of the Royal Society*). (65-66).

* *Pritchard* (*C.*). — *Astronomical*.... Observations astronomiques faites à l'Observatoire de l'Université d'Oxford. N° 1. 1 vol. in-8°. Oxford, 1877. (66-67).

* *Ferrari*. — Éruption solaire du 7 novembre 1877 (*Spettrosc. italiani*, 1877, novembre). (67-68).

* *Dreyer* (*J.-L.-E.*). — *Supplement to*.... Supplément au Catalogue général des nébuleuses de Herschel. (69).

Memoranda astronomique pour juin et juillet 1878. (70).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de juin. (71).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique des planètes en juin et juillet 1878. (72).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 14 juin 1878. (73-88).

Discussion entre MM. Christie, Ranyard et Schuster sur l'existence des lignes brillantes de l'oxygène dans le spectre solaire.

Knott (*G.*). — Notes sur l'étoile variable U du Cygne. (89-90).

La période est de 466 jours.

Denning (*W.-F.*). — Le bolide du 7 juin 1878 en Angleterre. (90-93).

* *Airy* (*G.-B.*). — Rapport sur les travaux de Greenwich en 1877-1878. (93-96).

* *Newcomb.* — *The mean....* Le moyen mouvement de la Lune (*Amer. Journal of Science*, 1877, novembre). [E. N.]. (97-100).

* *Vogel* (*H.-C.*). — *Der Sternhaufen....* L'amas de χ de Persée. 1 vol. in-4°. Leipzig, 1878. (100-101).

Memoranda astronomique pour juillet-août 1878. (102).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de juillet. (103).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique des planètes en juillet-août 1878. (104).

Ledger (*E.*). — L'Arithmétique élémentaire et la durée d'une éclipse totale de Soleil. (105-110).

Doberck (*W.*). — Les étoiles doubles. (110-116).

L'auteur indique rapidement l'histoire de l'observation des étoiles doubles et discute les méthodes proposées par Herschel, Savary, Thiele et lui-même pour le calcul des éléments de leurs orbites.

* *Croll* (*J.*). — *Croll's hypothesis on the....* Hypothèse de Croll sur l'origine de la chaleur du Soleil et des étoiles (*Amer. Journal of Science*, avril 1878). [D. Kirkwood]. (117-118).

Kirkwood (*D.*). — Remarques sur la date aérolithique du 12-13 novembre. (118-121).

La nuit du 12-13 novembre donne un nombre de chutes de pierres ou de bolides détonants presque double de la moyenne. Le point radiant de ces météores n'est pas le Lion, et ils ne font pas partie du groupe des étoiles filantes du 14 novembre.

Sawyer (*E.-F.*). — L'étoile variable R du Bouclier. (121-122).

Airy (*G.-B.*). — Note sur la distorsion des images du photohéliographe. (122-123).

* *Boss* (*Lewis*). — *Dudley observatory*.... Rapport sur la situation et l'état actuel de l'Observatoire de Dudley. (124-125).

The Transit.... Le passage de Mercure du 6 mai 1878; observations diverses. (126-127).

* *Cornu* (*A.*). — Actions magnétiques et électriques de l'atmosphère solaire (*Comptes rendus*, t. LXXXVI, n° 8). (128-129).

* *Stone* (*O.*). — *Cincinnati Observations*.... Observations faites à Cincinnati en 1877. (130).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores d'août. (131-132).

Memoranda astronomique pour août et septembre 1878. (133-134).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique des planètes en août et septembre 1878. (134-136).

Ball (*R.-S.*). — Parallaxe de la 61e du Cygne. (137-139).

Les observations faites à Dunsink de juillet 1877 à juin 1878 ont donné à l'auteur $\varpi = 0'',465$.

Doberck (*W.*). — Les étoiles doubles. Partie II. (140-144).

L'auteur examine les méthodes de calcul de Y. Villarceau et de Klinkerfues.

Royston-Pigott (*G.-W.*). — Note sur la détermination de la collimation diurne d'un instrument réversible au moyen d'une échelle divisée placée à distance. (144-146).

Gledhill (*J.*). — Note sur la mesure de la distance des étoiles doubles. (146-151).

L'auteur indique les principales précautions que l'on doit prendre dans la mesure des étoiles doubles : observer les étoiles brillantes en plein jour ou dans le crépuscule ; employer le grossissement le plus convenable ; répéter les mesures divers jours plutôt que de les multiplier dans la même soirée ; faire au moins trois mesures d'angle de position et deux mesures de distance ; noter toutes les circonstances des observations.

Dans le but de déterminer les erreurs personnelles, M. Gledhill propose ensuite une liste d'étoiles qui devraient être observées par tous les astronomes.

* *Lockyer* (*J.-N.*). — *Star-gazing*.... L'aspect des étoiles, leur passé et leur présent. 1 vol. Londres, 1878. [J. Brett]. (151-156).

Pritchett (*C.-W.*). — Le passage de Mercure le 6 mai 1878. (156-160).

Observation du passage de Mercure à Glasgow (Missouri); phénomènes physiques.

Capron (*J.-R.*). — Note sur l'éclipse de Lune du 12 août. (160).

Swift (*L.*). — Note sur la découverte supposée de Vulcain par M. Watson. (161-162).

L'éclipse totale de Soleil du 29 juillet 1878. (162-163).

Résumé des observations physiques faites en Amérique.

Holetschek. — Éléments de la comète découverte le 7 juillet par M. Swift. (163).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de septembre. (163-165).

Memoranda astronomique pour septembre et octobre 1878. (166).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique des planètes en septembre-octobre 1878. (167-168).

Doberck (*W.*). — Les étoiles doubles. Partie III. (169-174).

Éléments de Σ 3121, γ de la Couronne boréale, ξ de la Balance, Σ 3062, ω du Lion, p d'Éridan, Σ 1768, ξ du Bouvier.

* *Struve* (*O.*). — Observations de Poulkova; t. IX, 1878. Observations d'étoiles doubles. Partie I. [A.-W. Downing]. (174-183).

Gledhill (*J.*). — Liste des étoiles doubles à observer en octobre. (183-187).

Penrose (*F.-C.*). — L'éclipse de Soleil du 29 juillet 1878. (187-191).

Description de la couronne, observée à Denver.

Tempel (*W.*). — Note sur la réapparition de la comète II de 1873. (191-192).

Christie. — Notes sur la découverte de Vulcain, l'éclipse de Soleil du 29 juillet et l'éclipse de Lune du 12 août. (193-197).

* *Vogel.* — Note sur l'étoile nouvelle du Cygne. (198-199).

* *Wolf* (*R.*). — Les taches du Soleil et les variations magnétiques. (*Astron. Mittheilungen*, n° 46). (199-201).

* *Åstrand.* — Carte céleste. (201-202).

Notice nécrologique sur E. Quetelet. (202). [E. D.].

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores d'octobre. (203-205).

Memoranda astronomiques pour octobre-novembre 1878. (206).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour les observations physiques du Soleil et des planètes en octobre-novembre 1878. (207-208).

Doberck (*W.*). — Les étoiles doubles. Partie IV. (209-217).

Éléments de τ d'Ophiuchus, λ d'Ophiuchus, 44 du Bouvier, η de Cassiopée, μ^2 du Bouvier, 36 d'Andromède, σ de la Couronne boréale, α des Gémeaux.

* *Struve* (*O.*). — Observations de Poulkova; t. IX, 1878. Observations d'étoiles doubles. Partie II. (217-223). [A.-W. Downing].

Lynn (*W.-T.*). — L'étoile variable T de la Couronne et l'Astronomie populaire de M. Newcomb. (223-225).

Nasmyth (*J.*). — Note sur l'éclat relatif de Vénus et de Mercure. (225-226).

La conjonction des deux planètes le 25 septembre 1878 a donné à l'auteur l'occasion de mesurer leur éclat relatif. L'éclat de Vénus est environ deux fois et demie celui de Mercure.

Todd (*C.*). — Observations de Jupiter à Adélaïde. (226-228).

Barneby (*T.*). — Note sur les couleurs de γ_1, γ_2 et γ_3 d'Andromède. (229).

Cance (*J.-L.-M.*). — Visibilité des satellites de Jupiter à l'œil nu. (229-230).

* *Hall* (*A.*). — Mémoire sur les satellites de Mars (Observations de Washington pour 1878). (230-232).

* *Draper* (*J.-C.*). — *Discovery of....* Découverte de lignes noires du spectre solaire qui répondent aux lignes de l'oxygène. (*Amer. Journ.*, 1878, octobre). (232-234).

Notes sur l'éclipse totale de Soleil du 29 juillet 1878. (234-235).

* *Gould.* — *The climate....* Le climat de Cordoba et la période des taches solaires. (*Amer. Journ.*, 1878, juin). (235-237).

* *Barclay.* — *Leyton astronomical....* Observations astronomiques de Leyton ; vol. IV, 1878. (238-239).

Gledhill (*J.*). — Position des étoiles doubles à observer en novembre. (239-242).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de novembre. (242-243).

Memoranda astronomiques pour novembre-décembre 1878. (244).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique des planètes pendant le mois de novembre 1878. (245-246).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 8 novembre 1878. (247-262).

Remarques de M. Airy sur la découverte faite par M. Gill qu'il y a une différence d'équation personnelle entre l'observation méridienne d'étoiles de diverses grandeurs.

Discussion entre MM. Ranyard, Christie et Schuster sur l'apparence des lignes brillantes du spectre solaire que M. Draper attribue à l'oxygène.

Schuster (*A.*). — La couronne solaire pendant l'éclipse de 1878. (262-266).

La couronne a été de dimensions très-réduites et la totalité de sa lumière était de la lumière solaire réfléchie par des particules solides ou liquides enveloppant le Soleil comme un anneau de météores; dans les éclipses précédentes, on avait constaté l'existence d'une lumière propre à la couronne. Les observations américaines ont encore démontré que la polarisation de la couronne décroît rapidement lorsque l'on s'éloigne du Soleil.

* *Bazley* (*T.-S.*). — *The stars....* Les étoiles dans leur course. 1 vol. Londres, 1878. (266-268).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en décembre. (269-270).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de décembre. (270-271).

Corder (*H.*). — Observations des étoiles filantes d'octobre 1878. (272-273).

* *Soret.* — Recherches sur l'absorption des rayons ultra-violets par diverses substances. (*Archives de Genève,* août 1878). (273-274). [M.-L. H.].

* *Boss* (*L.*).— *The transit....* Le passage de Mercure. (274-275).

Dans une Communication à l'Institut d'Albany, M. Boss a démontré que les observations du dernier passage de Mercure étaient favorables à l'existence d'une planète intra-mercurielle.

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique des planètes en décembre 1878. (277-278).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 13 décembre 1878. (279-295).

Pratt (*H.*). — Note sur le nouveau cratère signalé par M. Klein au nord de Huygens. (296-300).

Le prétendu nouveau cratère est une dépression très-faible dont le fond est un peu obscur; il est difficile à voir. D'anciens dessins et des photographies faites par M. Rutherfurd en 1873 montrent l'existence d'une tache sombre dans ce même point.

Penrose (*F.-C.*). — La couronne solaire et les anneaux météoriques. (300-302).

La couronne solaire serait due à des anneaux météoriques éclairés.

R. 8.

* *Gill.* — *Six months*.... Six mois à l'Ascension; récit non scientifique d'une expédition scientifique. 1 vol. Londres, 1878. (302-304).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en janvier. (304-305).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de janvier. (305-307).

Pritchett (*C.-W.*). — Nuage elliptique observé sur Jupiter du 5 au 15 juillet 1878. (307-309).

Pritchett (*C.-W.*). — Note sur la transparence de l'atmosphère à de grandes altitudes. (309-310).

Tebbutt (*J.*). — Remarques sur les éclipses du deuxième satellite de Jupiter. (311).

* *Clarke* (colonel). — *The figure*.... La figure de la Terre. (*Phil. Mag.*, août 1878). (312-314).

* *Lockyer* et *Schuster*. — *The solar*.... L'éclipse totale de Soleil du 6 avril 1875. (*Phil. Trans.*, 1878). (314-316).

Johnson (*R.-C.*). — Note sur son Observatoire de Bebington. (316).

* *Gyldén*. — Détermination de la parallaxe moyenne des étoiles de diverses grandeurs. (*Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellsch.*). (317-318).

Stokes. — *An accurate*.... Méthode exacte pour déterminer le rapport de dispersion des objectifs (*Proc. Roy. Soc.*, 1878). (318).

Newton (*H.-A.*). — *The origin*.... L'origine des comètes. (*Amer. Journ.*, 1878, septembre). (319-322).

Marth (*A.*). — Positions du satellite de Neptune en janvier 1878. (323).

Memoranda astronomiques pour janvier et février 1878. (323-324).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 10 janvier 1879. (325-338).

Discussion entre MM. Neison, de La Rue, Christie, Noble et Gill sur les changements soupçonnés par le Dr Klein dans les régions de la Lune voisine de Huygens.

Discussion entre MM. Plummer, Christie, Ranyard et Noble sur les phénomènes physiques des occultations d'étoiles.

Sawyer (*E.-F.*). — Les étoiles filantes du 23 au 30 novembre 1878. (339).

* *Abney* (*W. de W.*). — *Photographic....* Le procédé de l'émulsion en Photographie. (340-344). [J. Brett].

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en février. (344-345).

Denning (*W.-F.*).—Notes sur les météores de février. (345-346).

Struve (*O.*). — Remarques sur les mesures d'étoiles doubles faites à Poulkova. (347-349).

M. Struve, répondant à quelques critiques de M. Downing, explique qu'il n'a pas employé à ses mesures le micromètre à double image de M. Airy, parce que, à l'époque où cet instrument a acquis une perfection suffisante, ses mesures étaient déjà entreprises, et qu'il ne lui paraît pas prouvé qu'il soit plus exact que le micromètre à fils.

Birt (*W.-R.*). — Note sur le cratère du Dr Klein voisin de Huygens. (349-351).

Schuster (*A.*). — La couronne solaire et les anneaux météoriques. (351-352).

* *Lockyer* (*J.-N.*). — Quels sont les éléments des corps composés ? (353-355).

Marth (*A.*). — Éphémérides des deux satellites extérieurs d'Uranus en février et mars 1879. (355).

Memoranda astronomiques pour février et mars 1879. (356).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 14 février 1879. (357-363).

Doberck (*W.*). — L'inventeur de la lunette. (364-370).

L'inventeur de la lunette est Jean Lapprey, de Middelbourg, qui obtint un privilége des États de Hollande en 1608.

Russell (*H.-C.*). — Note sur les observations astronomiques faites

dans les Montagnes Bleues, auprès de Sydney. (N.-S.-W.). (370-375).

A propos des observations à faire pour le passage de Vénus de 1874, M. Russell a transporté à la station de Woodford, située dans les Montagnes Bleues, à une altitude de 2200 pieds anglais, un équatorial de $7\frac{1}{4}$ pouces de Merz et un spectroscope de Hilger. A l'aide de ces deux instruments, il a pu constater par des observations spectrales des lignes solaires voisines de D et par des observations sur Jupiter et des étoiles doubles la transparence extrême du ciel de ces montagnes. L'augmentation de transparence sur le ciel de Sydney est d'environ 50 pour 100. La Note de M. Russell est accompagnée d'un dessin des lignes voisines de D aux diverses heures du jour, qui montre très-bien quelles sont celles de ces lignes qui ont une origine atmosphérique.

* *Flammarion* (*C.*). — Catalogue d'étoiles doubles. 1 vol. Paris, 1878. (376-380).

Gledhill (*J.*). — Étoiles doubles à observer en mars. (380-382).

Denning (*W.-F.*). — Notes sur les météores de mars. (382-383).

Downing (*A.-W.*). — Remarques sur les mesures d'étoiles doubles par M. O. Struve. (383-385).

Réponse aux objections que M. O. Struve avait faites à l'emploi du micromètre à double image pour la mesure des étoiles doubles. M. Downing affirme la supériorité de ce dernier sur le micromètre à fils, en invoquant le témoignage des recherches de M. Barclay à Leyton.

* *Newcomb* (*S.*). — *Researches on*.... Recherches sur le mouvement de la Lune. 1 vol. Washington, 1878. (386-388). [E. Neison].

* *Holden* (*A.-P.*). — *The Sun-spot*.... Le cycle des taches solaires. (*Metropolitan scientific Association*). (389-390).

* *Pickering*. — Rapport sur les travaux de l'Observatoire de Harvard College en 1878. (391-392).

Marth (*A.*). — Éphéméride des satellites d'Uranus en mars-avril 1879. (393).

Memoranda astronomiques pour mars-avril 1879. (394).

Réunion de la Société Astronomique de Londres le 14 mars 1879. (395-410).

Vive discussion entre MM. Talmage, Knott, Gill, Neison, Dunkin, Christie, lord Lindsay, etc., à propos d'une Note de M. Sadler sur quelques erreurs qui se rencon-

trent dans le *Celestial cycle* de l'amiral Smyth; la mémoire de l'amiral Smyth est défendue par tous les orateurs.

Trouvelot (E.-L.). — Note sur quelques taches observées sur Jupiter le 25 septembre 1878. (410-412).

* *Schmidt (J.-F.-J.)*. — Carte de la Lune. (413-415). [J. Birmingham].

Gledhill (J.). — Étoiles doubles à observer en avril. (415-416).

Denning (W.-F.). — Notes sur les météores d'avril. (416-418).

Ellery (R.-L.-J.). — Spectre de η d'Argo.

* *Schmidt (J.-F.-J.)*. — Observations d'étoiles variables. (*Astron. Nachr.*, n°s 2213 à 2227). (419-420).

* *Lœwy (M.)*. — Nouvelle méthode pour la mesure de la flexion des instruments méridiens. (*Comptes rendus*, t. LXXXVII, n° 24). (421).

* *Gaillot*. — Note sur un changement annuel de la latitude de l'Observatoire de Paris. (*Comptes rendus*, t. LXXXVII, n° 19.) (422).

Tacchini. — Visibilité de la couronne solaire en plein jour. (423-424).

Marth (A.). — Éphéméride des deux satellites extérieurs d'Uranus pour avril-mai 1879. (425).

Memoranda astronomiques pour mai 1879. (426). G. R.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome LXXXVIII; 1879, 1er semestre.

N° 16; 21 avril.

Baillaud. — Observations des phénomènes des satellites de Jupiter, faites à l'Observatoire de Toulouse en 1878. (803).

Appell. — Formation d'une fonction $F(x)$ possédant la propriété $F[\varphi(x)] = F(x)$. (807).

Soit $\varphi_{-1}(x)$ la fonction inverse de $\varphi(x)$; posons

$$\varphi_n(x) = \varphi\{\varphi[\ldots\varphi(x)]\},$$
$$\varphi_{-n}(x) = \varphi_{-1}\{\varphi_{-1}[\ldots\varphi_{-1}(x)]\},$$

les symboles fonctionnels φ et φ_{-1} étant employés n fois dans les seconds membres. Considérons encore une fonction rationnelle $f(u)$ d'une variable u et formons la série

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[\varphi_n(x)],$$

$f[\varphi_n(x)]$ étant ce que devient $f(u)$ quand on y remplace u par $\varphi_n(x)$. Si cette série est convergente, elle définit une fonction $F(x)$ qui possède la propriété

$$F[\varphi(x)] = F(x).$$

L'auteur applique ce procédé aux cas où l'on a $\varphi(x) = x^2$, $x^3 - 1$.

N° 17; 28 avril.

Jamin (J.). — Sur la lumière électrique. (829).

Gournerie (de la). — Sur des critiques relatives à des expériences entreprises pour déterminer la direction de la pression dans les arches obliques. (832).

Borchardt (C.). — Sur le choix des modules dans les intégrales hyperelliptiques. (834).

Dans les intégrales elliptiques, le module peut être défini sous deux formes différentes qui s'accordent pourtant entièrement, l'une algébrique, qui repose sur la considération des valeurs pour lesquelles s'évanouit le radical qui se trouve sous l'intégrale, l'autre transcendante, qui donne la racine carrée du module en forme de quotient de deux fonctions ϑ à argument zéro.

C'est la première de ces définitions que Richelot a étendue aux intégrales hyperelliptiques; mais les modules qu'il introduit n'ont aucune analogie, sous le point de vue transcendant, avec les modules des fonctions elliptiques.

M. Borchardt, en se bornant d'ailleurs au cas où le polynôme sous le radical ne dépasse pas le sixième degré, propose de substituer aux trois modules de Richelot trois autres modules, qui correspondent exactement, sous le point de vue transcendant, à la définition du module des fonctions elliptiques, et dont on obtient les racines carrées en divisant par le ϑ principal (ϑ_5 de M. Weierstrass) les trois fonctions ϑ, qui en dérivent par l'addition d'une demi-période réelle, et faisant ensuite l'argument égal à zéro dans les quotients.

Tempel. — Observation de la comète périodique II, 1867 (Tempel), faite par M. Tempel à l'Observatoire de Florence. (849).

Gyldén (H.). — Sur une nouvelle forme des coordonnées dans le problème des deux corps. (850).

En posant $t = f(u)$ dans les équations

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{y}{r^3} = 0,$$

on obtient deux équations différentielles où la variable u remplace le temps t; on peut ensuite établir entre u et r telle relation que l'on voudra; M. Gyldén examine le cas où l'on pose $f'(u) = \beta r$, βr^2, $\beta r^{\frac{3}{2}}$, β étant une constante; dans les deux premiers cas, u représente l'anomalie vraie ou l'anomalie excentrique; mais la troisième supposition est particulièrement intéressante, parce qu'elle permet d'exprimer les coordonnées du mobile en fonctions elliptiques de la variable u, liée elle-même au temps t par une équation simple.

Picard (E.). — Sur une classe de fonctions non uniformes. (852).

L'auteur donne le moyen de trouver un développement, valable pour tous les points du plan, d'une fonction d'une variable complexe n'admettant que trois points singuliers; sa méthode s'applique, par exemple, aux fonctions qui naissent de l'intégration de l'équation différentielle linéaire à laquelle satisfait la série hypergéométrique. Il y montre d'abord comment la substitution $z = e^{\frac{1}{y}}$ permet d'obtenir, pour une fonction n'ayant à l'intérieur d'un cercle dont l'origine est le centre qu'un seul point singulier situé à l'origine, un développement valable pour tous les points du cercle; puis, en s'aidant des recherches de M. Fuchs sur l'équation différentielle linéaire qui relie les quantités K et K' au carré z du module de la fonction elliptique et sur la fonction z de q définie par l'égalité $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$, fonction holomorphe dans le cercle de rayon égal à 1 et dont le centre est à l'origine, il parvient à la solution du problème qu'il s'est posé.

Pictet (R.). — Démonstration théorique et expérimentale de la définition suivante de la température : « La température est représentée par la longueur de l'oscillation calorifique des molécules d'un corps ». (855).

Bourbouze. — Sirène à régulateur électromagnétique. (858).

André (Ch.). — Sur un mode d'enregistrement continu de la direction du vent. (858).

N° 18; 5 mai.

Gournerie (de la). — Expériences pour déterminer la direction de la pression dans une arche biaise. (834).

Borchardt.—Sur les transformations du second ordre des fonctions hyperelliptiques qui, appliquées deux fois de suite, produisent la duplication. (885).

Les formules de la transformation de Landen établissent une liaison du second ordre entre des fonctions doublement périodiques au module $\frac{1-k'}{1+k'}$ et d'autres au module k. En composant les formules de Landen avec celles de la transformation imaginaire élémentaire, les fonctions doublement périodiques au module k se changent en d'autres au module k'. On parvient donc, par cette composition, à une transformation imaginaire et du second ordre qui conduit du module k' au module $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$; l'expression $\frac{1-k'}{1+k'}$ ayant la propriété que, appliquée deux fois de suite, elle ramène le module primitif k', il est clair que la transformation considérée, appliquée deux fois, produit la duplication. M. Borchardt recherche l'analogue de cette propriété dans les fonctions hyperelliptiques; la transformation à laquelle il parvient jouit de cette propriété que les modules primitifs $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ et les modules transformés λ_1, λ_2, λ_3, modules définis par l'auteur dans la séance du 28 avril, sont liés entre eux par les équations

$$\lambda_1 = \frac{1-\varkappa_1-\varkappa_2-\varkappa_3}{1+\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3},$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\varkappa_1-\varkappa_2-\varkappa_3}{1+\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3},$$

$$\lambda_3 = \frac{1-\varkappa_1-\varkappa_2+\varkappa_3}{1-\varkappa_1-\varkappa_2+\varkappa_3},$$

qui, appliquées deux fois de suite, font retomber sur le module primitif.

Mannheim (A.). — Détermination géométrique des ombilics de la surface de l'onde. (902).

Jordan (C.). — Sur l'équivalence des formes algébriques. (906).

Deux formes à n variables de degré m, à coefficients réels et complexes, sont dites algébriquement équivalentes si l'une peut être transformée dans l'autre par une substitution linéaire de déterminant 1. L'équivalence est dite arithmétique et les deux formes appartiennent à la même classe si les coefficients de la substitution sont des entiers réels ou complexes. M. Jordan démontre en général que les formes à coefficients entiers (réels ou complexes) algébriquement équivalentes à une même forme de déterminant différent de zéro ne constituent qu'un nombre limité de classes, proposition qui n'était établie que pour les formes quadratiques et les formes binaires.

Gasparis (*A. de*). — Sur le calcul des perturbations. (908).

Siacci (*F.*). — Sur un théorème de Dynamique. (909).

Lorsqu'un point parcourt une courbe plane, si l'on décompose la force en deux, l'une passant par un point fixe quelconque, l'autre suivant la tangente, la première est proportionnelle au rayon vecteur, au cube inverse de la distance p du point fixe à la tangente et à une fonction arbitraire; la seconde est proportionnelle au carré inverse de la distance p et à une autre fonction arbitraire, qui est la dérivée par rapport à l'arc de la première fonction multipliée par le rayon de courbure.

N° 19; 12 mai.

Chevreul (*E.*). — De la vision des couleurs et particulièrement de l'influence exercée sur la vision d'objets colorés qui se meuvent circulairement quand on les observe comparativement avec des corps en repos identiques aux premiers. (929).

Mouchez. — Cartes de la côte de Tunisie et de Tripoli. (950).

Gournerie (*de la*). — Sur l'histoire de la théorie de la poussée au vide dans les arches biaises. (952).

Borchardt. — Sur les transformations du second ordre des fonctions hyperelliptiques qui, appliquées deux fois de suite, produisent la duplication. (955).

La transformation hyperelliptique imaginaire et du second ordre exposée dans la séance précédente n'est pas la seule qui jouisse du caractère particulier qui est considéré par l'auteur : il existe une grande variété de ces transformations et parmi elles se trouvent un certain nombre de transformations réelles; parmi ces dernières, M. Borchardt étudie spécialement celle qui lie entre eux les résultats de Göpel et de M. Rosenhain.

Callandreau (*O.*). — Sur les moyens employés par M. Gyldén pour régler la convergence des développements trigonométriques représentant les perturbations. (960).

Gyldén. — Sur une nouvelle forme des coordonnées dans le problème des deux corps. (963).

Suite de la Communication du 28 avril. L'auteur montre comment les expressions qu'il a trouvées pour les coordonnées d'un mobile attiré vers un centre fixe, suivant la loi de Newton, s'appliquent encore lorsque l'excentricité est plus grande que l'unité et même lorsque la force est répulsive.

André (*D.*). — Développements de séc x et de tang x. (965).

Règle pour former directement les coefficients.

Mouton. — Sur deux applications de la méthode de MM. Fizeau et Foucault. (967).

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT ([1]).

Tome LXXXIV; 1878.

Frobenius. — Sur les substitutions linéaires et les formes bilinéaires. (1-63).

Dans les recherches sur la transformation des formes quadratiques en elles-mêmes, on s'est borné jusqu'à présent à considérer le cas général, et l'on n'a épuisé que pour les formes ternaires les exceptions que subissent les résultats dans certains cas spéciaux (Bachmann, t. LXXVI, p. 331; Hermite, t. LXXVIII, p. 325 du même Recueil): c'est pourquoi M. Frobenius a cherché à combler cette lacune, qui se trouve aussi bien dans la démonstration des formules qu'ont données MM. Cayley (t. XXXII, p. 119) et Hermite (t. XLVII, p. 309) pour les coefficients de la substitution que dans les réflexions faites par M. Rosanes (t. LXXX, p. 52) sur le caractère de la transformation. En remplaçant les formes quadratiques par des formes symétriques bilinéaires, l'auteur fut porté à étendre ses recherches à des formes alternées. La question relative à l'existence de représentations rationnelles analogues pour la transformation de toute forme bilinéaire à variables cogrédientes en elle-même est encore à examiner de plus près. Si la forme est génerale, c'est-à-dire si toutes les racines d'une certaine équation sont toutes différentes les unes des autres, elle se prête à une telle représentation, signalée par M. Christoffel.

Quand on ne soumet préalablement à une substitution linéaire qu'une série des variables d'une forme bilinéaire, les coefficients de la forme primitive entrent dans les expressions pour les coefficients de la forme transformée tout de même que les coefficients des substitutions. Donc, la forme étant regardée comme un opérande et la substitution comme une opération qu'on lui fait subir, dans le résultat, la différence qui est entre l'opérande et l'opérateur se trouve être oblitérée, de la même manière que pour la multiplication celle qui est entre le multiplicande et le multiplicateur, ou pour le calcul des quaternions celle qui est entre un système de deux droites dans l'espace et l'opération de l'allongement et de la rotation qui fait passer un système de cette espèce dans un autre. Ces réflexions ont décidé M. Frobenius à traiter la composition des substitutions linéaires au lieu de la transformation des formes bilinéaires.

§ 1. Multiplication. — § 2. Division. — § 3. Fonctions rationnelles. — § 4. Différentiation. — § 5. Formes décomposables. — § 6. Équivalence. — § 7. Similitude. — § 8. Transformation des formes bilinéaires en elles-mêmes. — § 9. Transformation des formes bilinéaires à variables cogrédientes en elles-mêmes. — § 10. Trans-

([1]) Voir *Bulletin*, 2e série, t. II, p. 241.

formation des formes symétriques et des formes alternées en elles-mêmes. — § 11. Étude des cas limites. — § 12. Formes orthogonales. — § 13. Formes semblables orthogonales. — § 14. Nombres complexes.

Hermite (Ch.). — Sur la formule de Maclaurin. Extrait d'une Lettre à M. Borchardt. (64-69).

La fonction génératrice des sommes

$$S(x)_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (x-1)^n,$$

savoir

$$\frac{e^{\lambda x}-1}{e^{\lambda}-1} = S(x)_0 + \frac{\lambda}{1} S(x)_1 + \frac{\lambda}{1.2} S(x)_2 + \ldots,$$

se change, lorsque l'on remplace λ par $i\lambda$ et que l'on sépare les termes réels des imaginaires, en deux égalités d'où l'on tire immédiatement les propriétés, découvertes par M. Malmsten, des polynômes $S(x)_n$. La facilité avec laquelle ces conséquences découlent de la forme trigonométrique des fonctions génératrices conduit à employer ces mêmes fonctions pour établir la formule de Maclaurin pour $\int_0^{x_0+h} f(x)\,dx$.

Hermite (Ch.). — Sur la formule d'interpolation de Lagrange. Extrait d'une Lettre à M. Borchardt. (70-79).

« Je me suis proposé de trouver un polynôme entier $F(x)$ de degré $n-1$, satisfaisant aux conditions suivantes,

$$\begin{array}{llll} F(a)=f(a), & F'(a)=f'(a), & \ldots, & F^{(\alpha-1)}(a)=f^{(\alpha-1)}(a), \\ F(b)=f(b), & F'(b)=f'(b), & \ldots, & F^{(\beta-1)}(b)=f^{(\beta-1)}(b), \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F(l)=f(l), & F'(l)=f'(l), & \ldots, & F^{(\lambda-1)}(l)=f^{(\lambda-1)}(l), \end{array}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée. En supposant $\alpha+\beta+\ldots+\lambda=n$, la question est, comme on voit, déterminée, et conduira à une généralisation de la formule de Lagrange sur laquelle je présenterai quelques remarques. »

Schendel (Léopold). — Contribution à la théorie des fonctions. (80-84).

Schady. — Tables pour les terminaisons des nombres carrés. (85-88).

Jordan (Camille). — Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique. (89-215).

Introduction. — M. Fuchs s'est proposé (ce Journ., t. LXXXI) de déterminer les divers types d'équations linéaires du second ordre $\frac{d^2u}{dz^2}+f(z)\frac{du}{dz}+f_1(z)u=0$ dont l'intégrale générale est algébrique. A cet effet, après avoir transformé l'équa-

tion proposée en une autre ne contenant plus la dérivée $\frac{du}{dz}$, il établit, par des considérations fondées sur la théorie des covariants, que, en désignant par x, y deux intégrales particulières de l'équation transformée, il existe une fonction entière et homogène $\varphi(x, y)$, d'un degré non supérieur à 12, qui est racine d'une équation binôme ayant pour second membre une fonction rationnelle de la variable.

M. Klein a confirmé et précisé ces résultats (*Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen*, 1876) en s'appuyant sur la détermination qu'il avait faite précédemment (*Mathematische Annalen*, t. IX) des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à deux variables.

Il est aisé, en effet, de se rendre compte de l'identité de ces deux problèmes.

Soit

$$\frac{d^m u}{dz^m} + f_1(z)\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + \cdots + f_m(z)u = 0,$$

une équation différentielle linéaire ayant pour coefficients des fonctions monodromes de z. Elle a un nombre infini de fonctions intégrales, chacune d'elles étant déterminée par les valeurs que prennent la fonction et ses $m-1$ premières dérivées pour la valeur initiale de z. Ces intégrales sont toutes des fonctions linéaires de m d'entre elles, $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Supposons que la variable décrive un contour fermé arbitraire. Lorsqu'elle reviendra au point de départ, les fonctions $u_1, u_2, \ldots$ pourront redevenir les mêmes, ou, plus généralement, auront été transformées en $\alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \ldots, \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots$, $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_2, \beta_2, \ldots$ étant des constantes dont le déterminant est $\gtrless 0$. L'ensemble des substitutions

$$u_1, u_2, \ldots, \quad \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \ldots, \quad \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots,$$

correspondantes aux divers contours fermés que l'on peut tracer dans le plan, formera le *groupe* de l'équation différentielle proposée.

Si les diverses intégrales $u_1, u_2, \ldots$ satisfont à des équations algébriques ayant pour coefficients des fonctions monodromes de z, une intégrale quelconque $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots$ n'aura qu'un nombre fini de valeurs distinctes et, par suite, le groupe de l'équation ne contiendra qu'un nombre fini de substitutions. Il y a donc identité entre les deux questions suivantes :

1° Énumérer les divers types d'équations différentielles linéaires d'ordre m dont toutes les intégrales soient algébriques.

2° Construire les divers groupes d'ordre fini que contient le groupe linéaire à m variables.

Dans le Chapitre I du présent Mémoire, nous résolvons ce second problème, pour les équations du second ordre, par une méthode nouvelle et directe. Nous trouvons, d'accord avec M. Klein, qu'en dehors des groupes exclusivement composés de substitutions de la forme $| x, y \;\; ax, by |$ ou de substitutions de cette forme combinées avec une substitution $| x, y \;\; cv, dx |$, il n'existe que trois types de groupes d'ordre fini....

Dans le Chapitre II, nous étendons cette méthode au cas d'un nombre quelconque p de variables, et nous arrivons à ce théorème fondamental :

Tout groupe G *d'ordre fini contenu dans la groupe linéaire à p variables contiendra un groupe* F *de substitutions de la forme*

$$| x, y, z, \ldots, \quad ax, by, cz, \ldots |,$$

auquel toutes ses substitutions sont permutables, et G *aura pour ordre* λf, f *étant l'ordre de* F *et* λ *un entier inférieur à une limite fixée, laquelle ne dépend que de* p.

Cette proposition, qui ne diffère que par l'énoncé de celle qu'avait trouvée M. Fuchs pour le cas où $p = 2$, peut encore se formuler comme il suit :

Théorème I. — *Si une équation différentielle linéaire*

$$\frac{d^p u}{dt^p} + A_1 \frac{d^{p-1} u}{dt^{p-1}} + \cdots + A_p u = 0$$

a toutes ses intégrales algébriques, ces intégrales s'exprimeront linéairement par les racines d'équations binômes dont les seconds membres sont des fonctions monodromes de t *et des racines d'une équation auxiliaire* $X = 0$. *Le degré de cette équation auxiliaire sera inférieur à une limite fixe.*

Dans le Chapitre III, nous traitons le cas où $p = 3$. Ces résultats, appliqués aux équations différentielles, donnent le théorème suivant :

Théorème II. — *Si l'équation linéaire du troisième ordre*

$$\frac{d^3 u}{dt^3} + A_1 \frac{d^2 u}{dt^2} + A_2 \frac{du}{dt} + A_3 u = 0$$

a ses intégrales algébriques, l'équation auxiliaire $X = 0$ *du théorème I aura pour degré* 1, 2, 3, 4, 5 *ou* 9. *Dans ce dernier cas, ce sera une équation hessienne.*

Stern. — Généralisation d'une formule de Jacobi. (216-218).

Soient, n étant entier,

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + x^n,\ (n, \nu) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu};$$

on aura

$$2^{n-1} S_n = (n, 1) S_{2n-1} + (n, 3) S_{2n-3} + (n, 5) S_{2n-5} + \ldots.$$

Mehler. — Sur l'application d'une variété à quatre dimensions à la déduction de systèmes de surfaces orthogonales. (219-230).

En liant convenablement une transformation qui se fait au moyen de rayons vecteurs réciproques partant d'un centre réel à une autre prenant son origine dans un centre imaginaire, on parvient à une substitution qui, tout en faisant correspondre des éléments réels d'une figure géométrique de l'espace à des éléments imaginaires d'une autre, peut néanmoins présenter des avantages sensibles dans quelques applications. Ainsi elle peut nous fournir le moyen de passer d'un système orthogonal composé d'un faisceau de surfaces sphériques concentriques (imaginaires) et de deux faisceaux de surfaces coniques à un système de surfaces (réelles) de rotation et de leurs plans méridiens, les plans méridiens correspondant au faisceau de surfaces sphériques, les cercles parallèles aux lignes de courbure droites, les courbes méridiennes aux lignes de courbure sphériques. Le Mémoire de M. Wangerin, au Tome LXXXII de ce Journal, m'a fait reprendre la substitution mentionnée dont j'ai fait usage il y a longtemps pour rendre plus accessibles quelques calculs qu'on peut encore effectuer par d'autres procédés, et, en l'étendant à un nombre quelconque de variables, j'ai obtenu quelques résultats remarquables. En particulier,

m'appuyant sur quatre variables, j'ai réussi à tirer des coordonnées généralisées elliptiques le système étudié par M. Wangerin et, sous d'autres points de vue, par MM. Darboux et Tisserand. A la fin, je me suis aperçu de ce qu'une substitution réelle conduit à des résultats semblables, quoique non identiques.

Röthig (*O.*).— Le théorème de Malus et les équations des surfaces définies par ce théorème. (231-237).

Cayley (*A.*). — Sur la surface du quatrième ordre à seize points nodaux. (238-241).

Cantor (*G.*). — Une contribution à la théorie des variétés. (242-258).

Les recherches qu'ont faites Riemann et Helmholtz, et après eux d'autres géomètres, sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie, prennent leur point de départ de la définition d'une variété continue à n dimensions et en posent le critère essentiel dans la dépendance où sont ses éléments de n variables indépendantes réelles, continues, de telle sorte que tout élément de la variété appartient à un système admissible des $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et *vice versa*, que tout système admissible des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ appartient à un certain élément de la variété. En général, il résulte du raisonnement de ces recherches qu'on a admis tacitement l'hypothèse que la correspondance fondamentale des éléments de la variété et du système des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soit continue, c'est-à-dire telle qu'à toute variation infiniment petite du système des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corresponde une variation infiniment petite de l'élément correspondant, et *vice versa*. M. Cantor n'a point l'intention de trancher la question si cette supposition peut être considérée comme suffisante ou bien si elle doit être complétée par des suppositions additionnelles plus spéciales pour que la formation en vue de la notion d'une variété continue à n dimensions puisse être regardée comme à l'abri de toute contradiction et solide en soi-même ; mais il se borne seulement à montrer que lorsqu'on y renonce, c'est-à-dire lorsqu'on ne restreint en aucune manière la correspondance entre la variété et ses coordonnées, alors le caractère désigné par ces auteurs comme essentiel, et qui consiste dans la dépendance mutuelle des éléments et des coordonnées, devient tout à fait illusoire, car, comme le montre la recherche, il est possible de déterminer les éléments d'une variété continue à n dimensions au moyen d'une seule variable réelle et continue t. Donc une surface continue ne se refuse pas à être mise en correspondance uniforme et complète avec une ligne continue; la même chose a lieu pour des corps continus et pour des figures quelconques à n dimensions.

Godt (*W.*). — Sur la généralisation steinérienne du problème de Malfatti. (259-263).

Hamburger. — Sur les racines de l'équation fondamentale qui appartient à un point singulier d'une équation différentielle linéaire. (264-266).

Stern.— Contribution à la théorie des nombres de Bernoulli. (267-269).

Lampe (*E.*). — Sur la généralisation d'une formule de Jacobi. Extrait d'une Lettre à M. Stern. (270-272).

Grassmann (*Hermann-Gunther*). — Application de la science de l'étendue à la théorie générale des polaires et au développement des relations algébriques. (273-283).

Ce Mémoire est le dernier travail de l'éminent savant, qui décéda avant l'impression le 26 septembre 1877.

M. Reye a développé ses idées très-fécondes sur la théorie des formes algébriques et la généralisation de la théorie des polaires dans une suite de Mémoires publiés au même Journal. Les méthodes qu'il a employées se simplifient beaucoup par les principes de la *Théorie de l'étendue* (*Ausdehnungslehre*, titre de l'Ouvrage principal et très-original de l'auteur, paru pour la première fois en 1844, pour la seconde fois en 1862), et dès lors on voit de nouvelles voies s'ouvrir dans ce domaine si difficilement accessible et pourtant si fécond.

Königsberger. — Sur des relations algébriques entre des intégrales d'équations différentielles distinctes. (284-293).

Lindemann. — Extrait d'une Lettre à M. Hermite, concernant l'application des intégrales abéliennes à la Géométrie des courbes planes. (294-297).

Hermite. — Extrait d'une Lettre à M. Lindemann. (298-299).

Lindemann. — Extrait d'une seconde Lettre à M. Hermite, concernant l'application des intégrales abéliennes à la Géométrie des courbes planes. (300-304).

Lorberg (*H.*). — Sur la loi fondamentale de l'Électrodynamique. (305-331).

§ 1. Introduction. — § 2. Application des théorèmes (1) et (2). — § 3. Application du théorème (3). — § 4. Application du théorème (4). La loi élémentaire pondéromotrice et électromotrice. — § 5. Détermination des fonctions contenues dans U. La loi fondamentale électrodynamique.

Voici le résultat de la recherche. Des suppositions principales établies au § 1 il s'ensuit que, quand on n'a pas égard à une force éventuelle électromotrice du bout d'un courant, l'action pondéromotrice et électromotrice de deux éléments de courant doit nécessairement s'effectuer d'après la loi fondamentale de Weber; de plus, que dans un courant électrique les deux électricités coulent avec des vitesses égales et opposées; enfin, à l'aide des hypothèses accessoires faites dans le dernier paragraphe, il résulte que la loi fondamentale de Weber est la seule possible.

Weber (*H.*). — Sur la surface kummérienne du quatrième ordre à seize points nodaux et sa corrélation avec les fonctions Θ de deux variables. (332-354).

« Le troisième cahier du Tome LXXXIII de ce Journal contient deux Mémoires d'un grand intérêt de MM. Cayley et Borchardt; ils se rapportent à la représentation de la surface kummérienne au moyen des fonctions Θ. L'étude de ces Mémoires me rappela une recherche sur les caractéristiques des fonctions Θ de deux variables que j'ai faite il y a longtemps, mais sans penser à aucune application géométrique. Cependant on peut en appliquer les résultats à la solution du problème en question et en tirer quelques conclusions qui ne me semblent pas dépourvues d'intérêt. »

Nous signalons surtout le résultat fort inattendu que, étant donnés six points nodaux tels qu'il n'y en ait pas quatre qui soient situés dans un plan tangent singulier, alors les dix autres peuvent être trouvés par une construction linéaire.

Mertens (*F.*). — Théorèmes sur certains déterminants et leur application à la démonstration des théorèmes de Pascal et de Brianchon. (355-359). E. L.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BRUXELLES; nouvelle série : Astronomie. In-4°. Bruxelles.

Tome I; 1878.

Les *Annales de l'Observatoire de Bruxelles* ont commencé à paraître en 1834, et leur publication a depuis été continuée sans interruption par les soins du fondateur de l'Observatoire, A. Quetelet. Les premiers Volumes étaient comme le résumé de l'ensemble des travaux de l'Observatoire et renfermaient des Mémoires relatifs à l'Astronomie et à la Météorologie. La série actuelle sera divisée en deux Parties : Astronomie et Météorologie, et se composera de deux publications parallèles et indépendantes. M. Houzeau a pensé avec raison que cette division était devenue nécessaire à la suite du développement pris par l'une et l'autre des sciences qui forment l'objet des études de l'établissement qu'il vient d'être appelé à diriger.

Le premier Volume des *Annales astronomiques* renferme deux importants Mémoires de M. Houzeau, ayant pour titres : *Uranométrie générale; Répertoire des constantes de l'Astronomie.*

Le mot *Uranométrie* s'applique, depuis Argelander, aux descriptions du ciel qui comprennent exclusivement les étoiles visibles à l'œil nu. La première en date est celle de Bayer (1603); puis sont venues celle d'Argelander (1843), de Heis (1872) et enfin de Behrmann (1874), qui a étendu au ciel austral les travaux de son prédécesseur. Ces divers travaux avaient l'inconvénient de n'avoir pas été produits d'un seul jet par les efforts d'un observateur unique, et manquaient de l'homogénéité indispensable à une telle œuvre. L'*Uranométrie* de M. Houzeau échappe à toutes les critiques de cette espèce. Fixé pendant quelques années à la Jamaïque, il a pu assez facilement se transporter d'un hémisphère dans l'autre et, dans un temps très-court, procéder à un examen général de toutes les étoiles visibles à l'œil nu dans l'étendue entière de la sphère céleste. Voulant procéder indépendamment de tous les travaux antérieurs, M. Houzeau a d'abord fait un dessin de toutes les étoiles visibles pour lui, avec l'indication de leurs grandeurs, et ce n'est que plus

tard qu'il les a identifiées aux Catalogues anciens. Les déterminations sont donc originales et contemporaines, deux choses importantes pour un travail de cette espèce.

Dans son Catalogue des 6000 étoiles environ qui sont visibles à l'œil nu et dans l'Atlas qui l'accompagne, l'auteur a suivi la division ordinaire de ces étoiles en six ordres ou grandeurs; mais sur les Cartes chaque grandeur a été, par une notation typographique particulière, divisée en deux. Dans ces dernières on remarquera surtout le procédé ingénieux suivi pour représenter la voie lactée et les nébuleuses; l'éclat du ciel y est figuré par des courbes d'égale intensité lumineuse, absolument comme on figure le relief du terrain par des courbes de niveau dans les Cartes topographiques, et les plaques lumineuses dans lesquelles Herschel avait cru pouvoir diviser la voie lactée deviennent ainsi remarquablement apparentes.

Nous ne pouvons suivre ici M. Houzeau dans les détails qu'il donne sur sa méthode d'estimation des grandeurs des étoiles et sur la manière dont les courbes d'égale intensité lumineuse ont été tracées, mais nous pouvons affirmer que les précautions prises et la méthode suivie ne laissent aucun doute sur l'exactitude de ces déterminations.

Comme conséquence naturelle de ce travail, le savant directeur de l'Observatoire de Bruxelles a cherché la position du pôle de la voie lactée supposée former un cercle passant par les points les plus lumineux; la position de ce point est :

Ascension droite.......	$2^h 49^m,1$	Équinoxe de 1880,0.
Déclinaison	$-27°30'0$	

Cette détermination diffère peu de celle qui a été faite par W. Struve, à la suite de ses études d'Astronomie stellaire.

Les travaux des deux Herschel, de W. Struve et d'Argelander ont mis en évidence, surtout pour les étoiles télescopiques, une loi de concentration vers la voie lactée: cette même loi existe-t-elle pour les étoiles visibles à l'œil nu? M. Houzeau montre qu'elle subsiste et qu'à partir de la trace médiane de la voie lactée la densité des couches stellaires parallèles au plan de ce grand cercle va en décroissant d'une manière graduelle et nettement caractérisée, et, résultat inattendu, l'influence de la voie lactée est plus marquée pour les étoiles des trois premières grandeurs que pour les trois suivantes. Toutefois, comme les calculs portent ici sur un très-petit nombre d'étoiles, le résultat a peut-être quelque chose de fortuit; mais la remarque n'en est pas moins singulière.

L'ensemble du Mémoire sur l'*Uranométrie* ne comprend pas moins de 117 pages; il est accompagné d'une Carte céleste en cinq feuilles.

Le second des Mémoires de M. Houzeau a, nous l'avons déjà dit, pour titre: *Répertoire des constantes de l'Astronomie;* il renferme 271 pages.

Les constantes dont les astronomes ont autrefois fait usage, celles qu'ils emploient aujourd'hui sont souvent difficiles à réunir, et la connaissance incomplète de la bibliographie relative à un sujet donné expose trop souvent à employer pour les différents éléments d'un même problème ou des nombres d'une exactitude contestable, ou même des nombres contradictoires, s'ils ne sont pas tous empruntés à la même source originale. M. Houzeau a donc fait une chose nécessaire, vraiment utile, en groupant d'une manière systématique les diverses constantes qui se rapportent à un même corps céleste et en indiquant la source originale où ces chiffres étaient puisés. Rapprochés les uns des autres, ces chiffres montrent parfois, par leur convergence vers une valeur déterminée, les progrès constants des méthodes d'observation et de calcul. D'autres fois, au contraire, le désaccord des résultats

peint aux yeux l'incertitude et même le caractère illusoire de certaines déterminations. Comment, par exemple, pourrait-on donner une idée plus juste de l'incertitude qui règne sur la parallaxe des étoiles qu'en dressant le Tableau des valeurs successives de la parallaxe attribuée à une même fixe?

Le *Répertoire* de M. Houzeau a été divisé en dix-neuf Chapitres : Astronomie sphérique; éléments des planètes connues des anciens; le Soleil; Mercure; Vénus; la Terre; la Lune; Mars; Astéroïdes; Jupiter; Saturne; Uranus; Neptune; les comètes; météorites; ensemble du système solaire; dénombrement des étoiles; caractère particulier des étoiles; relations des étoiles entre elles. Dans chaque Chapitre, des subdivisions, en nombre variable, ont été faites pour les diverses questions relatives à un même astre.

L'auteur a d'ailleurs pris soin d'indiquer d'une manière scrupuleuse le titre exact, le format, la date des Ouvrages ou Mémoires dont sont extraits les chiffres qu'il cite. Chaque Chapitre est donc une bibliographie rigoureuse des diverses questions d'Astronomie planétaire ou stellaire, et à ce point de vue le Mémoire de M. Houzeau sera consulté avec fruit par tous ceux auxquels les questions historiques ne sont point indifférentes.

Tome II; 1879.

Le Tome II des *Annales astronomiques de l'Observatoire de Bruxelles* est tout entier consacré aux observations.

Il renferme les observations faites au cercle mural et à la lunette méridienne en 1873, 1874 et 1875 dans le but de compléter le Catalogue des étoiles à mouvement propre, commencé il y a déjà plusieurs années par M. E. Quetelet, et dont la publication est, croyons-nous, prochaine. Les observations de chaque année sont d'ailleurs résumées dans un Catalogue partiel, pour lequel la position des étoiles a été réduite au 1er janvier.

Ce Volume se termine enfin par la publication des observations physiques faites par M. Niesten sur la planète Mars pendant son opposition de 1877. Le Mémoire de M. Niesten est accompagné d'une série de planches reproduisant les dessins de l'auteur et donnant l'aspect de Mars avec une vérité d'effet vraiment surprenante.

G. R.

CATALOGUE DES OUVRAGES D'ASTRONOMIE ET DE MÉTÉOROLOGIE QUI SE TROUVENT DANS LES PRINCIPALES BIBLIOTHÈQUES DE LA BELGIQUE. — 1 vol. in-8°, XXIII-645 pages. Bruxelles, 1878.

Le Volume dont nous venons de transcrire le titre a été préparé à l'Observatoire de Bruxelles par M. Lancaster, sous la direction de M. Houzeau, qui dans une préface de quelques pages indique le but qu'on s'est proposé et les moyens qui ont été employés pour l'atteindre.

Le Catalogue de la bibliothèque de l'Observatoire avait été publié une première fois en 1847, mais l'augmentation rapide du nombre des Volumes en rendait aujourd'hui une seconde édition nécessaire. Au moment de l'entreprendre M. Houzeau a pensé qu'on rendrait un service plus important aux hommes d'étude en comprenant dans ce travail, outre ce qui existe à l'Observatoire, les ressources disséminées dans les autres bibliothèques publiques ou conditionnellement accessibles de la Belgique.

Ainsi, tandis que l'Observatoire possède le plus grand nombre des Ouvrages modernes, la Bibliothèque Royale a trouvé dans le fonds Van Hulthem une grande partie de la bibliothèque de Lalande; enfin quelques bibliothèques de province sont particulièrement riches en Ouvrages des XVIe et XVIIe siècles.

Le Catalogue dressé sous l'inspiration de M. Houzeau a été essentiellement limité à l'Astronomie proprement dite et à la Météorologie, les Ouvrages de Mathématiques et de Physique en ayant été rigoureusement exclus. La classification est une classification méthodique et dans chaque section les Livres sont classés par ordre chronologique avec l'indication des établissements où ils se trouvent; une Note sur le format et la date des diverses éditions.

Pour que le lecteur puisse se rendre compte des richesses des bibliothèques belges, qui possèdent des Ouvrages que l'on ne rencontre pas dans les plus grandes collections astronomiques, et de l'importance bibliographique du Volume que nous signalons, nous reproduisons ici l'énumération des diverses divisions du Catalogue :

Histoire et littérature. — Journaux et Mémoires des Sociétés astronomiques; Histoire et Bibliographie; astronomes orientaux, grecs, latins arabes; astronomes depuis le moyen âge jusqu'à Tycho Brahe; astronomes modernes; Recueils des œuvres d'astronomes; Astrologie.

Astronomie théorique. — Traités généraux; système du monde : Astronomie sphérique, gnomonique; calendrier; calculs astronomiques; Mécanique céleste.

Astronomie pratique. — Instruments astronomiques; observatoires; observations diverses; applications à la Géographie et à l'art nautique; éphémérides et Tables.

Astronomie physique. — Lumière des astres; observation physique des astres; Physique des espaces célestes ; la Terre.

Astronomie stellaire. — Astronomie stellaire en général; Sidérographie; caractères particuliers des étoiles; étoiles multiples et nébuleuses.

Météorologie générale. — Partie théorique; Sociétés, Revues et Rapports; instruments et Tables.

Météorologie spéciale. — Mécanique de l'atmosphère; chaleur et lumière, phénomènes électriques; phénomènes magnétiques.

Climatologie et observations météorologiques. — Climatologie; observations et bulletins météorologiques.

Généralités. — Dictionnaires; journaux scientifiques; Sociétés savantes.

Mathématiques et Mécanique. — Mathématiques générales et Analyse; Géométrie; science des nombres et calcul numérique; Mécanique.

Sciences géographiques. — Géographie; Géodésie; Géologie.

Sciences physiques et naturelles. — Physique et Chimie; sciences naturelles.

Par le grand nombre des Ouvrages que renferment les bibliothèques de la Belgique, le Volume dont nous venons de donner un résumé rapide forme une suite utile à la bibliographie de Lalande.

G. R.

ANNUAIRE DE L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BRUXELLES. T. XVI. Bruxelles, chez Hayez. 45e et 46e années : 1878 et 1879.

Ces Annuaires débutent, comme les publications analogues, par un calendrier et les éphémérides astronomiques utiles aux personnes qui ne font pas profession

d'être astronomes : mais leur intérêt principal, leur droit à être signalés dans le *Bulletin* résident dans les Notices spéciales qui en sont le complément.

Dans l'Annuaire de 1878 on trouvera par exemple :

1° Une Table chronologique des découvertes en Météorologie

2° Une bibliographie sommaire des Tables arithmétiques, trigonométriques et logarithmiques.

3° Une Note sur la position géographique des six observatoires particuliers qui existent en Belgique.

4° Une Note sur les nivellements belges par le major *Adan*.

5° Une Notice sur les tempêtes d'Europe par M. *F. Van Rysselberghe*. L'auteur a résumé d'une manière claire et rapide les principes qui régissent la prévision du temps pour les côtes de la Belgique.

6° Une étude sur les orages en Belgique et des données numériques sur le climat de Bruxelles par M. *Lancaster*.

Parmi les Notices scientifiques qui terminent l'Annuaire de 1879 il faut remarquer :

1° Note sur les grandes périodes dans les mouvements des astres par M. *Houzeau*.

2° Une Notice sur les comètes par M. *C. Pilloy*. L'auteur a résumé les connaissances acquises sur ces astres par les travaux modernes.

3° Une bibliographie des Ouvrages, Mémoires et Notices de Spectroscopie qui peuvent intéresser l'Astronomie par M. *C. Fievez*. Cette Notice qui ne compte pas moins de 83 pages, et dont il existe quelques tirages à part, est des plus complètes et sera certainement utile aux spectroscopistes et aux astronomes.

G. R.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGL. BÖHMISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN (1).

Année 1875.

Studnička (*F.-J.*). — Déduction des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique en partant d'un théorème sur les déterminants. (1-8).

Sallabasev (*J.*). — Sur les courbes décrites par un des sommets d'un triangle mobile (66-70.).

Studnička (*F.-J.*). — Sur *Marcus Marci* et son Traité *De proportione motus*, et en particulier, sur les lois du choc élastique. (82-87).

Rectification d'un passage de l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla (t. II, p. 406) relatif à Marcus Marci (Jan Marek), né en 1595 à Landskron en Bohême, mort

(1) Voir *Bulletin*. t. VI, p. 102; t. VIII, p. 229; t. IX, p. 49.

en 1667. Il est le premier qui ait donné un Ouvrage sur le choc des corps; cet Ouvrage a pour titre : *De proportione motus, seu Regula sphygmica*, etc. A la dernière page, on lit : *Pragæ, typis Joannis Bilniæ, anno MDCXXXIX*.

Studnička (*F.-J.*). — Sur la solution d'un système de congruences linéaires. (114-116).

L'auteur donne les multiplicateurs dont il faut se servir pour réduire le problème à des congruences, à une inconnue.

Pelz (*C.*). — Contributions à la construction des coniques données par des points et tangentes à l'aide de la collinéation. (117-135).

Čubr (*E.*). — Le problème des polygones inscrits et circonscrits à des coniques. (156-162).

Les arêtes d'une pyramide régulière (*gleichseitig*) qui tourne autour de son axe engendrent un cône droit à base circulaire; les faces de la pyramide enveloppent un autre cône à même axe. L'auteur considère les sections faites par un plan quelconque dans ces cônes.

Studnička (*F.-J.*). — Sur la forme réduite des quaternions. (183-186).

Schmidt (*G.*). — Théorie du planimètre d'Amsler. (188-191).

Année 1876.

Weyr (*Em.*). — Notices sur une position particulière involutoire de deux coniques. (42-47).

Deux coniques telles que les tangentes construites aux points d'intersection passent par les points de contact de leurs tangentes communes. Une involution cubique de points étant donnée sur une conique, les côtés des triangles formés par ses groupes enveloppent une autre conique, et dans un certain cas ces deux coniques ont la position mentionnée.

Weyr (*Ed.*). — Notice relative à la théorie des fonctions elliptiques. (172-203).

Partant de l'intégrale elliptique de première espèce, l'auteur étudie la marche des fonctions sin am, cos am et Δ am.

Studnička (*F.-J.*). — Sur un rapprochement des carrés magiques avec la théorie des déterminants. (269-271).

Un carré magique à $4n$ côtés, formé d'après les règles de Moschopoulos, étant regardé comme un déterminant, sa valeur est zéro; la même chose a lieu pour ses déterminants mineurs du quatrième, du sixième ..., du $2n^{\text{ième}}$ ordre.

Année 1877.

Weyr (*Ed.*). — Sur le développement en fractions continues des irrationnelles du second degré. (65-72).

Voir *Bulletin*, t. I (2e série), p. 17.

Studnička (*F.-J.*). — Sur l'établissement de propriétés nouvelles des coefficients binomiaux, à l'aide d'un théorème sur les nombres complexes. (92-93).

En partant de ce que la norme de $(x+iy)^n$ est égale à $(x^2+y^2)^n$, l'auteur donne la formule

$$\binom{\nu}{2} = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+1} \binom{n}{j-k} \binom{n}{j+k},$$

où l'on a posé $\nu = \binom{n}{j}$. De cette formule, il tire deux propriétés des coefficients binomiaux.

Studnička (*F.-J.*). — Contribution à la théorie des déterminants. (120-125).

$\Delta' = \Sigma \pm (A_{11} \ldots A_{nn})$ étant le déterminant conjugué de $\Delta = \Sigma \pm (a_{11} \ldots a_{nn})$, l'auteur rappelle les relations qui ont lieu entre les déterminants mineurs de Δ et les déterminants mineurs complémentaires de Δ'. C'est particulièrement l'équation

$$\Delta \Sigma (\pm a_{22} a_{33} \ldots a_{n-1,\,n-1}) = \Sigma \pm (A_{nn} A_{11})$$

qu'il emploie, pour évaluer Δ à l'aide des quatre déterminants A_{11}, A_{1n}, A_{n1}, A_{nn} et du déterminant $\Sigma \pm (a_{22} a_{33} \ldots a_{n-1,n-1})$, tandis qu'en développant Δ suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne, on a besoin de n déterminants mineurs de degré $n-1$. L'auteur donne deux applications de sa formule : l'une relative aux fractions continues, l'autre aux déterminants de degré pair et tels que $a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{pp} = 0$.

Zahradnik (*K.*). — Lieu des points auxquels correspondent relativement à une cissoïde des triangles de contact à aire constante. (125-128).

D'un point P on mène à la cissoïde les trois tangentes; les points de contact forment le triangle de contact dont s'occupe l'auteur.

Weyr (*Em.*). — Les courbes cubiques considérées comme courbes d'involution. (131-133).

On considère une courbe cubique comme lieu des six points d'intersection des quatre tangentes d'un groupe appartenant à une involution biquadratique de tangentes d'une conique.

Zahradnik (*K.*). — Sur les pôles à triangles de contact relatifs à une cardioïde et d'aire constante. Relation entre le pôle et le centre de gravité du triangle de contact. (184-190).

Weyr (*Ed.*). — Sur la représentation conforme d'une surface sur une autre par projection centrale. (273-276).

Il n'y a que deux cas possibles : ou les deux surfaces sont semblables, le centre de similitude étant au centre de projection, ou bien l'une est la transformée de l'autre par rayons vecteurs réciproques, le centre de transformation étant encore au centre de projection.

Zrzavý (*F.*). — Formule simple servant à calculer, au moyen des coordonnées rectangulaires sphériques, la convergence méridienne à l'aide d'une Table auxiliaire. (278-280).

Studnička (*F.-J.*). — Sur l'expression indépendante de la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une puissance, dont la base et l'exposant sont des fonctions d'une variable. (368-373).

Studnička (*F.-J.*). — Nouvelles contributions au Calcul différentiel. (393-399).

Expression de la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ par un déterminant de degré $n+1$. Application aux fonctions $\tang x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{coséc} x$.

Ed. W.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, begründet von H.-C. Schumacher, herausgegeben von Prof. Dr C.-A.-F. Peters. Kiel (¹).

Tome XCIV, nos 2233-2256; 1878-1879.

Seeliger (*H.*). — Mémoire sur le théorème de Gauss relatif aux perturbations séculaires. (1-30).

Trouvelot (*L.*). — Observations du satellite extérieur de Mars, faites à son observatoire de Cambridge. (N.-S.). (29-30).

Les observations ont été faites avec un équatorial de 6,3 pouces anglais et un

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 156.

grossissement de 153; mais l'objet est à la limite de visibilité d'une lunette de cette ouverture.

Dreyer (*J.-L.-E.*). — L'aspect de Mars en 1877. (31-32).

Doberck (*W.*). — Note sur la distribution des étoiles rouges dans l'espace. (31-32).

Les étoiles rouges sont massées dans la région de la voie lactée.

Luther (*R.*). — Perturbations de (56) Mélété par Jupiter, de 1857 à 1879. (33-48).

Gruss (*G.*). — Éphéméride pour l'opposition de (165) Lovely en janvier 1879. (47-48).

Luther (*R.*). — Perturbations de (56) Mélété par Jupiter, de décembre 1879 à janvier 1880, et éphéméride pour l'opposition de la planète en décembre 1879. (49-52).

Upton (*Winslow*). — Éléments et éphéméride de (185) Eunike pour l'opposition de mai et juin 1879. (51-56).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations sur la couleur des étoiles. (55-64).

Plummer (*J.-J.*). — Observations de comètes, faites en 1877 à l'observatoire de Orwell Park. (65-70).

Les comètes observées sont celles de Borrelly, Winnecke, Swift, Coggia et Tempel.

Tebbutt (*J.*). — Observations de la comète d'Encke, faites en août 1878 à Windsor. (N.-S.-W.). (71-74).

Elkin. — Éléments de la comète 1854, V, d'après l'ensemble des observations du 15 janvier au 22 avril 1855. (73-80).

Bredikhine (*Th.*). — Lettre sur la queue des comètes. (79-80).

Bruhns (*C.*). — Observations de petites planètes faites à Leipzig pendant le second semestre de 1878. (81-92).

Tempel (*W.*). — Observations de la comète II de 1873 faites à Arcetri en novembre 1878. (91-94).

Gruss (*G.*). — Étude sur la constitution physique du Soleil. (93-96).

Recherches sur l'influence de la rotation du Soleil sur la température de l'atmosphère et la direction des vents.

Oppolzer (*Th. von*). — Éléments de Vulcain. (97-100).

M. Oppolzer admet comme réelles les observations de Fritsch (29 mars 1800 et 10 octobre 1802), Stark (9 octobre 1819), Decuppis (2 octobre 1839), Sidebotham (12 mars 1849), Ohrt (12 septembre 1857), Lescarbault (26 mars 1859) et Loomis (19 mars 1862). L'orbite calculée à l'aide de ces éléments lui donne un passage pour le 18 mars 1879; il prie les astronomes d'observer le Soleil à cette date.

Gore (*J.-E.*). — Note sur quelques étoiles présumées variables. (99-102).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables, faites à Athènes en 1878. (101-112).

Peters (*C.-H.-F.*). — Recherches relatives à la prétendue planète transneptunienne qui aurait été observée à Washington en 1850. (113-116).

On se souvient que, en septembre 1851, le directeur de l'Observatoire Naval de Washington fit connaître qu'une étoile observée l'année précédente par $19^h\ 19^m$ d'ascension droite et — 21° de déclinaison ne se retrouvait plus dans le ciel. M. Hind crut pouvoir déduire des positions observées que l'astre indiqué était une planète plus éloignée que Neptune. Toutefois, l'astre n'ayant pas été observé depuis, le fait était tombé dans l'oubli; mais un article du journal *Nature* vient de rappeler l'attention sur cet objet.

M. Peters, en remontant aux registres originaux des observations de Fergusson, montre qu'il y a erreur dans la désignation du fil horizontal qui a servi à la mesure des déclinaisons, qu'il faut substituer un autre couple au couple indiqué, et qu'alors toutes les positions de l'astre considéré coïncident avec la position d'une étoile de onzième grandeur observée par Lalande, Argelander, Lamont, etc.

Il n'y a donc dans les observations de Washington pour 1850 aucune preuve en faveur de l'existence d'une planète transneptunienne.

Winnecke. — Observations de la comète de Tuttle, faites en 1871 à son observatoire particulier de Karlsruhe. (117-118).

Gould (*B.-A.*). — Observations de la comète V de 1871, faites à Cordoba en janvier et février 1872. (117-122).

Doberck (*W.*). — Nouveaux éléments de 36 Andromède, Σ 73. (121-124).

Les éléments sont calculés d'après l'ensemble des observations faites de 1830 à 1877.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables faites à Athènes en 1878. (123-128).

Tempel (*W.*). — Observations de la comète II de 1873, faites à Arcetri pendant son retour de décembre 1878. (127-128).

Niesten (*L.*). — Phénomènes des satellites de Jupiter, observés en 1878 à l'Observatoire royal de Bruxelles. (129-132).

Frölich (*O.*). — Recherches sur la vitesse de l'électricité dans les lignes télégraphiques souterraines. (133-140).

Tempel (*W.*). — Note sur la comète II de 1873. (139-142).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de taches solaires, faites à Athènes en 1878. (141-144).

Bredikhine (*Th.*). — Mouvement de la matière cométaire sur une hyperbole convexe vers le Soleil. (143-144).

La formule est obtenue par un procédé tout à fait analogue à celui que Gauss a employé pour la recherche du mouvement sur la branche concave vers le Soleil.

Doberck (*W.*). — Observations d'étoiles doubles, faites à Markree en 1878. (145-152).

Luther (*R.*). — Observations de planètes, faites à l'équatorial de Düsseldorf pendant le second semestre de 1878. (150-156).

Gauthier (*R.*). — Éphéméride pour la troisième opposition de la comète périodique de Tempel, comète II de 1867. (157-160).

L'éphéméride a été calculée au moyen des éléments de l'opposition de 1873, modifiés par les perturbations de Jupiter de 1873 à 1879; l'action de cette planète n'est guère sensible que par un retard de trois jours dans l'époque du passage au périhelie.

Bruhns (*C.*). — Observations de petites planètes, faites à Leipzig pendant le second semestre de 1878. (161-170).

Doolittle (*C.-L.*). — Observations des satellites de Jupiter, faites à l'observatoire Sayre de l'Université de Lehigh. (171-174).

Les observations faites en septembre et octobre 1878 ont eu pour but la mesure des angles de position et des distances des satellites.

Spoerer. — Observations de taches solaires, faites en 1878 à Potsdam. (173-176).

Ceraski (*W.*). — Note sur une nouvelle étoile variable. (175-176).

L'étoile a pour position, d'après Argelander :

Ascension droite..	$21^h 9^m,25^s$
Declinaison........	$+67°49',5$

Gould (*B.-A.*). — Observations de la grande comète de 1874 (comète de Coggia), faites à l'Observatoire de Cordoba. (177-186).

Les observations s'étendent du 28 juillet au 18 octobre 1874; les positions des étoiles de comparaison ont été déterminées par des observations spéciales faites au cercle méridien de Cordoba.

Holetschek (*J.*). — Détermination de l'orbite de la comète VI de 1874. (185-190).

La comète découverte le 6 décembre à Marseille par M. Borrelly a été observée jusqu'au 7 janvier; M. Holetschek a pris en considération l'ensemble des observations.

Albrecht. — Remarques sur les recherches du Dr Frölich relativement à la vitesse de propagation de l'électricité. (189-192).

Palisa. — Découverte de la planète (192), faite à Pola le 17 février 1879. (191-192).

Wittstein (*A.*). — Détermination de l'orbite de la comète I de 1874. (193-200).

Le calcul est appuyé sur l'ensemble des observations faites du 20 au 25 février 1874.

Winnecke. — Observations de la conjonction de Vénus et de Mercure le 30 septembre 1877. (199-202).

Palisa (*A.*). — Observations de petites planètes, faites en 1877 et 1878 à l'Observatoire de Vienne. (203-208).

Weiss (*A.*). — Occultation des Pléiades, observée à Vienne le 10 novembre 1878.

Doberck (*W.*). — Éléments de α du Centaure. (207-208).

Krüger (*A.*). — Observations de la comète II de 1861, faites à l'héliomètre de l'Observatoire de Gotha. (209-220).

Moesta (*C.-N.*). — Note sur les variations de la température à Santiago de 1861 à 1872. (219-222).

En désignant par T la température moyenne diurne et par R le nombre relatif des taches solaires, tel que le calcule M. R. Wolf, M. Moesta trouve que l'on a

$$T = 13^\circ,07 + 0^\circ,003369\ R.$$

en sorte qu'il y aurait une relation simple entre les deux phénomènes.

Hall (*A.*). — Note sur les observations d'Hypérion. (221-222).

Les observations de ce satellite, faites à Washington en 1878, montrent, par leur comparaison à celles de 1874, que la ligne des apsides a un mouvement rapide. M. Hall serait heureux de recevoir des astronomes les observations qu'ils auraient faites de ce corps.

Franz (*J.*). — Observations des étoiles de comparaison du Dr Gill. (221-224).

Stone (*Ov.*). — Note sur l'erreur personnelle dans la mesure des angles de position d'une étoile double. (223-224).

L'erreur est une fonction simple du sinus de deux fois l'angle de position.

Knorre (*V.*). — Observations de (192), faites à l'équatorial de Berlin. (223-224).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de petites planètes, faites en 1878 à l'Observatoire de Hamilton College. (225-240).

Coggia. — Découverte de (193), faite à Marseille le 1er mars 1879. (239-240).

Schwab (*F.*). — Observations d'étoiles variables, faites en 1878 à l'Observatoire de Marburg. (241-254).

Seeliger (*H.*). — Note sur l'étude du mouvement de la ligne des nœuds à l'aide du théorème de Gauss. (253-256).

Doberck (*W.*). — Observations de l'anneau de Saturne, faites en 1879 à Markree. (255-256).

Doberck (*W.*). — Nouveaux éléments de γ Lion. (255-256).

Knorre (*V.*). — Observations de comètes et de planètes, faites en 1876 et 1877 à l'équatorial de Berlin. (257-272).

Stephan (*E.*). — Observations de (193), faites à Marseille. (271-272).

Knorre (*V.*). — Observations de planètes, faites en 1876 et 1877 à l'équatorial de Berlin. (273-286).

Strasser (*G.*). — Observation de la comète de Brorsen, faite à Kremsmünster. (287-288).

Schulze (*L.-R.*). — Remarques sur les observations de la comète de Brorsen. (287-288).

Knorre (*V.*). — Observations de planètes, faites en 1876 et 1877 à l'équatorial de Berlin. (289-300).

Gasparis (*A. de*). — Note sur les développements en série employés dans le calcul des orbites. (301-302).

Peters (*C.-H.-F.*). — Remarques critiques sur les observations de la planète intra-mercurielle. (303-304).

Strasser (*G.*). — Observations de la comète de Brorsen, faites à Kremsmünster. (303-304).

Knorre (*V.*). — Observations de planètes, faites en 1876 et 1877 à l'équatorial de Berlin. (305-314).

Helmert. — Recherches sur la détermination géodésique des coordonnées géographiques. (313-320).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (194), faite à Clinton le 22 mars 1879. (319-320).

Peters (*C.-H.-F.*). — Remarques critiques sur les observations de la planète intra-mercurielle. Ire Note. (321-336).

Le but que se propose M. Peters dans cette Note est de prouver que l'on ne doit avoir qu'une très-faible confiance dans les observations des passages supposés de la planète Vulcain. L'auteur s'attache donc à faire une critique rigoureuse, non pas des centaines d'observations de ce phénomène que l'on trouverait dans les Recueils astronomiques, mais de celles qui ont paru probables à Le Verrier et qu'il a employées dans ses calculs, et de celles de MM. Watson et Swift pendant la dernière éclipse totale.

Pour l'observation de M. Watson, M. Peters établit que les procédés de mesure sont trop peu rigoureux pour prouver que le corps aperçu n'est pas θ de l'Écrevisse. Si en effet on admet, avec M. Watson lui-même, que le premier corps observé (a) est ζ de l'Écrevisse, et qu'on rapporte la position du second (b) à la position de cette dernière étoile, on arrive à une situation très-voisine de θ de l'Écrevisse, et le directeur de l'Observatoire de Clinton montre que les incertitudes des observations sont telles, que cette assimilation doit être admise. En admettant même que le corps signalé par M. Watson soit réellement Vulcain, M. Peters montre que, d'après son éclat, sa masse serait trop faible pour produire l'effet que Le Verrier

attendait de cette planète. Suivant Le Verrier, la masse de ce corps doit être comparable à celle de Mercure, et alors, à des distances de 2 ou 3 degrés du Soleil, il serait environ quatre fois plus brillant que Vénus en quadrature. Il paraît enfin inadmissible à M. Peters qu'un corps de cette dimension ait pu échapper depuis cinquante ans aux recherches de Schwabe, de Carrington, du P. Secchi, de Spoerer, etc., qui ont étudié si attentivement les taches solaires.

Quant aux cinq observations admises comme vraies par Le Verrier, M. Peters pense :

1° Que l'observation de Fritsch (octobre 1802) est erronée;

2° Que l'observation du jeune jésuite de Cuppis (octobre 1839) ne saurait être exacte, car il devrait avoir immédiatement fait part de sa remarque à de Vico ; alors on aurait une bonne observation du corps, faite par un astronome habile;

3° Que l'observation de Sidebotham (mars 1849) lui paraît bien incomplète pour mériter confiance;

4° Que l'observation de Lescarbault (mars 1859) a été trop discutée pour qu'il soit utile d'y revenir;

5° Que l'observation de Loomis (mars 1862) se rapporte à une tache solaire; ce dernier point est rigoureusement prouvé par la comparaison de l'observation de Loomis avec les observations de taches solaires faites à la même époque par M. Peters lui-même et par M. Spoerer.

Tempel (W.). — Observations de la comète de Brorsen, faites à Arcetri. (335-336).

Konkoly (N. von). — Notes sur le spectre de la comète de Brorsen. (335-336).

Peters (C.-H.-F.). — Remarques critiques sur les observations de la planète intra-mercurielle. Deuxième partie. (337-340).

M. Peters signale les discordances considérables qui existent entre les diamètres donnés à la prétendue planète Vulcain lors de ses passages devant le Soleil et en déduit un nouvel argument contre son existence réelle. L'auteur montre également que l'existence d'un anneau d'astéroïdes intérieur à Mercure est tout à fait improbable.

Reste alors la nécessité d'expliquer l'accroissement de 38 secondes que Le Verrier a dû donner au mouvement du grand arc de Mercure pour représenter les passages anciens. Suivant M. Peters, ce nombre, établi d'après la considération d'observations de passage qui ne sont pas fort exactes, pourrait être théoriquement retrouvé, en grande partie au moins, en augmentant la masse de Vénus et en tenant compte de quelques termes que l'éminent directeur de l'Observatoire de Paris a cru pouvoir négliger.

Waldo (L.). — Observations des satellites de Saturne, faites en 1878 à Providence. (339-350).

L'Observatoire de Providence a été construit en 1878 par M. E. Seagrave; son instrument principal est un équatorial de 8 pouces par Alvan Clark ; les observations sont faites par M. F.-E. Seagrave.

Wittstein (*A.*). — Éphéméride de la comète de Brorsen pour avril et mai 1879. (351-352).

Schur (*W.*). — Observations héliométriques d'étoiles doubles, faites en 1875 et 1876 à l'Observatoire de Strasbourg. (353-376).

Winnecke. — Observations de la comète de Tempel, faites à Strasbourg en novembre 1878. (375-376).

Waldo (*L.*). — Observations des satellites de Saturne, faites en 1878 à Providence. (377-380).

Todd (*D.-P.*). — Observations des éclipses des satellites de Jupiter, faites à Washington en 1877-1878. (379-384).

Hall (*A.*). — Observation du satellite de Sirius, faite à Washington. (383-384).

Gasparis (*A. de*). — Note sur le développement de l'inverse du cube du rayon vecteur dans la fonction perturbatrice. (383-384).

G. R.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome LXXXVIII; 1879.

N° 20; 19 mai.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal M. *G.-B. Airy*) et à l'Observatoire de Paris pendant le premier trimestre de l'année 1879. (995).

Resal (*H.*). — Sur la résistance des chaudières elliptiques. (997).

Ledieu (*A.*). — Raisons formelles de la supériorité économique des machines Woolf ou Compound. (1003).

Jordan (*C.*). — Sur les caractéristiques des fonctions Θ. (1020).

Appell. — Sur les fonctions telles que

$$F\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right) = F(x)$$

(1022).

L'auteur a communiqué, dans la séance du 21 avril, un procédé qui permet de former des fonctions $F(x)$ vérifiant la relation

$$F[\varphi(x)] = F(x);$$

dans la Communication actuelle, il indique les modifications à la méthode générale qui permettent de simplifier le calcul dans le cas où $\varphi(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$.

Picard (E.). — Sur une propriété des fonctions entières. (1024).

M. Picard désigne sous ce nom les fonctions qui sont uniformes et continues sur tout le plan; si $f(x)$ est une telle fonction, il peut se faire que, pour une valeur particulière a, l'équation $f(x) = a$ n'ait aucune racine finie; M. Picard démontre que cela ne peut arriver que pour une seule valeur a; une fonction entière qui ne deviendrait jamais égale à a ni à b serait nécessairement une constante.

Escary. — Sur les fonctions introduites par Lamé dans la théorie analytique de la chaleur, à l'occasion des ellipsoïdes de révolution. (1027).

N° 21; 26 mai.

Desains (P.). — Sur la réfraction de la chaleur solaire. (1047).

Lœwy et *Le Clerc.* — Détermination de la différence de longitude entre Paris et Berlin. (1055).

Tresca. — Sur la distribution du travail à distance au moyen de l'électricité. (1061).

Jordan (C.). — Sur les caractéristiques des fonctions Θ. (1068).

Duport. — Sur une nouvelle représentation des quantités imaginaires. (1071).

Dans le procédé indiqué par M. Duport, un point imaginaire d'un plan $x = \alpha + pi$, $y = \beta + qi$ est représenté par la droite réelle de l'espace $x = \alpha + qz$, $y = \beta + pz$. De cette façon, une courbe plane est représentée par une congruence de droites, une droite est représentée par une congruence linéaire, etc.

Schering (E.). — Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité. (1073).

Le Paige. — Sur le développement en série de cot x. (1075).

Soret. — Sur la fluorescence des sels des métaux terreux. (1077).

Mouton. — Sur la détermination des longueurs d'onde calorifique. (1078).

Decharme. — Sur un mode particulier de transmission des sons à distance. (1082).

N° 22; 2 juin.

Jamin. — Sur l'impénétrabilité magnétique du fer. (1099).

Cornu (A.). — Sur la limite ultra-violette du spectre solaire. (1101).

Mannheim. — Sur un mode de transformation des surfaces réglées. (1129).

Ce mode de transformation, qui s'applique non-seulement aux surfaces réglées, mais à tous les ensembles de droites, consiste à faire tourner chaque génératrice G de 90° autour d'un point fixe o, dans le plan qui passe par o et par G. M. Mannheim donne diverses propriétés des surfaces transformées; par exemple, *la transformée d'une surface développable est telle, qu'un plan passant par o et une génératrice touche cette transformée et lui est normal en des points qui comprennent un segment vu du point o sous un angle droit. Aux points d'une trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface réglée correspondent les points d'une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface transformée. Un pinceau de normales à une surface a pour transformée un pinceau de normales.*

Tacchini. — Observations solaires pendant le premier trimestre de l'année 1879. (1131).

Decharme. — Disposition nouvelle propre à augmenter la sensibilité de la plaque vibrante du téléphone. (1132).

N° 23; 9 juin.

Faye. — Observations chronométriques pour la marine marchande. (1143).

Phillips. — Du spiral réglant, sphérique des chronomètres. (1147).

Tempel. — Observations de la comète II, 1867, faite à l'Observatoire de Florence. (1178).

Mannheim. — Transformation d'un pinceau de normales. (1179).

Suite de la Communication de la séance du 2 juin. L'auteur applique son procédé de transformation aux normales à l'ellipsoïde; la surface qui correspond ainsi à l'ellipsoïde est une surface de l'onde; M. Mannheim montre comment on peut déduire de là une construction plane qui donne les centres de courbure principaux et les plans des sections principales de la surface de l'onde, connaissant les éléments analogues pour l'ellipsoïde.

Darboux (G.). — De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan. (1183).

M. Darboux a publié dans le *Bulletin*, t. III, 2e série, p. 109, un Mémoire détaillé sur ce sujet.

Saint-Germain (A. de). — Sur les développements en séries dont les termes sont des fonctions Y_n de Laplace. (1186).

L'auteur montre comment on peut compléter la démonstration de Poisson.

Mouton. — Sur les lois de la dispersion. (1192).

Lamansky. — Sur la loi de Stokes. (1192).

Rosenstiehl. — Sur les spectres d'absorption de l'alizarine et de quelques matières colorantes qui en dérivent. (1194).

N° 24; 16 juin.

Mouchez. — Envoi de l'heure de l'Observatoire de Paris aux ports de commerce pour le réglage des chronomètres. (1227).

Tisserand. — Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où, les excentricités étant petites, l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable. (1229).

Phillips. — Du spiral réglant sphérique des chronomètres. (1234).

Becquerel (E.). — Observations relatives à une Note de M. Lamansky, ayant pour titre *Sur la loi de Stokes.* (1237).

Borrelly. — Observation de la planète (198), découverte à l'Observatoire de Marseille. (1248).

Mannheim. — Sur la surface de l'onde et sur la transformation d'un pinceau. (1248).

Suite des Communications du 2 et du 9 juin.

Darboux (*G.*). — De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan. (1252).

Pepin (*P.*). — Théorèmes d'Analyse indéterminée. (1255).

Ces théorèmes forment la suite de ceux qui ont été communiqués dans la séance du 12 janvier 1874; ils établissent l'existence de cas fort nombreux où l'équation $ax^4+by^4=z^2$ est impossible en nombres rationnels et se rapportent à des cas où, aucun des nombres a, b n'étant égal à un carré, la méthode de Fermat n'est pas applicable.

Saint-Loup. — Expériences sur la résistance opposée par l'air au mouvement d'une surface. (1257).

Duter. — De la dilatation électrique des armatures des bouteilles de Leyde. (1266).

Righi. — Sur la dilatation du verre des condensateurs pendant la charge. (1262).

N° 25; 23 juin.

Cornu (*A.*). — Sur l'absorption par l'atmosphère des radiations ultra-violettes. (1285).

Faye. — Remarques à l'occasion d'une Note de M. l'amiral Mouchez sur le réglage des chronomètres dans les ports de commerce. (1291).

Sylvester. — Sur une propriété arithmétique d'une certaine série de nombres entiers. (1297).

Nommons le nombre de termes distincts qui figurent dans le développement d'un déterminant gauche son *dénumérant.* Soit

$$[1.3.5, \ldots (2n-1)]\, u_n$$

le dénumérant d'un déterminant gauche de l'ordre $2n$. On aura pour u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 ... les valeurs successives 1, 2, 8, 50, 418, 4348, ..., et en général,

$$u_x = (2x-1)\,u_{x-1} - (x-1)\,u_{x-2}.$$

Soit $\theta\left(\frac{2x+1}{8}\right)$ l'entier le plus proche, en excès ou en défaut de $\frac{2x+1}{8}$, *le plus grand commun diviseur à* u_x, u_{x+1} *est égal au nombre* 2, *élevé à la puissance* $\theta\left(\frac{2x+1}{8}\right)$.

Ledieu. — Application inexacte d'un théorème de Mécanique, faite

par MM. Bertin et Garbe pour expliquer le mouvement des ailettes du radiomètre. (1298).

Cruls. — Sur les positions de la comète Tempel II, 1867, déduites des quatre premières observations faites à l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. (1311).

Gyergyószentmiklos (*D. de*). — Résolution des systèmes de congruences linéaires. (1311).

Si l'on considère *n* congruences linéaires avec *n* variables par rapport à un même module *m*, il est aisé de trouver des formules qui donnent toutes les valeurs possibles des inconnues qui peuvent satisfaire à ces congruences; l'auteur s'occupe de distinguer réciproquement dans quel cas les valeurs trouvées conviennent réellement.

Saint-Germain (*de*). — Addition à une Note précédente sur la série de Laplace. (1313).

Pictet (*R.*). — Étude de la constitution moléculaire des liquides au moyen de leur coefficient de dilatation, de leur chaleur spécifique et de leur poids atomique. (1315).

Oltramare (*G.*). — Explication du bolide de Genève du 7 juin 1879. (1319).

N° 26; 30 juin.

Lamansky. — Sur la loi de Stokes. Réponse à M. Edm. Becquerel. (1351).

Becquerel (*E.*). — Observations relatives à la Communication de M. Lamansky. (1352).

BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. 47e année, 2e série. Bruxelles, F. Hayez, 1878.

Tome XLV; janvier à juin 1878.

Terby (*F.*). — Études sur la planète Mars (XIe Notice). (33-40).

Quetelet (*E.*). — Recherches sur les mouvements de l'aiguille aimantée à Bruxelles. (80-84).

Douny (*F.*). — Note sur la liquéfaction des gaz. (85-87).

Folie (*F.*). — Deuxième Note sur l'extension de la notion du rapport anharmonique. (88-93).

Expression des conditions pour que trois systèmes de trois points forment une involution du troisième ordre, au moyen du rapport anharmonique du troisième ordre.

Le Paige (*C.*). — Sur quelques théorèmes de Géométrie supérieure. (93-96).

Applications de la théorie des rapports anharmoniques d'ordre supérieur à la théorie des courbes, en particulier des cubiques et des quartiques.

Saltel (*L.*). — Note sur les nouveaux développements que comporte l'application de la méthode de correspondance analytique. (102-106).

Cette méthode, dit l'auteur, s'applique même à des cas particuliers des problèmes généraux traités par lui dans ses publications antérieures.

Van der Mensbrugghe (*G.*) et *Folie* (*F.*). — Rapport sur le Mémoire de M. C. Lagrange : « De l'origine et de l'établissement des mouvements astronomiques ». (148-154).

Analyse *critique* de ce Mémoire, qui sera publié dans les Recueils in-4° de l'Académie.

Folie (*F.*). — Rapport sur le Mémoire de M. E. Catalan : « Remarques sur la théorie des moindres carrés. » (156-158).

Analyse *critique* de ce Mémoire, qui sera publié dans les Recueils in-4° de l'Académie.

Folie (*F.*). — Rapport sur le Mémoire de M. C. Le Paige : « Sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la Géométrie. » (158-166).

Ghysens (*E.*). — Sur quelques formules de Géométrie et leur application aux courbes algébriques. (231-249).

Catalan (*E.*). — Rapport sur ce Mémoire. (154-155).

Extension aux points multiples des courbes des propriétés établies pour les points ordinaires dans des Notes antérieures.

Montigny (*C.*). — Recherches sur les changements de couleur qui caractérisent la scintillation des étoiles de teinte rouge et orangée ou du troisième type. (391-401).

Conclusion : ces changements sont soumis à des lois.

Sautreaux (*Félix*). — Démonstration de deux théorèmes analogues en Géométrie de l'espace à celui de Pascal en Géométrie plane; essai de réponse à une question posée en 1825 à l'Académie de Bruxelles. (426-430).

Folie (*F.*). — Rapport sur ce Mémoire. (370-371).

Plateau (*J.*). — Rapport sur le Mémoire de M. Van der Mensbrugghe : « Études sur les variations d'énergie potentielle des surfaces liquides. » (574-577).

Tome XLVI; juillet à décembre 1878.

Houzeau (*J.-C.*). — Rapport sur trois Mémoires de Géodésie de M. le major Adan. (6-11).

Analyse *critique* de ces Mémoires, qui seront publiés dans le Recueil in-8 de l'Académie.

Folie (*F.*). — Addition à notre Rapport sur la Note de M. Sautreaux. (14-17).

Au fond, le théorème de M. Sautreaux n'est pas neuf et peut être démontré plus simplement.

Montigny (*C.*). — De l'influence des aurores boréales sur la scintillation des étoiles, particulièrement pendant les soirées du 5 avril 1870 et du 1er juin 1878. (17-42).

L'accroissement de scintillation était dû, dans ces deux cas, à un refroidissement de l'air concomitant de l'aurore boréale.

Saltel (*L.*). — Mémoire sur la classification arguesienne des courbes gauches algébriques, ou extension à ces courbes du principe arguesien. (90-123).

Folie (*F.*). — Rapport sur ce Mémoire. (11-13).

Étude de la transformation définie par les équations $xx' = yy' = zz' = tt'$ entre les coordonnées tétraédriques $(xyzt)$ $(x'y'z't')$ de deux courbes gauches.

Folie (*F.*). — Principes de la théorie des faisceaux. (193-203).

Si l'on élimine $\alpha\beta\gamma$ entre les équations $\varphi(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\chi(x, y, \alpha, \beta\gamma) = 0$, $\psi(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\omega(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0$, on obtient l'équation d'un lieu passant par les points communs aux courbes φ, χ, ψ, ω. Ce principe généralisé, appliqué à des faisceaux de droites, est très-utile dans la théorie des courbes supérieures. On en déduit, par exemple, que le lieu des points triples des rayons homologues de trois faisceaux homographiques est une cubique quelconque. Voir aussi l'Ouvrage intitulé : *Éléments de la théorie des faisceaux*, par F. Folie. Bruxelles, F. Hayez, 1878, 112 p. in-8.

Le Paige (*C.*). — Sur les points multiples des involutions supérieures. (247-259).

Folie (*F.*). — Rapport sur ce Mémoire. (191-192).

Étude des points doubles d'une involution du troisième ordre et de troisième classe.

Montigny (*C.*). — Disposition expérimentale appliquée à l'étude des étoiles colorées. (328-333).

Plateau (*J.*). — Sur une loi de persistance des impressions dans l'œil. (334-378).

Folie (*F.*). — Restitution de priorité en faveur de M. Catalan. (379-380).

Deux des théorèmes donnés par M. Folie en 1877 (*Bull.*, t. XLIV, p. 182) appartiennent à M. Catalan (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1852, p. 173). Les conséquences que M. Folie en a déduites pour les coniques et ses remarques sur la possibilité d'une extension aux courbes supérieures lui appartiennent en propre. Les théorèmes de M. Catalan se trouvent aussi dans son Cours autographié (1848) d'*application de l'Algèbre à la Géométrie*, § 569-572.

Montigny. — Recherches sur les variations de la scintillation des étoiles selon l'état de l'atmosphère. (598-635).

« C'est la présence de l'eau en quantité plus ou moins grande dans l'atmosphère qui exerce l'influence la plus marquée sur la scintillation et qui en modifie le plus les caractères, selon cette quantité, soit quand l'eau se trouve dissoute en vapeur dans l'air, soit quand elle tombe au niveau du sol à l'état liquide, ou à l'état solide sous forme de neige. »

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur une nouvelle application de l'énergie potentielle des surfaces liquides. (635-643).

Explication des phénomènes que présentent les lames liquides étudiées par Savart en 1833 (*Annales de Chimie et de Physique*, t. LIV, p. 55; Paris, 1833).

Le Paige (*C.*). — Sur certains covariants d'un système cubo-biquadratique. (765-770).

Folie (*F.*). — Rapport sur ce Mémoire. (596-598).

Expression en fonction entière et rationnelle des trois covariants fondamentaux, d'un covariant gauche d'un système cubo-biquadratique, auquel conduit l'étude des points doubles de l'involution de troisième ordre et de troisième classe. Expression de l'invariant du dixième ordre d'une forme sextique binaire dont la réduction à zéro exprime que les six points représentés par la forme sont conjugués harmoniques du troisième ordre.

Folie (*F.*) et *De Tilly* (*J.*). — Rapports sur une question de concours relative à l'involution. (856-860; 860-861).

Van Rysselberghe (*F.*). — Description d'un régulateur parabolique, rigoureusement isochrone, et dont on peut faire varier à volonté le régime. (883-892).

Folie (*F.*). — Rapport sur ce Mémoire. (878-879).

Régulateur très-simple, parfait géométriquement, mais assez compliqué au point de vue mécanique.

Mansion (*P.*). — Théorème relatif à un déterminant remarquable. (892-899).

Catalan (*E.*). — Rapport sur ce Mémoire. (879).

Voir *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. IV, p. 103-111, ou *Messenger of Mathematics*, 2e série, t. VII, p. 81-82, d'autres démonstrations de ce théorème.

Mansion (*P.*). — Sur l'élimination. (899-908).

Catalan (*E.*). — Rapport sur ce Mémoire. (880-881).

Principe fondamental d'une théorie nouvelle de l'élimination. (Voir *Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 975-978).

Catalan (*E.*). — Sur les hexagones de Pascal et de Brianchon. (946-949).

Houzeau (*J.-C.*). — Sur certains phénomènes énigmatiques de l'Astronomie. (951-966).

Pourquoi le Soleil et la Lune paraissent-ils plus grands près de l'horizon? Qu'est-ce que le (pseudo?) satellite de Vénus, vu sept fois de 1645 à 1764? Comment Herschel a-t-il pu voir Saturne sous forme quasi rectangulaire? Comment expliquer les changements de forme et les non-reapparitions de la comète de Biela? Quelle est la cause des brouillards secs de 1783, 1821, 1822? Qu'est-ce que la lumière zodiacale?

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, HERAUSGEGEBEN VON C.-W. BORCHARDT (¹).

Tome LXXXV; 1878.

Fuchs (*L.*). — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre qui possèdent des intégrales algébriques. Second Mémoire. (1-25).

« Dans mon Mémoire (même Recueil, t. 81), j'ai étudié la question : « Dans quelles » circonstances une équation différentielle linéaire du second ordre possède-t-elle » des intégrales algébriques? » et je l'ai ramenée à celle-ci : « Quand arrive-t-il que » certaines équations différentielles linéaires, qui se dérivent de l'équation proposée » par un procédé uniforme et dont le nombre d'ordre n'est pas supérieur à douze, » puissent être satisfaites par des racines de fonctions rationnelles? » En introduisant à cet effet la notion de forme première, j'y ai montré que le degré des formes premières de degré minimum ne surpasse en aucun cas le douzième. Les desseins que j'avais alors en vue n'exigeaient pas de réduire au plus petit nombre les genres possibles de ces formes premières. C'est pourquoi je m'y suis borné à celles de ces réductions qui s'obtiennent comme conséquence immédiate de la notion de ces formes, et je les ai réunies dans un Tableau.

» Depuis, MM. F. Klein et C. Jordan se sont occupés du même sujet. En particulier, M. Klein a publié une suite de Mémoires en partie dans les *Comptes rendus des séances de la Société physico-médicale d'Erlangen*, en partie dans les *Annales mathématiques de Leipzig*, où il a étudié les propriétés des équations algébriques dont les racines satisfont des équations différentielles linéaires du second ordre et où il a soumis à une réduction mon Tableau que je viens de mentionner.

» Récemment, M. Gordan a encore réussi (*Annales*, t. XII) à résoudre, pour des formes binaires, le problème proposé dans l'Introduction de mon Mémoire cité ci-dessus, et qui était de déterminer les formes de degré n dont les covariants de degré inférieur à n s'évanouissent identiquement, et il a de plus montré qu'elles coïncident avec mes formes premières du plus petit degré.

» Une Note du P. Pepin (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, juin 1876) me donna lieu de démontrer (même Recueil, juillet 1876) que les formes premières du plus petit degré montent aussi effectivement jusqu'au douzième degré.

» Dans ce nouveau Mémoire, je me permets de montrer que, pour gagner une base naturelle pour tous les problèmes relatifs aux équations différentielles en question, il suffit de poursuivre d'une manière conséquente la théorie des formes premières, où l'on ne considère pas seulement les formes du plus petit degré, mais plutôt la totalité de ces formes. C'est ainsi qu'on obtient les résultats de mon Mémoire antérieur de la manière la plus simple; mais d'ailleurs on en tire de prime abord les façons définitivement possibles des formes premières du plus petit degré, et enfin on reconnaît des propriétés nouvelles des équations différentielles linéaires qui sont

(¹) Voir *Bulletin*, III_2, 108.

satisfaites par les racines d'équations algébriques, de même que la forme de ces équations. »

Schroeter (*H.*). — Sur un hyperboloïde particulier à une nappe. (26-79).

Il y a cinquante ans que Steiner (*Journal de Crelle*, t. 2) a attiré l'attention des géomètres sur une surface particulière du second ordre, surface qui a deux de ses génératrices normales aux sections circulaires, et, dans son Ouvrage principal (*Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten*), il revient plusieurs fois à cette surface engendrée par deux faisceaux projectifs de plans dont les plans correspondants sont perpendiculaires les uns aux autres. Peu d'années après, le même hyperboloïde particulier à une nappe se présenta dans un Mémoire de M. Chasles comme lieu des points tels que leurs distances à deux droites fixes non situées dans un plan aient un rapport constant. Quoique l'illustre auteur désigne lui-même ce travail comme « un exercice sur la méthode purement géométrique » (*Journal de Liouville*, t. I, 1836), il ne fait que montrer que le lieu cherché contient deux certaines droites et un cercle, et après cela il raisonne comme suit : « Or ce lieu sera évidemment une surface du second degré, parce que la formule de Géométrie analytique qui donne le carré de la distance d'un point à une droite contient les coordonnées de ce point au second degré ; ce lieu sera donc un hyperboloïde à une nappe, etc. » Un tel raisonnement ne saurait contenter ceux qui se piquent de traiter la question d'après la méthode purement synthétique. Peut-être cette lacune a-t-elle été remplie depuis longtemps ; moi, je ne me suis aperçu que d'un travail publié depuis peu par M. Schönflies (*Synthetisch-geometrische Untersuchungen über Flächen zweiten Grades*; Berlin, 1877), et qui ramène la démonstration en question au théorème que toutes les droites qui rencontrent deux droites fixes non situées dans un plan et qui sont parallèles aux génératrices d'un cône forment un hyperboloïde. Cependant on n'a pas besoin de recourir au cône, comme nous le démontrerons ; mais une simple construction linéaire conduit à l'hyperboloïde et en fait saillir les propriétés caractéristiques.

La relation qu'il y a entre l'hyperboloïde particulier à une nappe et les deux droites fixes offre une double analogie avec la figure correspondante dans le plan. On sait que dans le plan le lieu d'un point dont les distances à deux points fixes ont un rapport constant est une circonférence dont le centre est situé sur la droite entre les deux points et pour laquelle ces points mêmes forment un couple de points conjugués. Pareillement, dans la figure de l'espace, la droite qui comprend la plus courte distance des deux droites fixes données est un axe principal de l'hyperboloïde, savoir, celui par lequel passent les deux sections circulaires, et les deux droites fixes sont un couple de rayons conjugués par rapport à l'hyperboloïde. Cette propriété perce déjà dans le Mémoire de M. Chasles et a été mise en pleine lumière par M. Schönflies. Mais la figure de l'espace présente encore une seconde analogie qui ne semble pas avoir été aperçue jusqu'à présent. Dans le plan, le lieu d'un point dont les distances à un point fixe et à une droite fixe sont dans un rapport constant est une section conique pour laquelle le point fixe est un foyer et la droite fixe la directrice correspondante (polaire de ce foyer). Or, dans un foyer, les couples de rayons conjugués qui passent par lui forment une involution de rayons orthogonaux. Pareillement, dans la figure de l'espace, les deux droites fixes forment un couple particulier de rayons conjugués (polaires réciproques) par rapport à l'hyperboloïde ; car, pour chacun de ces rayons, les couples de plans conjugués qui passent par lui forment un couple de plans orthogonaux. Cette propriété peut être envisagée

en quelque sorte comme application de la propriété fondamentale des foyers des sections coniques aux surfaces du second ordre. Cependant il se présente ici une différence essentielle entre la figure dans le plan et celle dans l'espace. Tandis que toute section conique possède un tel couple de pôle et polaire (et encore deux fois), où le pôle est le centre d'une involution de rayons orthogonaux appartenant à la conique, la surface du second ordre pour laquelle deux rayons conjugués doivent être les axes d'involution à plans orthogonaux est soumise à une certaine condition, et, si la surface remplit cette condition, il existe une infinité de couples de rayons conjugués qui jouissent de la même propriété. D'autre part, deux droites non situées dans un plan étant données, une surface du second ordre pour laquelle ces droites sont des rayons conjugués et les axes d'involutions à plans orthogonaux par rapport à la surface n'est pas complétement déterminée par cette condition, qui ne comprend que huit conditions simples, et il y a un faisceau de surfaces du second ordre qui remplissent cette condition. Ce faisceau de surfaces du second ordre, qui se produisent par le changement de la valeur du rapport constant, possède comme courbe fondamentale commune un quadrilatère gauche imaginaire, de même que toutes les sections coniques ayant en commun un foyer et la directrice correspondante forment un faisceau de sections coniques à contact double idéal.

L'étude synthétique de ces propriétés fait l'objet du Mémoire : I. Le paraboloïde hyperbolique équilatère. II. L'hyperboloïde orthogonal (nom proposé par M. Schroeter pour l'hyperboloïde en question).

Gundelfinger (S.). — Sur la transformation d'expressions différentielles au moyen de coordonnées elliptiques. (80-87).

Dans la vingt-deuxième Leçon de sa Géométrie analytique de l'espace, Hesse a indiqué un principe qui enseigne à transformer certaines expressions différentielles des coordonnées orthogonales en coordonnées elliptiques, transformation faite au moyen de changements convenables opérés sur les formules qui se présentent à l'occasion du problème des axes principaux des surfaces du second ordre. C'est par ce procédé qu'on achève, presque sans aucun calcul, l'intégration des équations différentielles pour les lignes de courbure et les lignes géodésiques sur ces surfaces. La Note est destinée à montrer que l'intégration de ces équations différentielles et d'autres semblables à elles ne se refuse pas non plus à être rattachée, moyennant un principe analogue, au problème des axes principaux des sections planes d'une surface du second ordre. Les éléments analytiques employés à cet effet se prêtent à de nombreuses interprétations géométriques et font ressortir une connexion simple entre la théorie de la courbure des surfaces du second ordre et celle de leurs courbes géodésiques; observons enfin que les développements partent de la forme générale de l'équation.

Milinowski. — Démonstration d'une proposition concernant les surfaces du second ordre. (88).

Sylvester (J.-J.) — Sur les actions mutuelles des formes invariantives dérivées. (89-115; fr.).

« Je comprends les invariants, les covariants, les contravariants et toutes les formes qui dérivent dans le même sens d'un système donné de quantics sous le nom général de *dérivées invariantives*, et je vais établir un principe qui rend ces formes fécondes et donne à deux quelconques d'entre elles la faculté de produire, par

l'action de l'une sur l'autre, de nouvelles formes invariantives. Si l'on se borne aux invariants d'un seul quantic ou d'un système de quantics, la manière de procéder pour cette génération est presque évidente d'elle-même. Car soient $F(a, b, c, \ldots)$, $G(a, b, c, \ldots)$ deux invariants du même quantic ou du même système de quantics, et écrivons à la place de $a, b, c, \ldots$, dans l'une de ces deux fonctions, $\frac{d}{da}$, $\frac{d}{db}$, $\frac{d}{dc}$, ...; si l'on opère avec la fonction ainsi modifiée sur l'autre, le résultat restera invariantif.... Je remarque que la formation d'un quantic quelconque se compose de trois genres de quantités : des variables, des parties littérales des coefficients, et enfin des multiplicateurs numériques qui les affectent et qui forment pour ainsi dire l'équipement arithmétique de la forme.... Dans la théorie que je vais produire, le multiplicateur d'un élément quelconque sera la racine carrée du nombre binôme ou polynôme qui lui serait égalé dans la notation ordinaire des quantics. Quand les multiplicateurs numériques sont mis sous cette forme, je dirai que le quantic est un quantic *préparé*. Remarquons que, quel que soit l'équipement numérique d'un quantic, une substitution quelconque opérée sur les variables *induit* une substitution corrélative opérée sur les éléments.... Cela posé, je suis en état d'énoncer le théorème fondamental suivant : « Dans un quantic préparé, deux substitutions contraires opérées sur les variables induisent deux substitutions contraires opérées sur les éléments.... » Si, pour donner plus de simplicité aux énoncés, on se borne au cas de quantics unipartites, on peut résumer les conséquences qui découlent des principes établis en affirmant qu'une dérivée invariantive d'un système quelconque de quantics unipartites préparés reste une dérivée invariantive, quand on substitue pour les variables ou pour les éléments, ou pour les uns et les autres simultanément, leurs inverses symboliques, avec la distinction que sous la première supposition le caractère est changé dans son opposé et sous la dernière il reste le même. »

Schering (Karl). — Sur la théorie du moyen arithmético-géométrique de quatre éléments. (115-170).

M. Borchardt a créé pour la Science la notion de la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments indépendants (*Monatsbericht der Königl. Akad. d. Wissensch. zu Berlin*, nov. 1876 et febr. 1877), et, au moyen de la théorie des fonctions hyperelliptiques, il a donné une représentation de ce moyen par un déterminant bipartite (*zweigliedrig*) d'intégrales hyperelliptiques. Indépendamment de ces résultats, M. Schering montre qu'on peut former d'un produit de moyennes arithmético-géométriques gaussiennes un moyen de trois éléments dont l'algorithme coïncide avec celui établi par M. Borchardt pour quatre éléments, au cas que deux en soient égaux. La représentation de ce moyen de trois éléments par des intégrales hyperelliptiques a été obtenue à l'aide d'une réduction, donnée par Jacobi, de certaines intégrales hyperelliptiques à des intégrales elliptiques, et à l'aide de la théorie des surfaces de Riemann. La construction de ces surfaces suggère en même temps l'idée de déterminer les modules de périodicité de ces intégrales et de montrer l'existence des relations qui ont lieu entre eux, et qui ont été établies par Riemann. La représentation du moyen de trois éléments, étudiée par M. Schering, se trouve donc être un cas spécial du théorème de M. Borchardt mentionné ci-dessus. De ce théorème et de la réduction de Jacobi on conclut, d'ailleurs, qu'une moyenne de quatre éléments peut être réduite à des moyennes de deux éléments lorsqu'il existe entre elles une certaine équation de condition.

Kiepert (*L.*). — Sur les surfaces minima. Second Mémoire. (171-183).

En considérant les surfaces nommées par M. Schwarz *faisceau de surfaces d'Enneper* et *faisceau de surfaces de Scherk*, on trouve que les coordonnées d'un point de ces surfaces peuvent être représentées par des fonctions elliptiques de deux variables ξ et η, de telle sorte qu'on obtient, pour des valeurs constantes de ξ ou bien de η, les lignes de courbure sur le faisceau de surfaces d'Enneper et les lignes asymptotiques sur le faisceau de Scherk. D'autre part, des valeurs constantes de $\xi+\eta$ ou de $\xi-\eta$ fournissent les lignes asymptotiques du faisceau de surfaces d'Enneper et les lignes de courbure du faisceau de surfaces de Scherk. De plus, ces surfaces contiennent quatre faisceaux de courbes dont l'arc est une intégrale elliptique de première espèce où la limite supérieure a une simple signification géométrique. Enfin, il faut signaler la connexion remarquable qui a lieu entre ces surfaces et les surfaces des centres de courbure.

Prix Jablonowski pour l'année 1881. (184).

Frobenius (*G.*). — Sur des expressions différentielles linéaires adjointes. (185-213).

Dans ses recherches sur la variation seconde des intégrales simples, Jacobi est parvenu à quelques théorèmes concernant des expressions différentielles linéaires qui ont été déduites et approfondies par beaucoup d'autres auteurs, mais surtout par Hesse (même Recueil, t. 54, p. 227). Les calculs, en partie très-prolixes, qu'exigent ces démonstrations peuvent être évités entièrement quand on définit l'expression différentielle appelée, suivant M. Fuchs, l'adjointe d'une autre, non pas par sa représentation formale, mais par sa propriété caractéristique, qui consiste à faire d'une certaine expression différentielle bilinéaire une différentielle complète. Cette voie mène aussi facilement aux relations découvertes par Clebsch entre les constantes qui entrent dans la forme réduite de la variation seconde, relations établies par Hesse dans une forme peu développée. M. Frobenius commence par développer les théorèmes pour des expressions différentielles ordinaires; alors il donne succinctement leur application à la transformation de la variation seconde; enfin il généralise quelques-uns de ces théorèmes pour des expressions aux différentielles partielles.

§ 1. Sur la composition d'expressions différentielles linéaires. — § 2. Définition d'expressions différentielles linéaires adjointes. — § 3. La réciprocité d'expressions différentielles linéaires adjointes. — § 4. Expressions différentielles qui sont égales à leurs adjointes. — § 5. Nouvelle démonstration du théorème de Jacobi. — § 6. Proposition auxiliaire sur les formes bilinéaires alternées. — § 7. Transformation d'un déterminant. — § 8. Sur la variation seconde des intégrales simples. — § 9. Des expressions dites adjointes aux différentielles partielles linéaires. — § 10. Le théorème de réciprocité. — § 11. Principe du dernier multiplicateur.

Cayley (*A.*). — Un Mémoire sur les fonctions θ doubles. (214-245).

Suite des recherches du même auteur, t. 83, p. 210-233.

Hermite (*Ch.*). — Sur le pendule. Extrait d'une Lettre adressée à M. Gyldén. (246-249).

Remarque sur la forme des coordonnées x, y, z de l'extrémité d'un pendule sphérique : elles sont les dérivées de fonctions uniformes du temps.

Roethig (*O.*). — Sur la théorie des surfaces. (250-263).

L'auteur représente à l'aide de deux variables indépendantes certaines quantités relatives à la théorie infinitésimale des surfaces et surtout à la théorie de la courbure.

Mathieu (*Émile*). — Réflexions au sujet d'un théorème d'un Mémoire de Gauss sur le potentiel. (264-268).

Gauss a démontré qu'on peut toujours distribuer sur une surface fermée de la matière en une couche infiniment mince, de sorte que le potentiel V de cette couche soit, en chaque point de la surface, une fonction donnée U des coordonnées x, y, z de ce point. Pour cela, il montre d'abord que, si la masse de la couche est donnée et que la distribution soit homogène, c'est-à-dire la densité positive en chaque point de la surface, l'intégrale $\Omega = \int (\mathrm{V} - 2\mathrm{U})\, m\, ds$, dans laquelle m est la densité en l'élément ds de la surface et où l'intégration est étendue à toute la surface, est susceptible d'un minimum qui a lieu lorsque $\mathrm{V} - \mathrm{U} = \text{const.}$ C'est à ce sujet que se rapportent les réflexions de M. Mathieu.

Adams (*J.-C.*). — Table des valeurs des soixante-deux premiers nombres de Bernoulli. (269-272).

Königsberger. — Sur la réduction d'intégrales hyperelliptiques à des intégrales elliptiques. (273-294).

Voici l'un des théorèmes principaux : « Le nombre des constantes arbitraires est indépendant du degré de la transformation. Donc, si le degré du numérateur de l'intégrale hyperelliptique réductible à des intégrales elliptiques va en croissant, nous en sentons résulter une plus grande variété de ces intégrales réductibles, de telle sorte qu'on peut tirer cette conclusion : Si une intégrale hyperelliptique de première espèce est réductible à des intégrales elliptiques, il ne sera pas possible de réduire toute intégrale hyperelliptique appartenant à la même irrationnalité tout à la fois à une intégrale elliptique. Il n'en est pas ainsi si une intégrale hyperelliptique de première espèce appartenant à un polynôme du degré $2p+1$ est réductible à la somme de p intégrales elliptiques différentes. Alors il y a p intégrales hyperelliptiques appartenant à la même irrationnalité et réductibles à une quelconque de ces intégrales elliptiques. »

Gundelfinger (*S.*). — Sur la transformation en coordonnées curvilignes d'une certaine sorte d'équations différentielles. (295-303).

Hesse (*O.*). — Des hexagones dans l'espace. (Mémoire posthume publié par M. Gundelfinger). (304-316).

On trouve dans ce Mémoire une nouvelle solution du problème traité plusieurs fois par Hesse : « Étant donnés sept points d'intersection de trois surfaces du second ordre, déterminer le huitième point. » Le manuscrit a été achevé par l'auteur en tout ce qui est essentiel au sujet, excepté la conclusion; il ne demande donc, pour être imprimé, que quelques touches légères de style.

Faà de Bruno. — Sur la partition des nombres. (317-326).

Netto (*E.*). — Sur le nombre des valeurs d'une fonction entière de *n* éléments. (327-338).

Sourander (*Émile*). — Sur les sections circulaires des surfaces du second ordre. (339-344). E. L.

MATHEMATISCHE ANNALEN (¹).

Tome XII; 1877.

Krause (*M.*). — Recherches algébriques sur la théorie des fonctions algébriques. (1-22).

Le P. Joubert est le premier qui ait étudié avec détail l'équation qui relie le produit du module primitif et du module complémentaire au produit du module transformé et du module complémentaire. La théorie de cette équation, pour un degré impair de transformation sans diviseur carré, a été faite par MM. Hermite, Joubert, Koenigsberger. M. Krause en donne le discriminant et détermine les racines distinctes de ce discriminant ainsi que leur degré de multiplicité. Comme exemples, il prend les nombres de transformation jusqu'à 30.

Gordan (*P.*). — Sur les groupes finis de transformations linéaires d'une seule variable. (23-46).

Harnack (*Ax.*). — Sur la représentation de la courbe gauche du quatrième ordre de première espèce et de son système de sécantes par des fonctions doublement périodiques. (47-56).

Brill (*A.*). — Sur le discriminant. (87-89).

Démonstration de ce théorème : « Le signe du discriminant d'une équation est négatif quand le nombre des couples de racines imaginaires est impair, positif dans le cas contraire. » L'auteur montre en outre que le nombre des passages des

---

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 224.

racines réelles à des racines imaginaires, pour une équation à coefficients variables, peut être obtenu quand le discriminant de cette équation, regardé comme une fonction du paramètre dont dépendent les coefficients, se décompose en facteurs rationnels.

Brill (*A.*). — Sur les courbes rationnelles du quatrième ordre. (90-128).

§ 1. Équations relatives aux singularités d'une courbe rationnelle. — § 2. Équations relatives aux points d'inflexion et aux tangentes doubles, lorsqu'on se donne les coordonnées des points doubles. — § 3. Équation de la courbe en coordonnées homogènes. — § 4. Coniques des points d'inflexion. — § 5. Équation des points d'inflexion. — § 6. Équation relative aux points de contact des tangentes doubles. — § 7. Discriminants de ces deux équations. — § 8. Cas des points doubles imaginaires.— § 9. Représentation graphique (avec deux planches).

Du Bois-Reymond (*P.*). — Note sur l'intégration des équations aux différentielles totales. (123-130).

L'auteur montre comment l'on peut obtenir géométriquement les méthodes d'Euler et de M. Bertrand pour l'intégration de l'équation $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$, quand l'intégrale est de la forme $\varphi(x, y, z) = C$; il compare ces deux méthodes avec une autre qui a été donnée par Natani et par lui-même pour l'intégration de l'équation

$$\varphi_0\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)dx + \varphi_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)dy + \varphi_2\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)dz = 0.$$

Mayer (*A.*). — Sur le multiplicateur d'un système de Jacobi. (132-142).

Jacobi a donné deux définitions différentes du multiplicateur d'une équation linéaire aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \mathcal{A}(f) = \sum_{h=1}^{h=n} X_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0.$$

La première définition suppose la connaissance de toutes les solutions de l'équation donnée ; la seconde définit le multiplicateur par l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} X_h \frac{\partial \log M}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_n}{\partial x_h} = 0.$$

M. Lie (*Math. Ann.*, t. XI) a montré que la première définition peut être étendue à un *système complet*, pendant que le système correspondant des équations (2) n'admet aucune solution commune ; mais quand le système considéré est un système *jacobien*, c'est-à-dire quand

$$\mathcal{A}_i[\mathcal{A}_k(f)] = \mathcal{A}_k[\mathcal{A}_i(f)]$$

est identiquement nul, le système des équations (2) admet une intégrale com-

mune, et cette intégrale est le multiplicateur commun du système (1), identique avec celui de M. Lie.

Cayley (*A.*). — Note sur la théorie des intégrales elliptiques. (143-156; angl.).

Démonstration et application du théorème de la multiplication complexe.

Gordan (*P.*). — Formes binaires de covariants nuls. (147-156).

Klein (*F.*). — Sur les équations différentielles linéaires. (157-179).

Dans une Note précédente (*Math. Annal.*, t. XI), l'auteur, partant de la théorie des groupes finis de transformations linéaires d'une variable, a montré qu'il n'y a que cinq types d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients rationnels, susceptibles d'être intégrées algébriquement. Il les a désignés par les formes caractéristiques que présentent les intégrales, à savoir le type de la division du cercle et les types de la double pyramide, du tétraèdre, de l'octaèdre, de l'icosaèdre. Dans le Mémoire actuel, il étudie les relations entre ces cinq types, montre comment on peut construire les formes générales de ces équations différentielles, et comment on peut en déduire les équations élémentaires étudiées par M. Schwarz (*Journal de Borchardt*, t. 75). Il détermine, pour quelques exemples compliqués, la fonction rationnelle qui entre dans l'intégrale et, finalement, donne un Tableau où se trouvent toutes les formes primitives (au sens du Mémoire de M. Fuchs, *Journal de Borchardt*, t. 81), qui existent réellement.

Schubert (*H.*). — Le principe de correspondance pour des groupes de n points et de n rayons. (180-201).

Schubert (*H.*). — Singularités du complexe du $n^{\text{ième}}$ degré. (202-221).

On peut définir un complexe du $n^{\text{ième}}$ degré comme l'ensemble de ∞^3 droites dont ∞^2 passent par un point et forment un cône du $n^{\text{ième}}$ degré; on peut aussi le considérer comme un *système spécial, à cinq dimensions, de groupes de rayons* ayant n rayons communs avec chacun des ∞^5 faisceaux de l'espace. C'est à ce dernier point de vue que se place l'auteur. Les singularités d'un complexe se divisent en deux classes :

1° Singularités ne concernant pas les faisceaux de rayons du complexe :

Elles sont contenues dans le symbole

$$A = \mu^\alpha c^\beta g^{i,k,l\,m\,q}, \quad (\alpha \times \beta + i \times k \times l \times m \times q = 5),$$

qui exprime qu'un groupe de rayons a son plan passant par α points donnés, son sommet sur β plans donnés, et que, de ses n rayons, un premier satisfait à une condition fondamentale i^{uple}, ..., un cinquième enfin à une condition q^{uple}.

2° Singularités concernant les faisceaux de rayons :

Désignons par $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_m}$ un groupe de rayons dans lequel il y a m *coïncidences*, en sorte que, des n rayons du groupe, i_1 coïncident avec le premier, ...

et i_m avec le $m^{\text{ième}}$; ces symboles ε se relient avec ceux qui ont été introduits dans la première partie, et où l'auteur remplace g par h quand ce signe se rapporte à un rayon de coïncidence. On peut réunir les singularités dans la formule

$$B = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m} h_{i_1}^{\lambda_1} h_{i_2}^{\lambda_2} \dots h_{i_m}^{\lambda_m} g^{i, k, l, m, q} \mu^{\alpha} c^{\beta}.$$

L'auteur détermine tous les nombres A, B; il détermine les plus simples des nombres A directement et les autres au moyen des méthodes développées dans ses *Beiträge zur Geometrie der Anzahl* (*Math. Annal.*, t. X). En particulier, il trouve

$$g^{v} = 20 n^2 (n-2)(n^2 - 4n + 2).$$

Ainsi, pour $n = 4$, on voit que, dans un complexe du quatrième degré, il existe douze cent quatre-vingts faisceaux plans. Pour la détermination des nombres B, M. Schubert utilise deux méthodes : la première repose sur les formules qu'il a établies dans son Mémoire intitulé *Correspondenzprincip für Gruppen* (*Math. Annal.*, t. XII); la seconde est indirecte; elle part de la définition des complexes données par Plücker et permet de déduire les singularités d'un ordre plus élevé de celles qui sont d'un ordre moindre. Il faut ajouter que les valeurs obtenues se trouvent souvent contrôlées de diverses façons, et, en partie, au moyen de travaux algébriques antérieurs, parmi lesquels il faut citer le Mémoire de M. Voss (*Math. Annal.*, t. IX).

Grassmann (*H.*). — La Mécanique d'après les principes de la théorie de l'étendue. (222-240).

Dantscher (*V.*). — Remarques sur la démonstration analytique de la loi de réciprocité. (241-253).

L'auteur s'occupe de la loi de réciprocité cubique $\left(\frac{Q}{P}\right) = \left(\frac{P}{Q}\right)$ (pour des nombres premiers impairs, primaires), loi énoncée d'abord par Jacobi, puis établie par Eisenstein au moyen de la théorie de la division du cercle, et la déduit d'une représentation analytique du symbole $\left(\frac{P}{Q}\right)$, symétrique par rapport à P et à Q, ainsi qu'Eisenstein avait fait pour la loi de réciprocité biquadratique.

Il se sert pour cela de la fonction $p(u, g_2, g_3)$ introduite par M. Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques, en supposant que les deux invariants g_2 et g_3 sont l'un nul, l'autre égal à 1; cette fonction admet un couple primitif de périodes $2\omega, 2\omega\rho\ (\rho^2 + \rho + 1 = 0)$ et se reproduit quand on multiplie l'argument par ρ, en sorte que $p(\rho u) = \rho p(u)$, propriété qui permet de l'utiliser pour la représentation du symbole cubique.

Dans la première Partie, M. Dantscher traite de la multiplication complexe de cette fonction spéciale p, et en particulier de l'égalité

$$\frac{p(mu)}{pu} = \frac{\Phi(pu)}{m^2 \Psi^2(pu)},$$

où Φ et Ψ sont des fonctions rationnelles de pu et où l'on suppose m impair et primaire; il parvient, au moyen du théorème de l'addition, à un procédé nouveau pour déduire Φ de Ψ, et est ainsi conduit à une représentation du symbole $\left(\frac{P}{Q}\right)$ qui est en

effet symétrique par rapport à P et Q, et aussi aux théorèmes complémentaires relatifs à $\left(\frac{2}{P}\right)$ et à $\left(\frac{1-\rho}{P}\right)$.

Dans la deuxième Partie, pour pouvoir appliquer à la fonction

$$\Psi(pu) = mp^{\frac{N_m - 1}{2}} + c_1 p^{\frac{N_m - 7}{2}} + \ldots + c_{\frac{N_{m'} - 7}{6}} p^3 + (-1)^{\frac{N_{m'} + 5}{6}}$$

la démonstration donnée par Eisenstein pour l'irréductibilité, on démontre d'abord, pour un nombre premier à deux termes m, la divisibilité par m des coefficients $c_1, \ldots$. La démonstration souffre une exception dans le cas d'un nombre premier à un seul terme m, pour le coefficient c_k, lorsque $6k+1 \equiv 0 \pmod{m}$; mais on évite cette difficulté au moyen des relations générales entre Φ et Ψ. La théorie donnée par M. Weierstrass fournit deux systèmes de congruences par rapport au module m^2, dont on déduit que le terme c_k, lorsque $6k+1 \equiv 0 \pmod{m}$, est divisible par m, et que les $\frac{m+1}{6}$ coefficients voisins à droite, et les $\frac{m-2}{3}$ coefficients voisins à gauche sont divisibles par m^2.

Grassmann (*H.*). — La place des quaternions d'Hamilton dans la théorie de l'étendue (375-386).

Dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Crelle* (t. 49) *Sur les différents genres de multiplication*, Grassmann a défini seize modes différents de multiplication; pour les grandeurs obtenues au moyen de trois unités indépendantes, ces modes sont caractérisés par ce fait qu'un certain nombre des quatre équations qui suivent sont ou non satisfaites :

$$e_i e_k = e_k e_i, \tag{1}$$

$$e_i e_k + e_k e_i = 0, \tag{2}$$

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2, \tag{3}$$

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0. \tag{4}$$

Les équations (2), (3), (4) définissent la multiplication *extérieure* que l'auteur a surtout employée dans la *science de l'étendue* (*Ausdehnungslehre*); les équations (1), (2), (3) définissent la multiplication *intérieure;* les équations (2) et (3) déterminent un mode de multiplication que M. Grassmann qualifie de *moyenne*, et de la considération de laquelle il déduit les théorèmes fondamentaux du calcul des quaternions; il indique ensuite les problèmes que l'on traite habituellement comme applications du calcul des quaternions et qui se résolvent aisément au moyen des multiplications *extérieure* et *intérieure* et aussi de l'opération qu'il désigne sous le nom de *quotient*. Enfin, pour ce qui concerne les applications à la Trigonométrie sphérique, la composition des segments d'après les méthodes de son Ouvrage lui paraît préférable au calcul des quaternions; il termine en développant un certain nombre d'exemples.

Köpcke (*A.*). — Sur la discussion du mouvement d'un solide de révolution dans un fluide. (387-402).

M. Kirchhoff, dans le Tome 71 du *Journal de Borchardt*, a ramené l'étude du

mouvement d'un corps solide de révolution dans un fluide incompressible au calcul de deux intégrales elliptiques : au moyen des fonctions inverses, on exprime les composantes de la vitesse de chaque point et l'on détermine la position du corps. L'inversion des intégrales est effectuée dans le Mémoire de M. Köpcke et les formules sont données explicitement au moyen des fonctions Θ. Pour cela on decompose la seconde intégrale en une somme de trois intégrales normales ; les transformations quadratiques employées sont différentes, selon que l'expression du quatrième degré sous le radical a ses quatre racines réelles ou bien en a deux réelles et deux imaginaires, le cas des quatre racines imaginaires se trouvant exclu par la nature du problème. Les trois angles qui déterminent l'orientation du système solide par rapport à trois axes fixes s'expriment au moyen des fonctions Θ ainsi calculées.

D'Ovidio (*H.*). — Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbure constante (403-418; fr.).

Résumé d'un Mémoire lu à l'Académie des Lincei (8 avril 1877) sur la théorie des fonctions métriques pour les espaces à n dimensions dans lesquels une forme quadratique représente, d'après M. Cayley, l'*absolu* des multipoints et des multiplans : une droite est un $(n-2)$-plan ; un r-point est un $(n-r)$-plan ; l'auteur appelle un tel espace *espace de courbure constante* sans d'ailleurs justifier cette dénomination. La distance entre deux points est le logarithme, divisé par $2\sqrt{-1}$, du rapport anharmonique de ces deux points par rapport aux deux points où la droite coupe l'absolu ; la définition de l'angle de deux points est dualistique.

Le *moment* (ou le *comoment*) d'un r-point R et d'un r'-point R′ est le produit des sinus (ou des cosinus) des ρ distances entre R et R′, c'est-à-dire entre les points où une perpendiculaire commune à R et à R′ rencontre l'un et l'autre. L'absolu de l'espace à $(n-r)r$ dimensions qui a pour éléments les r-points est l'agrégat des r-points R, dans lesquels existe un point orthogonal à tout l'r-point : chacun de ces points est tangent à l'absolu. Un r-point R et un r'-point R′ sont parallèles lorsqu'ils ont en commun un k-point K appartenant à l'absolu des k-points ; il y a parallélisme d'ordre supérieur lorsque K touche l'absolu suivant un multipoint. La dualité ne subsiste plus lorsque le discriminant de l'absolu est nul.

Krause (*M.*). — Sur les équations modulaires des fonctions elliptiques. (419-431).

Pringsheim (*A.*). — Sur la théorie des fonctions hyperelliptiques, et particulièrement de celles du troisième ordre ($\rho = 4$). (435-475).

Les fonctions ϑ qui servent pour l'inversion d'un système d'intégrales hyperelliptiques du $(\rho-1)^{\text{ième}}$ ordre (ou d'espèce ρ) forment une classe spéciale parmi les fonctions ϑ à ρ variables, prises dans leur généralité ; pour ces fonctions le nombre de constantes *indépendantes* qui constituent les modules, nombre qui est en général $\frac{\rho(\rho+1)}{2}$, se réduit à $2\rho - 1$; en sorte que les modules d'une fonction ϑ

doivent, pour que celle-ci soit une fonction hyperelliptique, satisfaire à $\frac{(\rho-1)(\rho-2)}{2}$ relations. La forme de ces relations a été donnée par M. Weierstrass ; il a montré qu'elles consistaient dans l'évanouissement d'un certain nombre de fonctions ϑ paires, à arguments nuls, fonctions qui, lorsqu'on ne se place pas dans le cas particulier des fonctions hyperelliptiques, ne sont pas nulles.

En comptant le nombre de conditions de cette nature, on reconnaît qu'il surpasse le nombre $\frac{(\rho-1)(\rho-2)}{2}$ lorsque ρ est supérieur à 3 ; qu'il n'y en ait réellement que $\frac{(\rho-1)(\rho-2)}{2}$ qui soient indépendantes, on parvient à le démontrer, de même que, en partant de ces conditions *nécessaires* pour caractériser un système hyperelliptique qui sont données par l'évanouissement d'un certain nombre de fonctions ϑ paires, on établit ces propriétés, fondamentales pour un tel système, qui consistent dans l'existence de relations linéaires homogènes entre les carrés de $\rho+2$ fonctions ϑ à indices simples et aussi entre $\rho+1$ produits de fonctions ϑ de la forme $\vartheta_\alpha(u,\ldots)\,\vartheta_{\alpha\mu}(u,\ldots)$, où α est un indice variable pris dans la suite $0, 1, 2, \ldots, 2\rho$, et μ un indice fixe pris dans la même suite, mais différent de α. Ces relations sont, d'une part, conformes aux équations de Rosenhain pour des fonctions ϑ hyperelliptiques du premier ordre et, d'autre part, coïncident avec les résultats déduits directement par M. Weierstrass, pour les fonctions hyperelliptiques $p_1, \ldots, p_{2\rho+1}$ des équations différentielles.

Dans le cas de $\rho = 4$, M. Pringsheim montre que les conditions nécessaires pour caractériser un système hyperelliptique sont aussi suffisantes; c'est-à-dire que, en supposant l'évanouissement d'un certain nombre de fonctions ϑ paires, tous les quotients de fonctions ϑ s'expriment symétriquement au moyen de quatre variables $x_1, \ldots, x_4$, et que, d'un autre côté, les arguments $v_1, \ldots, v_4$ de chaque fonction ϑ sont liés à $x_1, \ldots, x_4$ par un système hyperelliptique d'équations différentielles. Le chemin suivi est analogue à celui que Rosenhain a tracé pour les fonctions hyperelliptiques du premier ordre.

Le nombre de fonctions ϑ dont on a à s'occuper dans ce cas s'élève à 256, sans compter la fonction ϑ fondamentale et les neuf fonctions ϑ à indices simples $(0, 1, \ldots, 8)$; les autres ont des indices composés de deux, trois ou quatre chiffres. L'auteur les a toutes réunies dans un Tableau, avec leurs caractéristiques. Parmi les cent trente fonctions paires, dix doivent, pour que le système soit hyperelliptique, s'annuler quand on suppose les arguments nuls: mais un tel système, pour $\rho = 4$, possédant encore sept constantes arbitraires, il faut que des dix équations dont nous venons de parler, qui équivalent à autant de relations entre les dix modules, il n'y en ait que trois d'indépendantes: c'est ce que M. Noether a établi tout récemment d'une façon explicite (*Math. Ann.*, t. XIV).

Après avoir développé le nombre suffisant de relations entre les fonctions ϑ à arguments nuls, on peut exprimer tous les quotients de fonctions ϑ à arguments nuls au moyen de sept constantes indépendantes; mais les formules deviennent plus symétriques en introduisant neuf quantités $a_0, a_1, \ldots, a_8$. Puis, au moyen des relations linéaires homogènes, dont il a été parlé plus haut, entre les carrés de fonctions ϑ à arguments quelconques, on voit que des neuf quotients de fonctions ϑ dont les numérateurs sont des fonctions à indices simples et dont le dénominateur est toujours la fonction ϑ fondamentale, cinq peuvent être exprimées au moyen des quatre autres; en d'autres termes, les neuf quotients s'expriment au moyen de quatre variables indépendantes $x_1, \ldots, x_4$. Toutes les rela-

tions en question sont ainsi satisfaites en remplaçant les neuf quotients de fonctions ϑ, à arguments $v_1, \ldots, v_4$, par certaines fonctions symétriques par rapport à $x_1, \ldots, x_4$ et par rapport à $a_0, \ldots, a_8$. Il en est de même des autres quotients de fonctions de ϑ, et en particulier de ceux où les fonctions en numérateurs ont des indices doubles, quotients qui, dans les recherches ultérieures, se présentent comme dérivées de ceux dont on vient de parler; ils s'expriment tous symétriquement au moyen de $x_1, \ldots, x_4$.

Pour prouver maintenant l'existence d'un système hyperelliptique d'équations différentielles entre $v_1, \ldots, v_4$, et $x_1, \ldots, x_4$, de la forme

$$(1) \qquad dv_a = \sum_{b=1}^{b=4} F_{a,b}\left[x_b \sqrt{R(x_b)}\right] dx_b, \quad (a = 1, 2, 3, 4),$$

où $F_{a,b}$ désigne une fonction rationnelle quelconque, et $R(x)$ un polynôme du neuvième degré dont les racines sont $a_0, \ldots a_8$, l'auteur introduit quatre variables auxiliaires $u_1, \ldots, u_4$ au moyen de quatre équations différentielles hyperelliptiques d'une forme entièrement déterminée et montre que dans la relation identique

$$(2) \qquad dv_a = \sum_{b=1}^{b=4} \frac{\partial v_a}{\partial u_b} du_b,$$

les coefficients $\dfrac{\partial v_a}{\partial u_b}$ sont des constantes; il suffit pour cela de montrer que la même chose a lieu dans le système réciproque

$$(3) \qquad du_a = \sum_{b=1}^{b=4} \frac{\partial u_a}{\partial v_b} dv_b.$$

La preuve se déduit des relations qui existent entre v_a et x_a, et de celles qui lient par définition les u_a et les x_a, en différentiant certaines formules d'addition des fonctions ϑ que l'on établit à cette occasion. On arrive ainsi à l'équation [équivalente à l'équation (2)],

$$(4) \qquad du_a = A_a dv_1 + B_a dv_2 + \Gamma_a dv_3 + \Delta_a dv_4,$$

ou $A_a, \ldots, \Delta_a$ sont des constantes. Ces coefficients sont d'abord exprimés au moyen de fonctions ϑ paires à arguments nuls et de leurs premières dérivées; on peut les exprimer aussi au moyen des périodes en remplaçant dans les équations (4) les u_a par les expressions qui les définissent au moyen de $x_1, \ldots, x_4$, puis en intégrant entre des limites convenables par rapport aux x et aux v.

La comparaison des valeurs des coefficients conduit à des relations qui permettent d'exprimer les modules réels de périodicité $K_{a,b}$ au moyen des fonctions ϑ à arguments nuls et de leurs premières dérivées; ces formules sont les analogues de la formule bien connue de la théorie des fonctions elliptiques $2K = \sqrt{\frac{1}{k}}\,\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_0}$.

Quant aux coefficients des systèmes (1) et (2), qui sont l'objet principal des recherches, on les obtient sous la forme suivante : en supposant les équations (2) écrites comme il suit,

$$(5) \qquad dv_a = \mathfrak{A}_a du_1 + \ldots + \mathfrak{D}_a du_4,$$

les coefficients $\mathcal{A}, \ldots, \mathcal{Q}$ sont des fractions dont le dénominateur est

$$(6) \qquad D = \begin{vmatrix} 2K_{11} & \ldots & 2K_{41} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 2K_{41} & \ldots & 2K_{44} \end{vmatrix}.$$

On peut les exprimer aussi au moyen des fonctions ϑ, et l'on est ainsi conduit à des formules analogues aux formules de la théorie des fonctions elliptiques $\vartheta_3 = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$, et au moyen desquelles chaque fonction ϑ à arguments nuls, différente de zéro, se présente comme un multiple de $\sqrt{D}\ldots$,

Finalement, en intégrant les équations (4) pour des systèmes de valeurs convenables de $v_1, \ldots, v_4$, et de $x_1, \ldots, x_4$, on parvient à exprimer les modules des fonctions ϑ au moyen des modules de périodicité, et par suite en fonction uniforme de $a_0, \ldots, a_8$. En résumé, les formules fondamentales du problème de l'inversion, pour le cas de $p = 4$, se trouvent obtenues.

Krey (*H.*). — Note sur un problème d'élimination. (476-480).

Détermination du nombre de couples de deux points situés sur une même courbe d'espèce p, avec points doubles, qui satisfont à deux correspondances.

Schröder (*E.*). — Note sur le cercle d'opérations du calcul logique. (481-484).

Cette Note se rapporte à un travail de l'auteur, *Die Operationsbasis des Logikcalculs* (Leipzig, Teubner, 1877), travail qui se relie à ceux de G. Boole et de R. Grassmann.

Voss (*A.*). — Sur les courbes asymptotiques (*Haupttangentencurven*) des surfaces gauches. (485-502).

L'équation différentielle des courbes asymptotiques d'une surface réglée dans laquelle les coordonnées de la génératrice sont fonctions d'un paramètre est obtenue par la considération du faisceau de complexes linéaires déterminé par une génératrice et trois génératrices consécutives. Chaque complexe du faisceau détermine deux tangentes consécutives d'une courbe, en vertu de ce théorème général, que, pour toute surface réglée dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire, on peut déterminer, par des opérations algébriques, une ligne asymptotique dont les rapports géométriques avec le faisceau sont bien connus. Pour obtenir explicitement l'équation différentielle, on a à résoudre un système de quatre équations linéaires et d'une équation quadratique; on y parvient en introduisant les coordonnées du complexe déterminé par une génératrice et les quatre génératrices consécutives; on l'obtient ainsi sous une forme dans laquelle tous les coefficients sont des invariants de la surface, dont la signification est indépendante du choix du paramètre. On peut l'intégrer quand la surface appartient à un complexe linéaire. L'auteur cherche ensuite, en supposant que les coordonnées des génératrices soient des fonctions rationnelles du paramètre, sous quelles conditions les lignes asymptotiques sont algébriques. Il y parvient en s'aidant des criteriums donnés par M. Koenigsberger et par M. Liouville pour la réduction des intégrales hyperelliptiques à des fonctions algébrico-logarithmiques, et il indique la signification géométrique des conditions auxquelles il est ainsi

conduit. Enfin il traite en particulier le cas où le complexe linéaire est un complexe spécial.

Klein (*F.*). — Nouvelles recherches sur l'icosaèdre. (503-540).

Crone (*C.*). — Sur la distribution des tangentes doubles sur les divers systèmes de coniques ayant un contact quadruple avec une courbe du quatrième ordre. (561-575; fr.).

L'auteur a donné un développement de la même matière avec des démonstrations plus détaillées dans le journal danois *Tidsskrift for Mathematik*, Cah. V, 1875.

Prix proposé par la Société Jablonowski pour l'année 1879.

Ax. H.

ARCHIV MATHEMATIKY A FYSIKY, kterýž vydává Jednota českých mathematiků v Praze [1].

Tome II : 1877-1879.

Blažek (*G.*) — Essai d'une théorie des courants de la mer. (1-25; all.).

L'auteur, après avoir mentionné les recherches de Maury, de Mühry et de Schilling, passe au développement et à la démonstration de sa propre théorie, dont il résume comme il suit les principales propositions.

La cause des grands courants constants de la mer est l'inégale température de l'eau depuis l'équateur jusqu'aux pôles. Cette cause permet à l'action combinée de la pesanteur et de la force centrifuge de chasser l'eau froide vers l'équateur, et l'eau chaude vers le pôle.

En vertu de la rotation de la Terre et de l'inertie de l'eau, il naît de part et d'autre de l'équateur, en sens contraire de la rotation de la Terre, des courants fermés dont les centres sont situés entre le 30° et le 35° degré de latitude. Sous ces mêmes parallèles règnent, au fond de la mer, des courants froids de sens opposé, qui, sous l'équateur, montent à la surface de la mer, et forment le contre-courant équatorial.

Il se produit, en général, dans chaque courant dirigé vers l'équateur, une rotation dans le sens de celle de la Terre, et au contraire, dans chaque courant dirigé vers le pôle, une rotation dans le sens opposé.

Le Mémoire se termine par une comparaison de ces résultats théoriques avec les données de l'observation.

Weyr (*Ed.*). — Sur la marche des fonctions elliptiques. (26-60).

---

[1] Voir *Bulletin*, VIII, 112.

Étude des valeurs de l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

prise suivant des chemins rectilignes, puis suivant des chemins quelconques. De là on déduit, en posant

$$z = \sin\operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-z^2} = \cos\operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-k^2z^2} = \Delta\operatorname{am} u,$$

la monodromie de ces fonctions, leur périodicité, les racines des équations

$$\sin\operatorname{am} u = \sin\operatorname{am} u_0, \quad \cos\operatorname{am} u = \cos\operatorname{am} u_0, \quad \Delta\operatorname{am} u = \Delta\operatorname{am} u_0,$$

et enfin on décide de laquelle des quatre formes

$$\pm ip^2 \pm iq^2$$

sont $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ pour une valeur donnée de u.

Sýkora (A.). — Sur l'intégrale Σx^{k+1}. (61-65).

Désignons, pour abréger, par $x^{(n)}$ le produit

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1),$$

et rappelons la formule

$$\Sigma x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + \text{const.},$$

la différence Δx étant supposée égale à l'unité. Pour intégrer x^{k+1}, où k désigne un entier positif, posons

(1) $$x^{k+1} = R_0 + R_1 x^{(1)} + R_2 x^{(2)} + \ldots + R x^{(k+1)}.$$

et nous aurons, R_0 étant évidemment nul,

$$\Sigma x^{k+1} = \text{const.} + \frac{1}{2} R_1 x^{(2)} + \frac{1}{3} R_2 x^{(3)} + \ldots + \frac{1}{k+2} R_{k+1} x^{(k+2)}.$$

Les quantités $R_0, R_1, R_2, \ldots$ se présentent comme restes, lorsqu'on divise x^{k+1} par x, puis le quotient par $x-1$, le nouveau quotient par $x-2$, et ainsi de suite. Dans le Tableau suivant, on a calculé, par la méthode de Horner, les coefficients des divers coefficients en question :

	x^{k+1} +	0 +	0 +	0 +	0 +	0 +	...	
0	1	0	0	0	0	0	...	$R_0 = 0$
1	1	1	1	1	1	1	...	$R_1 = 1$
2	1	3	7	15	31	.	...	$R_2 =$
3	1	6	25	90	301	.	...	$R_3 =$
4	1	10	65	350	.	.	...	$R_4 =$
5	1	15	140	.	.	.	...	$R_5 =$
.	.	..	...	.	.	.	...	.....

On voit de suite que les nombres qui figurent dans une diagonale de ce Tableau (par exemple dans celle qui commence à la ligne contenant les coefficients du quotient qui correspond au diviseur $x - 4$) donnent les quantités R correspondantes à une certaine valeur de k ($k + 1 = 4$), c'est-à-dire qu'on a, par exemple,

$$x^4 = 0 + x^{(1)} + 7x^{(2)} + 6x^{(3)} + x^{(4)}.$$

Si l'on considère deux diagonales consécutives, on aperçoit immédiatement que, en posant

$$x^k = x^{(1)} + A_2 x^{(2)} + A_3 x^{(3)} + \ldots + A_k x^{(k)},$$

on a

$$x^{k+1} = x^{(1)} + (2A_2 + 1)x^{(2)} + (3A_3 + A_2)x^{(3)} + \ldots + (kA_k + A_{k-1})x^{(k)} + A_k x^{(k+1)},$$

ce qui permet de former les quantités R_2, R_1, ..., en partant de l'égalité $x = x^{(1)}$. Afin d'obtenir pour les R des expressions indépendantes, remarquons d'abord qu'on a $R_0 = 0$, $R_1 = 1$. Le coefficient R_2 est évidemment le $k^{\text{ième}}$ terme de la suite 1, 3, 7, 15, ..., qui forme la troisième ligne de notre Tableau; deux termes consécutifs u_r, u_{r+1} satisfaisant à l'équation

$$u_{r+1} = 2u_r + 1,$$

on trouve

$$u_r = C.2^r - 1,$$

et, puisque $u_1 = 1$, la constante d'intégration C sera $= 1$; donc

$$(2) \qquad R_2 = u_k = 2^k - 1.$$

Le coefficient R_3 est le $(k-1)^{\text{ième}}$ terme de la suite

$$1,\ 6,\ 25,\ 90,\ 301,\ \ldots,$$

qui forme la quatrième ligne de notre Tableau. Pour cette suite, on a

$$v_{r+1} = 3v_r + u_{r+1},$$

c'est-à-dire

$$v_{r+1} = 3v_r + 2^{r+1} - 1;$$

de là, en intégrant,

$$v_r = \frac{1}{2} - 2^{r+1} + C.3^{r-1},$$

et, comme $v_1 = 1$, on trouve $C = \frac{9}{2}$; donc enfin

$$(3) \qquad R_3 = v_{k-1} = \frac{1}{2}(1 - 2.2^k + 3^k).$$

On trouverait de la même manière

$$R_4 = \frac{1}{3!}(-1 + 3.2^k - 3.3^k + 4^k),$$

$$R_5 = \frac{1}{4!}\left[1 - \binom{4}{1}2^k + \binom{4}{2}3^k - \binom{4}{3}4^k + 5^k\right],$$

. . . .

et enfin, par une induction complète,

$$(1)\quad R_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[n^k - \binom{n-1}{1}(n-1)^k + \binom{n-2}{2}(n-2)^k - \binom{n-3}{3}(n-3)^k + \ldots\right].$$

Il est aisé de donner les quatre derniers coefficients du développement (1) sous une forme plus simple. En effet, R_{k+1} étant dans la première colonne de notre Tableau, on a $R_{k+1} = 1$; en calculant le terme général de la suite contenue dans la seconde colonne, on trouve

$$R_k = \frac{k(k+1)}{2};$$

enfin la troisième et la quatrième colonne donnent

$$R_{k-1} = \frac{k(k^2-1)(3k-2)}{24},$$

$$R_{k-2} = \frac{k(k-1)^2(k-2)^2(k+1)}{48}.$$

Les valeurs de $R_{k-3}, R_{k-4}, \ldots$ deviendraient déjà trop compliquées.

Sýkora (*A.*). — Sur les valeurs des expressions $\lim\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega$, $\lim\frac{\omega}{a^\omega}$. (65-69).

I. En supposant le nombre ω entier et positif, on trouve sans difficulté, par le développement du binôme,

$$(1)\qquad \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega < \Omega,$$

en posant

$$\Omega = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\omega!}.$$

Mais on a

$$\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\left(1-\frac{2}{\omega}\right) = 1 - \frac{1}{\omega} - \frac{2}{\omega} + \frac{2}{\omega^2} > 1 - \left(\frac{1}{\omega}+\frac{2}{\omega}\right) = 1 - \frac{3}{\omega},$$

$$\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\left(1-\frac{2}{\omega}\right)\left(1-\frac{3}{\omega}\right) > \left(1-\frac{1}{\omega}-\frac{2}{\omega}\right)\left(1-\frac{3}{\omega}\right) > 1 - \frac{1}{\omega} - \frac{2}{\omega} - \frac{3}{\omega} = 1 - \frac{6}{\omega},$$

et généralement

$$\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\left(1-\frac{2}{\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{\omega}\right) > 1 - \frac{1}{\omega} - \frac{2}{\omega} - \cdots - \frac{n-1}{\omega} = 1 - \frac{n(n-1)}{2\omega}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega &= 1 + 1 - \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\omega}\right) + \frac{1}{3!}(1-\omega)\left(1-\frac{2}{\omega}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{\omega!}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\left(1-\frac{2}{\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{\omega-1}{\omega}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\omega}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{3}{\omega}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left[1-\frac{n(n-1)}{2\omega}\right] + \cdots + \frac{1}{\omega!}\left[1-\frac{\omega(\omega-1)}{2\omega}\right],\end{aligned}$$

ou bien

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} > 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\omega!}$$
$$-\frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-2)!}+\cdots+\frac{1}{(\omega-2)!}\right],$$

c'est-à-dire

(2) $$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} > \Omega - \frac{1}{2\omega}\left[\Omega - \frac{1}{(\omega-1)!} - \frac{1}{\omega!}\right].$$

Puisque

$$\lim_{\omega=\infty} \Omega = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

est une quantité finie, on déduit des inégalités (1) et (2)

$$\lim_{\omega=\infty}\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = \lim_{\omega=\infty}\Omega = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots \text{ à l'infini.}$$

Les cas de ω fractionnaire ou négatif se ramènent de la manière connue à celui que nous venons de considérer.

II. Si l'on suppose $a>1$ et $\lim\omega=\infty$, on a

$$\lim \frac{\omega}{a^{\omega}} = 0.$$

En effet, comme il suffit de considérer les valeurs entières de ω, on a

$$\frac{\omega}{a^{\omega}} = \frac{1}{a}\,\frac{2}{a}\,\frac{\frac{3}{2}}{a}\,\frac{\frac{4}{3}}{a}\cdots\frac{\frac{\omega}{\omega-1}}{a}.$$

Les facteurs de ce produit ont pour limite $\frac{1}{a}$; ils seront donc, à partir d'un certain facteur $\frac{\frac{n}{n-1}}{a}$, constamment moindres qu'une fraction $\frac{1}{b}$, b étant compris entre a et l'unité. Donc

$$\frac{\omega}{a^{\omega}} < \frac{n}{a^n}\,\frac{1}{b}\,\frac{1}{b}\cdots\frac{1}{b} \quad \text{ou} \quad < \frac{n}{a^n}\,\frac{1}{b^{\omega-n}},$$

d'où l'on tire, pour $\omega=\infty$, le résultat annoncé.

On ferait voir de la même manière que

$$\lim \frac{\omega^r}{a^{\omega}} = 0, \quad \lim \frac{a^{\omega}}{\omega^r} = \infty,$$

pour toute valeur finie de r.

Strouhal (*V.*). — Sur les lignes de courbure de l'hélicoïde gauche. (69-84; all.).

En partant de l'équation de la surface

$$z = h \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

l'auteur détermine la courbure d'une ligne quelconque tracée sur la surface, puis celle d'une section normale; de là il déduit les sections principales et leurs rayons de courbure, qui sont égaux et de signes contraires. En posant

$$xr = t,$$

où r désigne le rayon de courbure d'une section principale, on donne aux équations différentielles des lignes de courbure la forme

$$\sqrt{2}\frac{dx}{ds} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{t}},$$

$$\sqrt{2}\frac{dy}{ds} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{t}},$$

$$\sqrt{2}\frac{dz}{ds} = \frac{k}{\sqrt{t}}.$$

L'intégration de ces équations donne

$$x = \sqrt{t-k^2}\cos\left[c \pm \log\left(\sqrt{t}+\sqrt{t-k^2}\right)\right],$$

$$y = \sqrt{t-k^2}\sin\left[c \pm \log\left(\sqrt{t}+\sqrt{t-k^2}\right)\right],$$

$$z = k\left[c \pm \log\left(\sqrt{t}+\sqrt{t-k^2}\right)\right]$$

pour les équations des lignes de courbure.

Après avoir introduit, au lieu de t, une nouvelle variable φ définie par l'équation

$$\log\left(\sqrt{t}+\sqrt{t-k^2}\right) = \varphi,$$

ce qui donne

$$x = \rho\cos(c \pm \varphi), \quad y = \rho\sin(c \pm \varphi), \quad z = k(c \pm \varphi),$$

ρ désignant la quantité $\frac{1}{2}(e^{\varphi} - k^2 e^{-\varphi})$, l'auteur étudie la forme des deux systèmes de lignes représentés par ces équations.

Günther (*S.*). — Le théorème de décomposition d'Euler et le pendule de Foucault. (84-95; all.).

L'auteur fait voir que le théorème de décomposition d'Euler pour les rotations infiniment petites doit servir de base à la démonstration mathématique de la loi physique découverte par Foucault, et la faute commise en ne tenant pas compte de ce théorème est la source commune tant des erreurs que l'on rencontre dans les démonstrations données pour le théorème de Foucault que de celles que présente la formule inexacte proposée par Hullmann pour la vitesse angulaire relative du plan d'oscillation.

Weyr (*Ed.*). — Addition à l'article sur les lignes de courbure de l'hélicoïde gauche. (95-101).

Cette addition se rapporte à l'article de M. Strouhal analysé plus haut. Il s'agit des lignes asymptotiques et de l'équation différentielle des lignes de courbure de

la surface conoïde

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

x, y, z étant des coordonnées rectangulaires.

L'auteur traite d'abord le cas du paraboloïde hyperbolique

$$z = \frac{a\,\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - b},$$

en se bornant à la considération des points situés sur l'axe des x; puis il ramène le problème à ce cas spécial à l'aide du paraboloïde osculateur. Il obtient ainsi le résultat suivant :

Les lignes asymptotiques d'une surface $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ *sont données par l'équation*

$$\rho = C\,\frac{\sqrt{f'(\tang\omega)}}{\cos\omega},$$

C *étant une constante arbitraire*, ρ *et* ω *les coordonnées polaires dans le plan des* xy.

L'équation différentielle des lignes de courbure est

$$b\,d\rho^2 - 2\rho\,d\rho\,d\omega - b\left(\frac{1}{k^2} + \rho^2\right)d\omega^2 = 0,$$

en posant

$$\frac{1}{k} = \frac{f'}{\cos^2\omega}, \quad m'' = -\frac{2f'}{f''} - \tang\omega, \quad b = \frac{m'' + \tang\omega}{m''\tang\omega - 1},$$

f' et f'' représentant, pour abréger, $f'\left(\frac{y}{x}\right)$, $f''\left(\frac{y}{x}\right)$. On intègre cette équation dans le cas de l'hélicoïde gauche.

Zahradník (*K.*). — Sur une certaine correspondance géométrique, relative aux courbes du troisième degré et de la troisième classe. (101-104).

Par un point quelconque P, situé dans le plan d'une telle courbe, il passe trois tangentes; on détermine le centre de gravité S du triangle formé par les points de contact de ces tangentes. On fait correspondre le point S au point P, en se bornant au cas de la cissoïde. L'auteur tire de ses formules cette conclusion : « Si le point S décrit une courbe de degré n, le pôle P engendrera une courbe de degré $2n$, ayant pour points n^{uples} les points circulaires à l'infini. »

Jerábek (*V.*). — Sur le lieu géométrique des centres de projection desquels une conique donnée se projette suivant des cercles sur un plan donné. (104-108).

Soient C la conique donnée, R son plan; appelons N le plan sur lequel on projette C. Le lieu des points s desquels C se projette sur N suivant des cercles est une conique S, de même centre que C, et située dans le plan qui passe par ce centre et par

la perpendiculaire élevée dans le plan N au milieu de la droite mn, m et n désignant les points de rencontre de C avec le plan N. La tangente du lieu S au point s passe par le centre du cercle projection C sur N prise du centre s. Les projections orthogonales des coniques C et S sur le plan donné N sont des coniques confocales.

Zahradník (*K.*). — Lignes engendrées par les éléments correspondants de deux courbes unicursales situées dans un même plan. (109-112).

On considère, sur deux courbes unicursales de degrés m et n, des points qui se correspondent un à un; la droite qui joint les points correspondants enveloppe une courbe de $(m+n)^{\text{ième}}$ classe. En supposant les deux courbes données identiques, l'enveloppe n'est plus que de la $2(n-1)^{\text{ième}}$ classe; de là on conclut qu'une courbe unicursale de degré n est généralement de $2(n-1)^{\text{ième}}$ classe.

Dvořák (*Č.*). — Sur la répulsion produite par le son. (113-123).

L'auteur décrit une série d'expériences intéressantes concernant la répulsion acoustique. Si l'on approche un diapason vibrant d'un résonnateur fixé à un levier tournant autour d'un axe vertical, le résonnateur éprouve une répulsion. Cela s'explique par ce fait qu'il y a aux nœuds d'une masse d'air vibrante une pression moyenne plus grande qu'en d'autres points; c'est un fait qu'il est aisé de constater, soit par la voie expérimentale, soit par un calcul simple. L'expérience devient très-élégante si l'on forme, à l'aide de quatre résonnateurs, une sorte de roue à réaction acoustique. L'auteur se propose de construire, en guise de balance de Coulomb, une balance acoustique dont on se servirait pour mesurer l'intensité du son.

Strnad (*A.*). — Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques. (124-145).

Théorie de cette transformation dans le plan, avec de nombreux exemples, qui mettent en évidence le parti qu'on en peut tirer en Géométrie.

Mikši' (*Marko*). — Des relations de la pyramide et des polyèdres avec les progressions, notamment avec les progressions arithmétiques et géométriques. (145-165).

Koláček (*Fr.*). — Sur le mouvement d'une masse liquide contenue dans un vase cylindrique à base circulaire, sous l'action de la pesanteur. (167-188).

L'auteur traite ce problème en se fondant sur les équations déduites des *Vorlesungen über mathematische Physik* de Kirchhoff. Parmi les résultats qui se rattachent spécialement au problème traité, citons celui-ci. Si le liquide se décompose en plusieurs systèmes sectoriaux, le mouvement oscillatoire peut avoir lieu d'une infinité de manières, et pour chacune il existe un système de cercles concentriques dépourvus de toute vitesse radiale. Les rayons $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de ces cercles ont des rapports invariables, étant proportionnels aux racines d'une certaine équation.

Řehořovský (*V.*). — Sur la construction analytique des surfaces gauches. (188-226).

L'auteur développe les propriétés descriptives des surfaces gauches, en partant des équations de la génératrice

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des fonctions d'une variable t. Énumérons les matières qu'il traite : équation du plan tangent; égalité du rapport anharmonique de quatre plans tangents menés par une génératrice avec le rapport anharmonique des points de contact; involution des points d'une génératrice dont les plans tangents forment des angles droits; point central; plan central : plan asymptotique; paraboloïde des normales; lignes de contour; sections planes et leurs asymptotes; surface développable asymptotique; cône directeur; ligne de striction (exemples : paraboloïde hyperbolique, hyperboloïde à une nappe) : paramètre d'une génératrice; sommets et arêtes; lignes doubles (exemple : lignes doubles de l'hélicoïde gauche) : trajectoires orthogonales des génératrices, déterminées à l'aide d'une quadrature; hyperboloïde osculateur; équation différentielle des lignes asymptotiques; leurs plans osculateurs sont tangents à la surface; détermination des lignes asymptotiques dans le cas des conoïdes $y = \alpha x$, $z = \delta$.

En poursuivant l'étude des points d'intersection d'une droite avec la surface gauche, l'auteur montre qu'il y a généralement sur chaque génératrice *deux* points (réels, distincts ou coïncidants, ou imaginaires) dont les tangentes principales ont quatre points voisins communs avec la surface; le lieu de ces points constitue deux courbes, que l'auteur désigne sous le nom de lignes *hyperasymptotiques*. Sur ces deux courbes il y a des points, en nombre fini, dont les tangentes principales passent par cinq points consécutifs de la surface. En terminant, l'auteur résout ce problème : « Quelles doivent être les fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que toute tangente principale ait quatre points consécutifs communs avec la surface ? » Le problème est formulé par trois équations différentielles du troisième ordre entre la variable $\alpha = t$ et les fonctions β, γ, δ. *L'auteur intègre complétement ces équations en effectuant neuf intégrations, et il trouve que la surface cherchée est du second degré;* de là cette conclusion, que les surfaces du second degré sont les seules qui aient deux systèmes de génératrices rectilignes.

Zahradník (K.). — Propriétés de certains groupes de points sur une conique. (227-235).

Par tout point A d'une ellipse il passe trois cercles osculateurs de la conique; leurs points de contact A_1, A_2, A_3 forment des groupes d'une involution cubique. Les triangles $A_1 A_2 A_3$ sont d'aire maximum parmi les triangles inscrits à la conique; leur centre de gravité est au centre de la conique. Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle $A_1 A_2 A_3$ est une conique de mêmes axes que l'ellipse donnée; le lieu du point de concours des hauteurs de ce triangle est encore une conique, etc.

Ed. W.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK. Udgivet af H.-G. ZEUTHEN (4[e] série) (1).

Tome I; 1877.

Westergaard (*H.*). — Une formule de statistique de la mortalité. (1-2).

Juel (*C.*). — Démonstration géométrique de quelques propriétés des courbes unicursales du troisième et du quatrième ordre. (17-27).

L'auteur prend pour point de départ la génération des courbes par des faisceaux projectifs de droites et de coniques.

Zeuthen (*H.-G.*). — Exercices de Statique graphique. (27-53).

L'article contient quarante-deux questions demandant la construction, par la règle et le compas, de polygones funiculaires appartenant soit à un système donné de forces, soit à un système de forces en partie inconnu. Dans le premier cas le polygone doit satisfaire à trois conditions données, dans le second à un plus grand nombre de conditions.

Les questions sont accompagnées des considérations théoriques dont dépend leur solution, ainsi que celles de classes assez générales de questions semblables. On se sert de l'homologie des figures formées, dans certains cas très-simples, de deux côtés d'un polygone funiculaire variable, ou de la réciprocité de ces figures et de celle que forme le pôle correspondant au polygone, etc.

Smith (*H.-J.-St.*). — Sur l'état actuel et sur les perspectives de certaines branches des Mathématiques pures. (65-96).

Traduction en danois d'un discours imprimé dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*.

Crone (*C.*). — Sur la distribution des vingt-huit tangentes doubles aux soixante-trois systèmes de coniques quatre fois tangentes aux courbes générales du quatrième ordre. (Second article; 97-109 et 151-153).

Dans le premier article (*Tidsskrift*, 1876), l'auteur n'avait eu égard qu'aux tangentes doubles réelles; dans le présent article il distingue aussi les différentes tangentes doubles imaginaires et en montre la distribution aux soixante-trois systèmes de coniques. Il a égard à toutes les formes possibles de la courbe. (Ses recherches ont été publiées plus tard dans le Tome XII des *Mathematische Annalen*.)

---

(1) Voir *Bulletin*, I_2, 207.

Thiele (*T.-N.*). — Théorèmes sur un problème de l'Astronomie théorique. (109-113).

Le même article a été publié dans le Bulletin de l'Académie de Stockholm.

Tychsen (*Camillo*). — Lagrange. (129-143).

Historique de la vie et de l'œuvre du grand géomètre.

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur les extensions successives des définitions dans l'Algèbre élémentaire. (144-151).

Zeuthen (*H.-G.*). — Exemples de systèmes articulés variables. (161-174).

Tome II; 1878.

Lorenz (*L.*). — Sur la suite des nombres premiers. (1-3).

Soit $\varphi(n)$ le nombre de nombres premiers $\leqq n$, et soit p un nombre premier: alors $\varphi(p)$ se détermine avec une approximation notable par l'équation

$$\frac{d}{dp}\log[\varphi(p^2)-\varphi(p)] = \frac{2-\varphi''(p)}{p}.$$

Juel (*C.*). — Démonstrations géométriques et élémentaires. (4-13).

L'auteur réduit les démonstrations des théorèmes de Newton, Carnot et Pascal sur les coniques à l'usage de triangles semblables.

Petersen (*Julius*). — Démonstration d'un théorème de Jacobi. (14-15).

Simplification de la démonstration du lemme de Jacobi qui conduit, dans la théorie des fonctions abéliennes de Clebsch et Gordan, au théorème d'Abel.

Zeuthen (*H.-G.*). — Squelette d'une théorie géométrique et élémentaire des sections coniques. (33-54; 65-76; 109-124; 132-148).

L'article, qui est le résumé d'un Cours professé à l'Université, se compose des sections suivantes : lemmes; définitions et propriétés fondamentales; constructions et théorèmes sur les tangentes; constructions de coniques et théorie des coniques confocales; directrices; diamètres de l'ellipse et de l'hyperbole; applications d'une transformation et étude de propriétés particulières à l'ellipse ou à l'hyperbole; diamètres de la parabole; sections planes d'un cône droit; théorèmes de Pascal et de Brianchon; sections d'un cône oblique; pôles et polaires; addition sur les coniques confocales.

Le point de départ de la théorie est la définition des trois coniques par leurs propriétés focales. Les propriétés des tangentes résultent d'une discussion de la construction d'un cercle passant par un point donné, tangent à un cercle donné et

ayant le centre sur une droite donnée. Les propriétés variées des foyers et des tangentes conduisent à celles des directrices et diamètres, sans qu'on se serve d'autres moyens que ceux que présente la Géométrie plane la plus élémentaire; mais, pour démontrer les théorèmes de Pascal et de Brianchon et les propriétés polaires, on fait usage de considérations stéréométriques.

Le but de l'auteur a été le même que celui de Steiner dans ses Leçons publiées par M. Geiser sous le titre de *Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung;* mais la voie suivie en diffère, à un petit nombre de démonstrations près.

Thiele (*T.-N.*). — Remarques sur les courbes d'erreur asymétriques. (54-57).

Buchwaldt (*F.*). — Sommation de séries. (76-93).

L'auteur trouve les formules approximatives

$$\sum_{r=s}^{r=\infty} y_r = y_\infty^{(-1)} - \frac{1}{2}\left[y_{s-1}^{(-1)} + y_s^{(-1)}\right] - \frac{1}{6}(y_{s-1} - y_s) - \frac{1}{180} y_s^{(3)} + \frac{1}{360} y_s^{(4)} + v_s,$$

$$v_s = -\frac{1}{960}\left[y_{s-2}^{(5)} + y_{s+2}^{(5)}\right] + \frac{1}{2880}\left[y_{s-1}^{(6)} + y_{s+1}^{(6)}\right].$$

où

$$y_r^{(n)} = \frac{d^n y_r}{dr^n}, \quad y_r^{(-1)} = \int y_r\, dr:$$

la valeur numérique de l'erreur est plus petite que v_s. Application au cas de $y_r = (a+r)^{-n}$.

Pechüle (*C.*). — Urbain Le Verrier. (93-96).

Bäcklund (*A.-V.*). — Solution d'un problème de contact dans la théorie des systèmes linéaires de surfaces. (97-106).

En exemple des résultats trouvés dans cet article, qui est une addition à un Mémoire étendu du même auteur sur les surfaces géométriques (*Mémoires de l'Académie Royale Suédoise*, vol. IX, n° 9, 1871), nous citerons le suivant : « Le lieu des points de contact quatre-ponctuels d'une surface C_m d'ordre m avec des courbes d'intersection des surfaces d'un système linéaire d'ordre n et d'une infinité triple est la courbe d'intersection de C_m avec une surface d'ordre $11m + 20n - 44$.

Petersen (*Julius*). — Théorèmes sur les surfaces du second ordre. (107-108).

Johnsen (*S.-N.*). — Détermination du facteur rendant intégrable l'équation

$$s + Gpq + Rp + Sq + T = 0,$$

où G, R, S, T sont des fonctions de x, y, z, et où $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$, $s = \frac{d^2 z}{dx\,dy}$. (129-132).

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Sur la solution élémentaire d'équations fondamentales. (149-155).

Bie (*L.-H.*). — Sur les congruences et leur application dans l'analyse indéterminée. (161-178).

Petersen (*Julius*). — Théorèmes géométriques. (178-180).

Hansted (*Birger*). — Théorème sur les fractions décimales purement périodiques. (180-183).

Steen (*A.*). — Sur le calcul des sommes des puissances des *n* premiers nombres. (183-188).

Steen (*A.*). — Réduction d'un probléme de Mécanique à quadrature. (188-192).

L'auteur indique une nouvelle intégration des équations d'Euler servant à déterminer le mouvement d'un corps invariable qui n'est soumis à aucune force.

FORHANDLINGER i VIDENSKABS-SELSKABET i CHRISTIANIA (¹).

Année 1874.

Mohn (*H.*). — Température de l'air à l'intérieur et à l'extérieur de Christiania, avec ses variations avec la hauteur dans les mêmes lieux. (28-73).

Mohn (*H.*). — Contribution à la climatologie et à la météorologie de la mer Glaciale orientale. (74-106).

Lie (*S.*). — Théorie générale des équations aux différentielles partielles du premier ordre. (198-226; all.).

§ 1. Résolution d'un problème auxiliaire : « Trouver tous les systèmes d'équations de la forme

$$f_k(x_0, x_1, \ldots, x_n, \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n) = 0, \quad (k = 0, 1, \ldots, \omega)$$

en vertu desquels la relation différentielle

$$\pi_0 dx_0 + \pi_1 dx_1 + \ldots + \pi_n dx_n = 0$$

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 90.

a lieu identiquement. » — § 2. Énoncé d'un problème général : « Étant données q équations de la forme $F_k(x_0, \ldots, x_n, \pi_0, \ldots, \pi_n) = 0$. de l'ordre zéro par rapport aux π, trouver de la manière la plus générale $n+1-q$ autres équations qui, jointes aux premières, satisfassent identiquement à la relation différentielle $\pi_0 dx_0 + \ldots + \pi_n dx_n = 0$. » — § 3. Deux théorèmes fondamentaux. — § 4. Théorie des solutions complètes. — § 5. Systèmes en involution. Leur intégration. — § 6. Réduction du problème général à celui que l'on vient de résoudre.

Lie (*S.*). — Sur la théorie du facteur d'intégrabilité. (242-254; all.).

§ 1. Transformations infinitésimales d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. — § 2. La connaissance d'une transformation infinitésimale d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre est équivalente à un facteur d'intégrabilité. — § 3. Interprétation géométrique du facteur d'intégrabilité.

Lie (*S.*). — Généralisation et nouvelle appréciation de la théorie du multiplicateur de Jacobi. (255-274; all.).

§ 1. Transformations infinitésimales d'un système complet. — § 2. Réduction du problème. — § 3. Multiplicateur d'un système complet. — § 4. Détermination d'un multiplicateur au moyen de $n-1$ transformations infinitésimales. — § 5. Développement de la théorie pour le cas de trois variables. — § 6. Développement de quelques cas particuliers.

Année 1875.

Lie (*S.*). — Théorie générale des équations aux différentielles partielles du premier ordre. (1-15; all.).

§ 1. Développements préliminaires. — § 2. Réduction d'un système en involution à une seule équation. — § 3. Nouvelle méthode d'intégration de l'auteur.

Lie (*S.*). — Discussion de toutes les méthodes d'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre. (16-48; all.).

§ 1. Systèmes complets. Transformations infinitésimales. — § 2. Transformations infinitésimales qui laissent invariantes certaines fonctions ou certains groupes donnés. — § 3. Théorèmes auxiliaires. — § 4. Systèmes complets en relation invariante avec des fonctions ou des groupes donnés. — § 5. La méthode d'intégration de Jacobi et Mayer. — § 6. La méthode d'intégration de l'auteur. — § 7. Le meilleur mode d'appréciation des circonstances accidentelles.

Pihl (*O.*). — Sur l'attraction entre deux disques circulaires. (260-268).

L'auteur donne une Table des valeurs de l'attraction mutuelle de deux disques égaux et parallèles, de rayon $= 1000$, pour des distances variant de 0 à 20000.

Bjerknes (*C.-A.*). — Sur les forces qui se développent lorsque des corps sphériques, tout en subissant des vibrations de dilatation et de contraction, se meuvent dans un fluide incompressible. (386-400).

Année 1876.

Ce Volume ne contient aucun Mémoire de Mathématiques (¹).

Année 1877.

Guldberg (*A.-S.*). — Contribution à la théorie des équations. (40 p.).

Les racines des équations de degré supérieur au quatrième ne peuvent pas généralement s'exprimer au moyen des racines d'équations binômes de la forme $x^n - a = 0$; mais on peut ramener la résolution des équations de degré supérieur à celle de certains types normaux d'équations, moins simples que les équations binômes, mais dont la résolution peut s'effectuer plus simplement que celle de l'équation proposée. C'est la recherche de ces types qui fait l'objet du Mémoire de M. Guldberg.

Bjerknes (*C.-A.*). — Idées de Newton sur la nature, et relation de ces idées avec la question de l'existence de l'attraction à distance. (27 p.).

Année 1878.

Ce Volume ne contient aucun Mémoire de Mathématiques.

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE (²).

Tome III; 1877.

Landré (*Corn.-L.*). — Sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables. (1-20).

L'auteur démontre qu'on ne trouve pas les solutions singulières de la forme $x = a$, quand on se limite aux équations connues $\frac{d\mathfrak{F}}{dc} = 0$ et $\frac{d\mathfrak{F}}{dy} = \infty$, comme cela se trouve

(¹) A partir de ce Volume, les articles sont paginés séparément.

(²) Voir *Bulletin*, I_2, 12.

dans la plupart des Manuels (Sturm, Duhamel, etc.). Il prouve qu'on ne peut être sûr d'obtenir toutes les solutions singulières qu'en combinant les conditions $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \infty$, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \infty$. De plus, il fait voir que les deux théorèmes : 1° « Une équation différentielle exacte n'a pas de solution singulière », 2° « Le facteur d'intégrabilité d'une équation différentielle exacte devient infini pour une solution singulière », sont incomplets, parce qu'ils ne subsistent pas pour les solutions singulières $x =$ const. ou $y =$ const.

Ainsi, l'équation différentielle exacte

$$dy - \frac{dx}{2\sqrt{x-a}} = 0,$$

proposée par Grinwis, a une solution singulière $x = a$. Sa solution générale

$$y - \sqrt{x-a} = c$$

représente en effet un système de paraboles toutes tangentes à la droite $x = a$.

Bierens de Haan (*D.*). — Sur la « Théorie des fonctions de variables imaginaires », par M. Maximilien Marie (suite du t. II, p. 160). (21-32).

Moors (*B.-P.*). — Théorie de la bascule. (33-57 et 97-112).

1. Description de la bascule de Quintenz. Conditions générales. — 2. Le plan de mouvement de chaque point de la bascule doit être parallèle au plan décrit par l'axe longitudinal du fléau. — 3. Pour que l'équilibre de la bascule soit indépendant de la position du fardeau sur la plate-forme, il faut que celle-ci se meuve parallèlement à elle-même pendant les oscillations du fléau. — 4. Examen des conditions qui expriment que l'équilibre et la sensibilité ne dépendent pas de la position du fardeau, l'inclinaison du fléau étant donnée. — 5. Construction de la section principale d'une bascule dont la plate-forme se meut parallèlement à elle-même. — 6. Conditions qui expriment que la sensibilité est grande dans toutes les positions du fléau. — 7. Le frottement. Le fardeau doit être mis près de l'axe du levier qui porte la plate-forme. — 8. Influence des petites imperfections de la construction sur l'indépendance de l'équilibre et la sensibilité de la position du fardeau. — 9. Formes de bascules dont la théorie ressemble à celle de la bascule de Quintenz. — 10. Vérification des bascules de Quintenz et de Roberval.

Brogtrop (*A.-J.-M.*). — Sur le complètement de la période des fractions ordinaires. (58-59).

Korteweg (*D.-J.*). — Quadrature de la conoïde droite à base elliptique (dite de Wallis) (¹). (60-66).

Korteweg (*D.-J.*). — Remarque sur les surfaces gauches en général. (66-70).

(¹) Sujet de prix proposé par la Société.

L'auteur montre que la question de la quadrature peut toujours être ramenée à une intégration simple.

Korteweg (*D.-J.*). — Un disque à plan supérieur horizontal tourne autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire constante. Sur ce disque en mouvement on dépose sans choc une petite boule qui est fixée à l'axe par un fil flexible et inextensible tendu horizontalement. Dans la supposition que ce fil n'offre aucun obstacle au roulement de la boule, en combien de temps le frottement du disque contre la boule donnera-t-il à ce corpuscule la même vitesse angulaire que le disque continue à posséder (¹)? (70-79).

Julius (Dr *V.-A.*). — Sur le développement d'une fonction en série de cosinus. (80-83).

Wisselink (*D.-B.*). — Propriétés remarquables d'un déterminant du troisième ordre. (84-89).

Benthem (Dr *A.-Gr.*). — Théorie des fonctions de variables complexes (suite du t. II, p. 134). (113-144).

IVe Partie : Les intégrales des fonctions d'une variable complexe. — Chap. VIII : Introduction. — Chap. IX : Les intégrales de fonctions uniformes et multiformes.

Samot (*D.-J.-A.*). — La Table générale de mortalité de la Banque nationale d'assurances sur la vie. (145-162).

Michaëlis (Dr *G.-J.*). — Quelques cas particuliers du mouvement dans un fluide incompressible. (163-185).

L'auteur montre l'analogie entre les équations hydrodynamiques et celles qui déterminent les actions magnétiques d'un courant électrique. Ainsi, le potentiel de vitesse d'une sphère qui se meut d'une vitesse S dans un fluide illimité est égal à $-\frac{8\pi}{3}$ fois le potentiel magnétique de cette sphère, si elle est magnétisée avec l'intensité S dans la même direction. L'auteur considère deux cas spéciaux du mouvement de plusieurs corps dans un fluide illimité, celui de plusieurs sphères dont les rayons sont infiniment petits par rapport aux distances de leurs centres et celui de deux ellipsoïdes.

Benthem (Dr *A.-Gr.*). — La périodicité des fonctions. (186-192).

(¹) Sujet de prix proposé par la Société.

L'auteur divise les intégrales en quatre classes par rapport à la périodicité de leurs fonctions inverses.

Gravelaar (*N.-L.-W.-A.*). — Un théorème de la théorie des substitutions linéaires. (193-202).

L'auteur amplifie un théorème connu de O. Hesse en prouvant que le déterminant hessien d'une fonction entière de n variables s'évanouit identiquement, aussi bien que tous ses déterminants mineurs jusqu'à ceux de l'ordre $n-r+1$, quand la fonction peut être transformée en une fonction homogène de $n-r$ variables au moyen d'une substitution linéaire dont le déterminant diffère de zéro, et réciproquement. Il applique ses résultats à la classification des sections coniques et des surfaces quadriques.

Kapteyn (Dr *W.*). — Sur la somme des puissances égales des racines de l'équation générale du second ordre. (203-207).

Bierens de Haan (*D.*). — Sur la racine carrée d'une quantité irrationnelle à quatre termes. (208-210).

Discussion d'un manuscrit de F. van Schooten, daté du 5 décembre 1632, intitulé : « De genesi et analysi potestatum », sur la racine carrée de l'expression

$$108 - \sqrt{1200} + \sqrt{2000} - \sqrt{60}.$$

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (84-96 et 211-223).

Bibliographie mathématique et physique néerlandaise. (224).

Tome IV; 1878.

Heringa (Dr *P.-M.*). — Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires. (1-29).

Dans la première Partie, l'auteur donne une critique défavorable des théories de Laplace, Gauss et Poisson; dans la seconde, il substitue au fluide une grande quantité de boules incompressibles et fait entrevoir une théorie nouvelle sans parvenir à des résultats de précision mathématique.

Onnen (Dr *H.*). — Annotations sur la théorie des équations essentielles des courbes planes. (30-56).

L'auteur donne le nom d'*équation essentielle* d'une courbe plane à chaque équation qui exprime comment la courbure de cette courbe varie d'un point à un autre. Ayant exposé les principes de cette théorie dans une étude précédente (t. I, p. 1), il passe d'abord à son application sur les courbes cycloïdales.

1. Construction et calcul du rayon de courbure d'une cycloïdale. — 2. Son équation essentielle proprement dite. — 3. Les cycloïdales décrites par les points du

plan de la courbe génératrice dans le cas où elle touche la directrice en un point donné. Cercle d'inflexion. Courbe focale. — 4. Les cycloïdales décrites par les points d'une droite liée à la génératrice. — 5. Courbe anticycloïdale. Cycloïdales semblables engendrées par deux génératrices qui roulent sur la même directrice. — 6. Cas où la génératrice ou la directrice est un cercle ou une droite. — 7. Hypo et épicycloïdes. — 8. Points d'inflexion et sommets.

Mantel (*W.*). — Dans la recherche de la divisibilité par un nombre premier, on simplifie les nombres considérables en diminuant leur partie antérieure de leur partie postérieure après qu'on a multiplié la dernière par un coefficient convenable. Démontrer que les coefficients dont on se sert dans un système de nombres arbitrairement choisi pour éliminer un, deux, trois, etc. des derniers chiffres montrent une période dont le nombre des termes constituants est égal à celui des chiffres de la période qu'on obtient en divisant par ce même nombre premier? (57-58).

Oskamp (Dr *G.-A.*). — On a fixé en un point de la surface d'un cylindre immobile à axe horizontal l'extrémité d'un fil flexible et inextensible de longueur donnée, dont l'autre extrémité porte une sphère massive de poids connu. Le fil étant tendu dans une direction inclinée et perpendiculaire à l'axe du cylindre, on imprime au centre de la sphère une certaine vitesse dans une direction perpendiculaire au fil et à l'axe du cylindre. Déterminer la position de la sphère et la tension du fil à une époque quelconque, le fil étant enroulé un nombre entier ou fractionnaire de fois autour du cylindre au commencement du mouvement ([1]). (60-83).

Oskamp (Dr *G.-A.*). — Dans la recherche de la divisibilité, etc. ([2]). (83-94).

Bierens de Haan (*D.*). — Sur la « Théorie des fonctions de variables imaginaires », par M. Maximilien Marie (suite et fin de l'art. du t. III, p. 32.) (95-99).

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*). — Sur l'intégrale $\int_0^1 l\Gamma(x+u)\,du$. (100-104.)

---

[1] Sujet de prix proposé par la Société.

[2] Voir la même question à l'article *Mantel* (*W.*) de la présente page.

L'auteur fait voir qu'on peut trouver la valeur de l'intégrale au moyen de l'application immédiate de la définition ordinaire des intégrales définies. De plus, après avoir posé

$$\frac{d}{dx} l\Gamma(x) = \psi(x),$$

il discute la fonction plus générale

$$\psi(x,p) = \lim \left[\frac{n^{1-p} - 1}{1-p} - \frac{1}{x^p} - \frac{1}{(x+1)^p} - \ldots - \frac{1}{(x+n-1)^p} \right],$$

où

$$n = \infty, \quad p > 0 \quad \text{et} \quad x > 0.$$

Gravelaar (*N.-L.-W.-A.*). — Sur une certaine équation. (113-124).

L'auteur montre que les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_{n1} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - x & \ldots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - x & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \\ b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1m} & b_{2m} & \ldots & b_{nm} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

sont toutes réelles.

De Roos (*J.-D.-C.-M.*). — Sur la transmission de mouvement par bielle et manivelles inégales. (125-150).

L'auteur montre que les courbes de Watt décrites par un point lié invariablement à la bielle peuvent être engendrées par trois systèmes différents; ensuite il s'occupe des courbes qu'on obtient par la transformation d'une conique aux rayons vecteurs réciproques.

Michaëlis (Dr *G.-J.*). — Remarques sur les théories des phénomènes électrodynamiques proposées par Weber, Riemann et Clausius. (151-181).

Schoute (Dr *P.-H.*). — Sur la génération d'une courbe au moyen de faisceaux projectifs. (182-194).

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur la rectification approximative d'un arc de cercle. (200-204).

Van Geer (Dr *P.*). — Sur la « Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, zweite Auflage », du Dr E. Dühring. (205-217).

La première Partie donne un aperçu de la première édition de l'Ouvrage cité (1872); la seconde Partie traite des amplifications contenues dans la seconde édition (1875) et du scandale à l'Université de Berlin, dont M. Dühring était le centre.

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (105-112 et 218-224).

Tome V; 1879.

Onnen (Dr *H.*). — Annotations sur la théorie des équations essentielles des courbes planes (suite du t. IV, p. 56). (1-34).

9. Considérations géométriques. — 10. Considérations analytiques. — 11. Les courbes intermédiaires. — 12. Les différentes espèces des courbes cycloïdales.

Samot (*D.-J.-A.*). — Les principes de la science de l'assurance sur la vie. (35-46).

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur une question de la théorie des nombres. (47-57).

L'auteur donne les seize solutions de la question suivante : « Trouver trois nombres, chacun de deux chiffres, dont le produit soit formé des six chiffres qui composent les trois nombres (par exemple, $72 \times 46 \times 89 = 294768$, etc.) ».

Kamerlingh Onnes (*H.*). — Sur le mouvement relatif. (58-121 et 135-186).

Chap. I. Application des méthodes d'Hamilton-Jacobi sur la théorie du mouvement relatif. — 1. La fonction des forces de Schering par rapport aux forces additionnelles de Coriolis; les équations différentielles canoniques et la fonction caractéristique du mouvement relatif. — 2. Autre déduction des équations différentielles canoniques du mouvement relatif. Exemple de deux fonctions des forces de Schering pour les mêmes forces. — 3. La fonction perturbatrice du mouvement relatif. Extension des équations perturbatrices de Schering. — 4. Sur le principe du dernier multiplicateur dans le mouvement relatif.

Chap. II. Les phénomènes qui chez le mouvement relatif remplacent les figures de Lissajous du mouvement absolu. — 1. Les éléments canoniques des figures de Lissajous. Équations différentielles et intégrales des éléments troublés. — 2. Construction des trajectoires. Position du point dans la trajectoire. — 3. Distinction des cas les plus remarquables. — 4. Cas limites. — 5. Rapport au mouvement non troublé.

Chap. III. Applications du Chapitre précédent. Sur quelques questions par rapport au pendule d'après la méthode d'Hamilton-Jacobi. — 1. Expériences de Foucault sur les vibrations d'une tige dont une des extrémités est fixée à un axe tournant. — 2. Mouvements infiniment petits d'un corps solide dont un point reste immobile sous l'action de la pesanteur, en ne tenant pas compte de la rotation de la Terre. — 3. Solution du même problème en tenant compte de la rotation de la Terre. — 4. Preuves nouvelles de la rotation de la Terre. — 5. Sur les mouvements finis, mais très petits, du pendule à suspension à la Cardan. — 6. Sur les mouvements finis, mais très petits, du pendule à suspension libre. — 7. Solution des

questions précédentes dans un cas plus simple. — 8. Sur une erreur de Hansen. — 9. Sur la formule de Bravais.

Gravelaar (*A.-W.*). — Les formules fondamentales de la goniométrie. (187-190).

Frowein (*P.-C.-F.*). — Sur une formule connue de Clausius. (191-197).

L'auteur veut remplacer l'expression $l = \frac{3}{4}\frac{\lambda^3}{\pi\rho^2}$ par

$$l = \frac{\lambda}{\text{log. nat.}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \pi\rho^2}\right)}.$$

Schouten (Dr *G.*). — Trouver le temps pendant lequel un corps pesant descend, le long d'une chaînette, d'un des points de suspension jusqu'au point le plus bas, en tenant compte du frottement du corps le long de la chaînette et de la résistance de l'air, la dernière étant proportionnelle au carré de la vitesse. (198-202).

Brogtrop (*A.-J.-M.*). — Sur le nombre des chiffres contenus dans les périodes des fractions. (203-204).

Landré (*Corn.-L.*). — Sur les enveloppes d'un système de courbes. (205-208).

Considération du cas où l'équation $F(x, y, c) = 0$ est résolue par rapport au paramètre variable c.

Bierens de Haan (Dr *D.*). — Sur la réduction de puissances égales. (208-210).

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (122-134).

P.-H. Schoute.

MATHEMATISCHE ANNALEN, begründet von A. Clebsch und C. Neumann, gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer ([1]).

Tome XIII; 1878.

Westphal (*G.*). — Sur le système simultané de deux formes qua-

([1]) Voir *Bulletin*, III_2, 14.

ternaires du second degré, et sur une représentation algébrique générale, à l'aide de paramètres, des courbes de quatrième ordre, $p=1$. (1-19).

Mayer (A.). — Sur l'expression la plus générale des forces potentielles intérieures d'un système de points matériels en mouvement, déduite du principe de l'égalité de l'action et de la réaction. (20-34).

Le problème posé s'énonce ainsi, au point de vue analytique : « Quelles sont les formes les plus générales des forces

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} X_i = \dfrac{\partial W}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial x'_i}, \\ Y_i = \dfrac{\partial W}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial y'_i}, \\ Z_i = \dfrac{\partial W}{\partial z_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial z'_i} \end{cases}$$

lorsqu'on demande que W soit une fonction du temps, des coordonnées et des vitesses telles que les six conditions

$$(\mathrm{II})\qquad \sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} Z_i = 0,$$

$$(\mathrm{III})\quad \sum_{i=1}^{i=n}(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n}(z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n}(x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$

soient identiquement vérifiées. » Les recherches de l'auteur l'ont conduit aux résultats suivants :

1° Pour que les conditions (II) soient identiquement vérifiées, il faut que W soit une fonction arbitraire du temps, des coordonnées relatives et des vitesses relatives des points du système.

2° Les conditions (III) exigent que W soit une fonction arbitraire du temps, des distances mutuelles des points et de leurs distances à l'origine des coordonnées, ainsi que des dérivées premières de ces deux sortes de distances par rapport au temps.

Si l'on veut encore que le principe des forces vives soit vérifié, il faudra que le potentiel W soit indépendant du temps.

De ces propositions résulte, pour le cas le plus simple, le théorème suivant :

« Si l'on admet comme axiome que les forces exercées par deux points matériels l'un sur l'autre pendant leur mouvement ont un potentiel, et doivent satisfaire à la fois au principe de l'égalité de l'action et de la réaction et aux conditions du principe des forces vives, il en résulte que les deux points s'attirent ou se repoussent, suivant la direction de la droite qui les joint, avec une force R dont l'expression

analytique est de la forme

$$R = \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'},$$

W étant une fonction de la seule distance r des deux points et de sa dérivée r'. »

Weber (*H.*). — Sur certains cas d'exception qui se rencontrent dans la théorie des fonctions abéliennes. (35-48).

Dans la représentation des fonctions abéliennes au moyen des fonctions ϑ, que l'auteur a traitée en détail, pour le cas particulier de $p = 3$, dans sa monographie intitulée *Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht* 3 ([1]), on rencontre, ainsi que Riemann l'a fait voir dans son Mémoire sur ce sujet, des relations particulières quand les fonctions

$$\vartheta\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - e_h\right)\right]$$

s'annulent identiquement. Dans le travail actuel, l'auteur traite des propriétés des fonctions abéliennes dans l'hypothèse générale que, pour un nombre quelconque m, une fonction

$$\vartheta\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,m-1}^{i}\int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h \pm \frac{1}{2}\varpi_h\right)\right]$$

s'annule identiquement (pour toutes les valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{m-1}$). *Dans ce cas, à la caractéristique ϖ correspond un système entier de fonctions abéliennes, formant des expressions linéaires et homogènes à coefficients arbitraires de m semblables fonctions.* La réciproque de cette proposition est vraie aussi.

L'auteur applique ce théorème aux fonctions hyperelliptiques, en indiquant pour les diverses classes de fonctions abéliennes le nombre des systèmes qui peuvent se présenter. Il montre ensuite que, pour $p = 3$, l'évanouissement d'une fonction ϑ paire pour une valeur nulle de l'argument détermine déjà la classe des fonctions comme étant hyperelliptique, tandis que, pour $p = 4$, par la dégénérescence de deux systèmes de fonctions abéliennes, la classe des fonctions devient elliptique, ce qui entraîne l'évanouissement de huit autres fonctions ϑ paires.

Harnack (*Ax.*). — Remarques concernant la Géométrie sur une surface réglée du quatrième ordre [Complément au Mémoire de l'auteur, *Math Annalen*, t. XII, p. 47 ([2])]. (49-52).

Mayer (*A.*). — Les criteriums du maximum et du minimum des intégrales simples dans les problèmes isopérimétriques. (53-68).

Voir le *Repertorium* de Königsberger, t. II, p. 65.

([1]) Berlin, 1876.

([2]) Voir *Bulletin*, III_2, 145.

Bäcklund (*A.-V.*). — Sur les équations aux différentielles partielles d'ordre supérieur possédant des intégrales premières intermédiaires. (69-108).

Voir le *Repertorium* de Königsberger, t. II, p. 197.

Brioschi (*F.*). — Sur la résolution des équations du cinquième degré. (109-160).

Dans ce Mémoire, l'auteur a rassemblé ses recherches devenues célèbres sur les équations du cinquième degré, et il en indique la correspondance avec les travaux des autres géomètres sur le même sujet.

Ire Section. Les équations du multiplicateur dans la transformation des fonctions elliptiques.

IIe Section. Les propriétés des équations de Jacobi du quatrième et du sixième degré.

IIIe Section. L'abaissement de l'équation du sixième degré de Jacobi.

IVe Section. Les résolvantes de Malfatti, de Ruffini et de Cayley.

Ve Section. Sur la résolvante de Kronecker.

Voss (*A.*). — Sur certains déterminants. (161-167).

L'auteur considère un déterminant de $n+r+1$ lignes D_{r+1}, formé avec n fonctions binaires homogènes de même ordre et avec leurs dérivées, et s'annulant pour $n=r$. Si D_n s'annule, il existera entre les fonctions une relation linéaire à coefficients constants; si D_{n-1} s'annule (et par suite aussi D_n), il existera entre les coefficients une relation quadratique homogène; si enfin D_{n-2} s'annule, on aura alors deux relations linéaires homogènes différentes de même nature que ci-dessus, et les premiers déterminants mineurs de D_n seront tous nuls.

Voss (*A.*). — Sur quatre tangentes à une courbe gauche du troisième ordre. (168-174).

Quatre droites données dans l'espace ne peuvent être tangentes à une courbe gauche du troisième ordre que si elles appartiennent à un complexe de droites du quatrième degré. Dans cette hypothèse, il existe alors ∞^1 courbes de cette espèce, et les tangentes des ∞^3 courbes ayant trois tangentes fixes touchent l'hyperboloïde de ces droites le long de deux génératrices fixes que l'on peut appeler le couple hessien de ces tangentes.

Brill (*A.*). — Sur la courbe hessienne. (175-182).

Cette Note est consacrée à l'étude des propriétés du système de points d'intersection de la courbe hessienne H d'une courbe algébrique f en un point multiple de celle-ci, et à la détermination des propriétés que doit posséder une fonction p pour satisfaire à l'identité $H=\alpha\varphi+\beta f$ dans le voisinage du point correspondant.

Bobylew (*D.*). — Sur la distribution de l'électricité sur des conducteurs composés de parties hétérogènes. (183-231).

M. Bobylew calcule la distribution des fluides électriques libres sur un conducteur formé de plusieurs parties hétérogènes. Dans son introduction, il établit les

conditions générales de l'équilibre électrique : il faut que le potentiel de toute l'électricité libre à l'intérieur de chaque partie homogène ait une valeur constante; de plus, il faut que, dans le passage d'une partie homogène à une autre, la valeur de ce potentiel éprouve, à la surface de séparation, un saut brusque déterminé; la grandeur de ce changement brusque dépend seulement de la nature des deux substances et de la température. On peut satisfaire à ces conditions de l'équilibre électrique en admettant sur la surface externe du conducteur hétérogène une couche électrique simple, et au contraire, sur les surfaces de séparation où se touchent les parties hétérogènes, une double couche électrique, analogue à la double surface magnétique. Alors, sur les lignes de séparation où les surfaces de séparation rencontrent la surface extérieure, l'épaisseur électrique est nécessairement infinie.

M. Bobylew établit maintenant un tel potentiel pour le cas où le conducteur hétérogène a la forme d'une sphère et se compose de deux parties qui sur la surface sphérique extérieure ont pour limite commune un cercle. Il y parvient en faisant usage des coordonnées dont s'est servi M. Mehler dans son Mémoire sur la distribution de *l'électricité statique sur un corps limité par deux calottes sphériques* (1).

L'auteur applique ensuite sa formule à la détermination de l'état d'équilibre électrique sur une colonne galvanique non fermée, dont la surface extérieure a la forme sphérique, puis à la détermination de l'état d'équilibre sur deux conducteurs hétérogènes et de leur mutuelle action électrostatique ; ces conducteurs sont une sphère pleine et une couche sphérique limitée par deux surfaces sphériques concentriques, et chacun d'eux est formé de deux parties homogènes qui se touchent suivant un plan passant par le centre des sphères.

Voss (*A.*). — Sur les courbes gauches et les surfaces développables. (232-248).

Pour qu'une droite coupe deux tangentes voisines d'une courbe gauche, il faut qu'elle soit une droite rencontrant la courbe ou une tangente à sa surface développable. L'équation de la courbe en coordonnées de lignes est donc représentée par un discriminant, qui, en vertu de l'identité entre les coordonnées homogènes de la droite, doit se décomposer en deux facteurs rationnels. Ces circonstances s'expliquent algébriquement sur les courbes rationnelles; en particulier, l'étude de la courbe rationnelle du troisième ordre R_3 fournit l'occasion d'interpréter géométriquement le système de formes des formes quadratiques.

Netto (*E.*). — Nouvelle démonstration d'un théorème fondamental de la théorie des substitutions (249-250).

Nouvelle démonstration du théorème de Cauchy généralisé par M. Sylow (2) : « Si l'ordre d'un groupe est divisible par une puissance d'un nombre premier, le groupe en contient un autre de l'ordre de cette puissance. »

Du Bois-Reymond (*P.*). — Note sur la convergence d'intégrales dont l'argument ne s'annule pas. (251-254).

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 68.

(2) *Mathematische Annalen*, t. V.

Un exemple de convergence absolue et sans changement de signe de l'argument, qui ne s'annule pas, est fourni par l'intégrale

$$\int^{\infty} d\alpha\,.\,\alpha e^{-\alpha^6 \sin^2 \alpha}.$$

Cette intégrale converge, tandis que $\alpha e^{-\alpha^6 \sin^2 \alpha}$, pour α positif, est positif, et, pour $\frac{\alpha}{\pi}$ égal à un nombre entier, prend la valeur α.

L'auteur fait voir que ce fait est un cas particulier du théorème général suivant : « Si, en désignant par $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$ des fonctions qui deviennent infinies avec α sans maxima, l'intégrale

$$\int^{\infty} d\alpha \frac{\varphi(\alpha \pm a)}{\sqrt{\psi(\alpha)}}$$

converge pour des valeurs de a assez petites; l'intégrale

$$\int^{\infty} d\alpha\,\varphi(\alpha) e^{-\psi(\alpha)\sin^2 \alpha}$$

sera aussi convergente. »

Neumann (*C.*). — Recherches sur le potentiel logarithmique et le potentiel newtonien. (255-300).

Analyse faite par l'auteur de son Livre, publié à Leipzig, 1877, XVI-368 p.

Cremona (*L.*). — Sur les hexaèdres polaires dans les surfaces du troisième ordre. (301-304).

Si l'on a

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0,$$

l'équation

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0$$

pourra s'écrire sous chacune des *dix* formes

$$(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + (x_4 + x_5)(x_5 + x_6)(x_6 + x_4) = 0,$$

. . . .

Ces formes représentent les dix couples de trièdres conjugués qui appartiennent à un hexaèdre complet. Un tel hexaèdre est polaire [1] et correspond à un *double six* (Schläfli). Pour la surface, il existe trente-six hexaèdres; si l'un d'eux, $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$, est donné, les trente-cinq autres dépendent d'une équation quadratique. Le problème de ramener l'équation de la surface à une somme de six cubes exige la résolution d'une équation cubique. Chaque hexaèdre détermine une développable de troisième classe, tangente aux six plans; maintenant, comme deux de ces développables ont cinq plans tangents communs, alors, pour une surface sur laquelle les vingt-sept droites sont connues, les hexaèdres conduisent à une construction du *pentaèdre de Sylvester*. Au moyen de la développable, cette construction devient identique à ce problème : « Déterminer les cinq points communs d'intersection

---

[1] Reye, *Journal f. Mathem.*, t. 78.

de deux courbes planes du troisième ordre ayant un point double et dont chacune passe par le point double de l'autre. »

Lüroth (*J.*). — Sur les groupes de points projectifs cycliquement dans le plan et dans l'espace. (305-319).

Problème. — « Dans le plan ou dans l'espace, déterminer n points réels $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ de manière qu'il existe des transformations projectives du plan (ou de l'espace) qui changent a_1 en a_2, a_2 en a_3, ..., a_n en a_1. »

L'auteur détermine d'abord ceux des éléments qui ne changent pas dans une pareille transformation, et il obtient alors, pour la situation des groupes, les résultats suivants :

Dans le plan, un groupe projectif cycliquement de cinq points au moins ne peut être situé que sur une droite ou sur une conique.

Dans l'espace, un groupe projectif cycliquement de six points au moins peut être situé ou sur un plan, ou sur deux plans et en même temps sur deux cônes (n droites), ou sur un hyperboloïde à une nappe.

Voss (*A.*). — Sur la théorie des substitutions orthogonales. (320-374).

On entend ici par *substitutions orthogonales* les substitutions (réelles ou imaginaires) qui transforment en elle-même une forme quadratique $\sum_1^n x_i^2$. L'auteur étudie à ce point de vue les cas particuliers de ces substitutions, d'après la nature de leur équation caractéristique, et fait voir en même temps comment des substitutions générales peuvent être composées au moyen de substitutions plus simples, d'un caractère désigné d'avance. La relation avec certaines représentations sur lesquelles sont fondées ces considérations générales est développée en particulier pour les substitutions qui transforment en eux-mêmes un couple de points, une conique, une surface du second ordre ou enfin l'espace linéaire.

Gordan (*P.*). — Sur la résolution des équations du cinquième degré. (375-404).

Oppolzer (*Th. v.*). — Sur quelques relations entre les sommes de combinaisons des carrés des carrés des nombres pairs et impairs. (405-410).

Le produit suivant, dans lequel on désigne par n un nombre quelconque et par d un nombre entier et positif,

$$(1)\quad P_{(d-1)} = [n+(d-1)][n+(d-2)]\ldots(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)[n-(d-2)][n-(d-1)],$$

étant ordonné suivant les puissances de n, prend la forme

$$(2)\quad P_{(d-1)} = \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{n^{p-1}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p}[2^2, 4^2, \ldots, (2d-2)^2],$$

le symbole C représentant la somme des combinaisons sans répétition des éléments renfermés entre crochets pour la classe $(d-p)$. Si l'on pose $n = m + \frac{1}{2}$, $P_{(d-1)}$ prendra la forme

$$(3) \qquad P_{(d-1)} = \left[m + \left(d - \frac{1}{2}\right)\right] \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{m^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p}[1^2, 3^2, \ldots, (2d-3)^2],$$

ou

$$(4) \qquad P_{(d-1)} = (n + d) \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p}[1^2, 3^2, \ldots, (2d-3)^2].$$

Si l'on égale entre elles les expressions (2) et (4), on obtient une multitude de relations particulières entre les sommes de combinaisons, cette équation subsistant pour toutes les valeurs de n, et par suite les coefficients des diverses puissances de n devant être égaux de part et d'autre. De plus, par des différentiations et des intégrations répétées par rapport à n, on trouve des relations qui sont importantes pour le calcul des coefficients numériques dans le calcul des intégrales.

Bäcklund (*A.-V.*). — Sur la théorie des caractéristiques des équations aux différentielles partielles du second ordre. (411-428).

L'auteur donne une extension de la théorie connue des caractéristiques des équations aux différentielles partielles du second ordre à deux variables indépendantes aux équations aux différentielles partielles du second ordre à n variables indépendantes.

Schubert (*H.*). — Les nombres fondamentaux et les dégénérescences des courbes cubiques planes de genre zéro. (Deuxième Partie des « Contributions à la Géométrie numérique ». Voir *Mathematische Annalen*, (t. X, p. 1-116). (429-539).

La Section IV traite de la détermination des nombres, fondée par Chasles et par Zeuthen, et dans laquelle on ramène le nombre des figures supérieures aux nombres des figures plus simples. Cette réduction est éclaircie par des exemples; en particulier, on obtient, d'après cette méthode, l'extension des nombres de Zeuthen pour les systèmes de courbes planes situés dans un plan fixe aux systèmes de courbes planes dans l'espace.

La Section V détermine les nombres des courbes cubiques planes à point de rebroussement, et la Section VI les nombres des courbes cubiques planes à point double.

Koenigsberger (*L.*). — Réduction du problème de transformation des intégrales hyperelliptiques. (540-547).

Dans le *Journal de Crelle*, t. 81, l'auteur a indiqué des relations qui existent entre les différentielles des intégrales hyperelliptiques de première espèce lorsque, entre des intégrales hyperelliptiques d'ordre différent, il existe une relation quelconque linéaire par rapport aux intégrales et à coefficients constants. Ces relations sont encore simplifiées dans le présent Mémoire et sont mises sous une forme qui

est importante pour l'étude de la réductibilité des intégrales hyperelliptiques d'ordre quelconque à des intégrales de même espèce d'ordre inférieur.

Soient

$$\int^{z_1} f\left[z, \sqrt{R(z)}\right] dz \quad \text{et} \quad \int^{y} F\left[y, \sqrt{R_1(y)}\right] dy,$$

où

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_{2\nu+1})},$$

$$\sqrt{R_1(y)} = \sqrt{(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\dots(y-\alpha_{2\sigma+1})},$$

les intégrales hyperelliptiques qui entrent dans la relation indiquée; on aura les équations

$$\frac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{2F_0(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\frac{y_1\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{y_\sigma\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{2F_1(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{y_1^{\sigma-1}dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^{\sigma-1}dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{y_\sigma^{\sigma-1}dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{2F_{\sigma-1}(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}.$$

Ici $y_1, y_2, \dots, y_\sigma$ sont les racines d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de z_1.

$$\sqrt{R_1(y_1)},\ \sqrt{R_1(y_2)},\ \dots,\ \sqrt{R_1(y_\sigma)}$$

peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles des quantités y correspondantes et de z_1, multipliées par $\sqrt{R(z_1)}$.

Lüroth (*J.*). — Nouvelle démonstration de ce théorème, que toute courbe du quatrième ordre n'est pas inscriptible dans un quintilatère. (548-554).

Harnack (*Ax.*). — Sur une propriété des coefficients de la série de Taylor. (555-558).

Résultat. — Tout terme de la série de Taylor, considéré en lui-même, a la propriété de fournir avec le plus petit *écart* (*Abweichung*) possible, sur tous les cercles concentriques décrits de l'origine comme centre à l'intérieur du cercle de convergence, une représentation de la fonction par *une seule* puissance de la variable.

Par *écart* (erreur) l'auteur entend l'intégrale de la norme de la différence entre les valeurs de la fonction et de la puissance, prise le long de la circonférence du cercle.

Grassmann (*H.-E.*). — Sur la théorie des rayons réciproques. (559-560).

Cayley (*A.*). — Un théorème sur les groupes. (561-565; angl.).

Meutzner (*P.*). — Théorèmes sur les polygones réguliers. (566-570).

L'auteur démontre le théorème suivant, étroitement lié avec le théorème de Stewart : « Si l'on abaisse, des sommets d'un polygone régulier inscrit ou des points de contact d'un polygone régulier circonscrit à un cercle de rayon R, et ayant m côtés, des perpendiculaires sur une droite, la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances de ces perpendiculaires ($n < m$) est égale à

$$m(v^n + AR^2v^{n-2} + BR^4v^{n-4} + CR^6v^{n-6} + \ldots),$$

v étant la distance de la droite au centre du cercle et les coefficients ayant pour valeurs

$$A = \frac{n(n-1)}{2^2},$$

$$B = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.4^2},$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^2.4^2.6^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour n impair, la droite doit être extérieure au polygone.

Neumann (*C.*). — Sur la composition des accélérations produites suivant la loi de Weber. (571-572).

Extrait des *Berichte der königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, 11 mars 1878.

Neumann (*C.*). — Sur la théorie de la représentation conforme d'une surface plane sur une surface circulaire. (573-574).

Extrait des *Berichte der königl. Sächs. Ges. d. Wiss.*, 30 juillet 1877.

La fonction par laquelle la partie infinie d'une courbe qui s'étend à l'extérieur d'une courbe fermée est représentée sur une surface circulaire de rayon arbitraire, de manière qu'au centre de ce cercle corresponde un point déterminé α du plan, est interprétée au moyen du potentiel logarithmique d'une unité de masse concentrée au point α et d'une distribution équipotentielle de la masse sur la courbe qui limite l'aire.

Prix proposé par la Société Jablonowski, à Leipzig, pour l'année 1881.

« Étudier le mouvement de la comète d'Encke, en ayant égard à toutes les forces perturbatrices qui peuvent exercer une influence, provisoirement du moins, dans l'intervalle de temps écoulé depuis l'année 1848. »

Ax. H.

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB. Udgivet af Sophus LIE, Worm MÜLLER og G.-O. SARS. Kristiania (¹).

Tome II; 1877.

Lie (*S.*). — Nouvelle méthode d'intégration de l'équation de Monge et d'Ampère. (1-9; all.).

Une équation aux différentielles partielles du second ordre, de la forme

$$(1) \qquad rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

avec deux intégrales distinctes et généralement intermédiaires

$$u_1 - f(v_1) = 0, \quad u_2 - \varphi(v_2) = 0,$$

peut être ramenée à la forme

$$s = 0$$

à l'aide d'une transformation de contact convenable. On forme, d'après Bour, les deux systèmes complets dont les solutions respectives sont u_1, v_1 et u_2, v_2. Si l'on parvient à trouver *une seule* solution de chaque système, l'intégration de (1) n'exigera plus que certaines *quadratures*.

Lie (*S.*). — La théorie des perturbations et les transformations de contact. (129-156; all.).

La transformation la plus générale,

$$(1) \qquad \begin{cases} x'_k = X_k(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n), \\ p'_k = P_k(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \end{cases}$$

où $k = 1, 2, \ldots, n$, qui transforme à la fois tous les systèmes simultanés de la forme

$$(2) \qquad dx_k = \frac{dF}{dp_k}\,dt, \quad dp_k = -\frac{dF}{dx_k}\,dt$$

en des systèmes de même forme, est déterminée, suivant Jacobi et Bour, par les équations

$$(3) \qquad (X_i, X_k) = (X_i, P_k) = (P_i, P_k) = 0, \quad (X_i, P_i) = 1.$$

D'après les recherches de l'auteur sur les transformations de contact, les relations que l'on vient d'écrire déterminent en même temps le système le plus général des quantités X_i, P_i qui satisfasse à une équation de condition de la forme

$$P_1\,dX_1 + \ldots + P_n\,dX_n = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n + d\Omega.$$

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 382.

Le présent Mémoire explique la raison intime de cette dépendance entre la théorie des perturbations et celle des transformations de contact.

Si l'on veut avoir la transformation (1) la plus générale qui change *un seul* système (2) en un autre semblable, on trouve que les relations (3) ne sont pas nécessaires. Toutes les transformations qui satisfont à une telle condition sont déterminées.

Lie (*S.*). — Recherches synthétiques et analytiques sur les surfaces minima. (157-198; all.). — Contributions à la théorie des surfaces minima. (*Mathem. Annalen*, XIV, 331-416).

Si l'on prend deux courbes dans l'espace c et k, ayant un point commun p, et que l'on transporte c parallèlement à elle-même de manière qu'elle parcoure la courbe k, la surface engendrée peut aussi être produite par un mouvement de translation de k. Elle contient donc ∞^1 courbes c et ∞^1 courbes k. Par chaque point de la surface passe une courbe de chacune des deux séries. Les tangentes correspondantes de ces deux courbes sont situées harmoniquement par rapport aux deux tangentes principales qui passent par ce même point. Toute surface de cette espèce est représentée par des équations de la forme

$$x = A(t) + A_1(\tau), \quad y = B(t) + B_1(\tau), \quad z = C(t) + C_1(\tau).$$

Si l'on suppose, en particulier, que l'on ait

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0 = dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2,$$

la surface sera, d'après Monge, une surface minimum. Si les deux courbes c et k sont superposables et semblablement placées, les deux séries de courbes formeront une série irréductible. L'auteur appelle une telle surface une *surface double*.

En partant de ces considérations géométriques, l'auteur cherche à développer une théorie projective générale des surfaces minima algébriques. Parmi les résultats qu'il a obtenus, nous ne citerons ici que les suivants. Soient R le rang de la courbe c, M le degré de multiplicité du cercle sphérique sur la développable de c, et R', M' les nombres correspondants relatifs à la courbe k. Alors la classe C de la surface minimum engendrée sera égale à

$$M'(R - M) + M(R' - M').$$

Si la surface est une surface double, on aura

$$C = 2M(R - M).$$

Les nombres R et M satisfont aux relations

$$R - M \geqq 3, \qquad R - M \geqq M.$$

A l'aide de ces formules il est souvent facile de déterminer toutes les surfaces minima d'une classe donnée. Si l'on doit avoir, par exemple, C = 3, il faudra alors que l'on ait

$$C = M(R - M), \quad M = 1, \quad R = 4.$$

La surface minimum correspondante est une surface gauche de Cayley, de troisième ordre et de troisième classe, qui est cependant toujours imaginaire. Si C doit être

égal à un nombre premier quelconque, alors on aura

$$C = M(R - M), \quad M = 1.$$

Les surfaces correspondantes peuvent être indiquées dans chaque cas particulier. Si $\frac{C}{2}$ doit être égal à un nombre premier, on aura

$$C = 2M(R - M), \quad M = 1.$$

Dans ce cas aussi, il est toujours possible d'indiquer les surfaces correspondantes.

Si les ordres de c et de k sont respectivement égaux à σ et à ω, l'ordre de la surface sera égal à $\sigma\omega - \rho$, où ρ peut se calculer par une règle simple. Si c et k n'ont aucun point commun à l'infini, ρ sera égal à zéro. Il n'existe pas de surface minimum réelle dont l'ordre soit égal à l'un des nombres 2, 3, 4, 5, 7, 8. La somme de l'ordre et de la classe d'une surface minimun réelle est toujours plus grande que 14.

L'intersection avec le plan de l'infini se compose de lignes droites, que l'on obtient en joignant les points à l'infini de la courbe c avec les points correspondants de la courbe k. L'ordre d'une surface cylindrique circonscrite est égal à $M\omega + M'\sigma$. La multiplicité du plan de l'infini comme plan tangent est égale à

$$M'(R - 2M) + M(R' - 2M').$$

Lie (*S.*). — Théorie du problème de Pfaff. (338-379; all.).

La réductibilité de l'expression de Pfaff aux formes normales connues est démontrée d'une manière nouvelle et très-simple. L'auteur établit que les critériums qui distinguent les divers types de l'expression $X_1 dx_1 + \ldots + X_m dx_m$ ont été donnés pour la première fois par Grassmann dans la seconde édition de son *Ausdehnungslehre*. En outre, le Mémoire contient une exposition développée d'une méthode pour intégrer le problème de Pfaff, que l'auteur avait esquissé en 1873.

Sexe (*S.-A.*). — Sur la diminution de l'eau à la surface de la Terre. (479-487).

Tome III; 1878.

Lie (*S.*). — Petite contribution à la théorie de la surface steinérienne. (84-92; fr.).

Si l'on entend par pôle d'un plan par rapport à une conique le pôle de la droite d'intersection du plan donné avec le plan de la conique, on a ce théorème : « Le lieu du pôle d'un plan fixe par rapport à toutes les coniques situées sur une surface steinérienne de quatrième ordre et de troisième classe est en général une autre surface de même nature. Si toutefois le plan est tangent à la surface donnée, la surface engendrée sera une surface du second degré. »

« A chaque surface steinérienne de quatrième ordre et de troisième classe correspondent ainsi ∞^2 surfaces du second degré et ∞^3 surfaces steinériennes de quatrième ordre et de troisième classe. »

Ces théorèmes subsistent encore lorsque la surface donnée dégénère en une surface gauche du troisième ordre.

R. 15.

Lie (S.). — Théorie des groupes de transformations III-IV. (93-165, 375-464; all.).

Ces deux Mémoires contiennent une détermination détaillée de tous les groupes de transformations d'un plan. Le premier Mémoire détermine tous les groupes de transformations de *point*, le second tous les groupes de transformations de *contact* d'un plan. Il est toujours possible d'indiquer toutes les équations différentielles qui admettent un groupe donné. Là-dessus on peut fonder, comme l'auteur l'a déjà signalé en 1874 dans les *Nachrichten* de Göttingue, une classification des équations

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0$$

et en même temps une méthode rationnelle d'intégration de toutes les équations qui admettent un groupe de transformation.

Lie (S.). — Classification des surfaces d'après le groupe de transformations de leurs lignes géodésiques. (Programme universitaire, p. 1-45; Christiania, 1879) (¹).

L'auteur s'occupe, depuis l'année 1872, de la détermination des propriétés des équations différentielles qui restent inaltérables dans toutes les transformations analytiques de ces équations. Pour faire connaître la portée et surtout la nature de sa méthode de recherches par un exemple propre à ce but et en même temps important par lui-même, il prend l'équation différentielle des lignes géodésiques d'une surface quelconque et cherche leur groupe de transformations.

Si l'élément d'arc d'une surface est donné par l'équation

$$ds^2 = F(x, y)\, dx\, dy,$$

les lignes géodésiques seront déterminées par l'équation différentielle du second ordre

$$F\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dF}{dx}\frac{dy}{dx} - \frac{dF}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Si maintenant F est une fonction arbitraire de x et de y, cette équation n'admettra aucune transformation de points infinitésimale, c'est-à-dire que, dans ce cas général, il est impossible de donner à x et à y des accroissements

$$\partial x = \xi(x, y)\,\partial t, \quad \partial y, = \eta(x, y)\,\partial t$$

tels que chaque ligne géodésique se transforme en une pareille ligne infiniment voisine.

On se posera maintenant le problème de déterminer la quantité F le plus généralement possible, de telle sorte que l'équation différentielle des lignes géodésiques admette une transformation infinitésimale (ou même plusieurs). Il existe trois classes de surfaces qui remplissent cette condition :

1° Ou F, par l'introduction d'expressions convenables $x'(x)$, $y'(y)$ à la place

(¹) Nous reuni sous l'analyse de ce travail à celle du Mémoire précédent, auque il fait suite.

de x, y, pourra prendre la forme

(A) $$F = e^{\alpha x}\Phi(x - y), \quad (\alpha = \text{const.});$$

2° Ou F pourra prendre la forme

(B) $$y\varphi(x) + \Phi(x);$$

ici φ et Φ sont encore assujettis à vérifier deux équations différentielles qui sont intégrées dans le Mémoire;

3° Ou enfin F pourra prendre la forme

(C) $$\varphi(x + y) + \Phi(x - y);$$

ici encore φ et Φ sont déterminés en fonction de leurs arguments par deux équations différentielles ordinaires.

Si l'équation des lignes géodésiques admet plusieurs transformations infinitésimales, il existera alors deux, trois ou huit de ces transformations. Dans le dernier cas, la surface a une mesure de courbure constante. Les deux autres cas conduisent à une série intéressante de familles de surfaces, qui sont toutes déterminées. Nous citerons seulement les suivantes :

$$F = (x - y)^m, \quad F = yx + 1, \quad F = x + iy,$$

$$F = \frac{A}{(x + y)^2} + \frac{B}{(x - y)^2}.$$

Si une surface appartient à la classe (B) ou à la classe (C), la détermination de ses lignes géodésiques n'exige que des quadratures, ou, dans certains cas remarquables, de simples différentiations. Si elle appartient à la classe (A), et que α soit $\gtrless 0$, on aura alors à intégrer une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Lie (*S.*). — Sur les surfaces minima. I, II, III. (166-176, 224-233, 340-351; all.). — Contributions à la théorie des surfaces minima. II. (*Mathematische Annalen.*)

M. Henneberg a fait voir qu'une surface minimum qui a une ligne géodésique plane ne peut être algébrique que si cette ligne est la développée d'une courbe algébrique plane. Ce théorème subsiste encore si l'on considère une ligne de courbure au lieu d'une ligne géodésique. Si une surface minimum est tangente à une surface cylindrique suivant une ligne géodésique non plane, la surface sera toujours algébrique si la ligne géodésique elle-même est algébrique. La surface minimum qui est tangente à la surface développée (surface polaire) d'une courbe gauche algébrique, suivant le lieu des centres de courbure, est algébrique. Une telle surface est en même temps inscrite dans les surfaces polaires de toutes les courbes focales de la courbe gauche donnée. A toute surface minimum algébrique correspondent, dans tous les cas, ∞^4 courbes gauches algébriques dans les surfaces polaires desquelles la surface est inscrite. En particulier, il existe ∞^3 surfaces polaires qui lui sont tangentes suivant le lieu des centres de courbure.

Les cônes tangents à une surface minimum algébrique la touchent suivant ∞^3 courbes algébriques.

A ces courbes correspondent, sur la *surface de flexion* de Bonnet, les ∞^3 courbes suivant lesquelles cette surface touche les surfaces polaires dont nous venons de parler.

Tout cône algébrique est tangent à ∞^{∞} surfaces minima algébriques, que l'on peut déterminer par une même construction élégante.

Si parmi les plans tangents à une surface minimum algébrique on en choisit, suivant une loi algébrique arbitraire, un nombre simplement infini, on obtiendra toujours une développable algébrique, dans laquelle on pourra inscrire ∞^{∞} surfaces minima algébriques, qui seront susceptibles d'une construction élégante. Dans la surface polaire d'une courbe gauche algébrique, il est toujours possible d'inscrire ∞^{∞} surfaces minima algébriques.

La surface minimum la plus générale qui puisse être appliquée sur ∞^{1} surfaces semblables à elles s'obtiendra en posant

$$F(s) = (C_1 + C_2 i)\, s^{m_1 + m_2 i}.$$

Si l'on a, en particulier, $m_2 = 0$, on obtiendra, comme on sait, les surfaces minima applicables sur les surfaces de révolution.

S. L.

Geelmuyden (H.). — Sur la lumière zodiacale. (258-292, 2 pl.).

Dans la première Partie de ce travail, l'auteur examine la position de la lumière zodiacale pour un horizon donné, supposant qu'elle se tend le long de l'écliptique à une élongation donnée du Soleil. Le résultat est présenté graphiquement pour toute l'année et pour quatre latitudes, 0°, 23°27′, 45° et 60°, la planche donnant la hauteur du point de l'écliptique, qui est de 70° distant du Soleil quand celui-ci est à 16° sous l'horizon. La splendeur du phénomène est évidemment la plus grande au moment de la fin du crépuscule (ou du commencement de l'aurore), ce qui a lieu, d'après Schmidt (Athènes), quand la hauteur du Soleil est — 16°. Au reste, l'auteur incline à préférer, pour des contrées plus boréales, la valeur 18°, donnée par des observations plus anciennes.

Dans la seconde Partie, l'auteur défend cette manière de considérer la lumière zodiacale comme liée au Soleil contre une théorie de M. Serpieri (Urbino), publiée dans les Mémoires de la *Società degli Spettroscopisti italiani* et fondée sur une discussion des observations de Jones, faites en 1853-1855 dans les mers tropiques. Selon cette théorie, la lumière zodiacale est liée à la Terre. L'auteur fait voir que les conclusions de M. Serpieri sont mal fondées sur plusieurs points. Par exemple, il a évalué la durée du crépuscule astronomique à un quart d'heure, tandis qu'elle n'est jamais au-dessous de une heure quatre minutes. Contre cette théorie, l'auteur appuie l'opinion plus ancienne, mais seulement émise comme conjecture, que la lumière zodiacale est due aux météorites, illuminées par le Soleil. Il montre que la découverte célèbre de Schiaparelli, l'accord complet des orbites des météorites avec celles des comètes, donne tout ce qui est nécessaire pour la résolution du problème. La nature *zodiacale* du phénomène porte la pensée aux comètes, dont les orbites sont peu inclinées à l'écliptique, c'est-à-dire les comètes aux courtes périodes. Dès 1850 à 1877 il y a eu cent vingt-quatre apparitions de comètes connues, dont quarante-sept sont dues aux neuf comètes ayant des périodes au-dessous de huit ans; l'auteur en tire la conséquence que la fréquence des comètes vues du Soleil a été dix à onze fois plus grande dans une zone de 20° de largeur de part et d'autre de l'écliptique que partout ailleurs sur le ciel. Rien n'est donc plus naturel que de supposer la même chose pour les météorites. Pour calculer la lumière émise par un tel amas, il faut en connaître la condensation relative pour des distances diverses au Soleil. A cet effet, l'auteur applique la concordance remarquable des distances aphélies des comètes aux courtes périodes (conséquence vraisemblable de ce que les périodes actuelles sont dues à

l'action de Jupiter). Supposant que les périhélies soient distribués également dès la surface du Soleil jusqu'aux distances où ils cessent d'être périhélies, il trouve l'expression de la densité relative des météorites en deux cas extrêmes : 1° s'ils ont tous une distance aphélie commune (Q), ce qui est approximativement le cas pour les comètes aux courtes périodes, et 2° si les distances aphélies sont distribuées également entre une certaine valeur Q_0 et l'infini, savoir

$$(1)\qquad D = \frac{K}{r\sqrt{Q^2 - r^2}} \log\text{nat}\left(\sqrt{\frac{r}{Q}} + \sqrt{1 - \frac{r}{Q}}\right),$$

$$(2)\qquad D' = \frac{K'}{\sqrt{Q_0 r}}\left[1 - \alpha\frac{r}{Q_0} + \beta\left(\frac{r}{Q_0}\right)^2 - \gamma\left(\frac{r}{Q_0}\right)^3 + \ldots\right],$$

r étant la distance au Soleil, K et K' des constantes ; les coefficients ont les valeurs suivantes : $\alpha = 0{,}056$, $\beta = 0{,}115$, $\gamma = 0.018$, $\delta = 0{,}049, \ldots$ Le calcul numérique, où l'auteur a employé les valeurs $Q = 5{,}8$ (moyenne des distances aphélies des comètes à courte période) et $Q_0 = 5$, la distance de la Terre étant l'unité, montre que les valeurs de D et de D' sont presque identiques jusqu'à la distance 2 ou 2,5 et très-peu différentes jusqu'à la distance 4, et que, à cause de la prédominance du premier terme, la densité de l'amas des météorites est à peu près *inversement proportionnelle à la racine carrée de la distance au Soleil*, au moins jusqu'à la distance 3 ou 4.

Après cela vient le calcul de la quantité de lumière émise par un cône ou pyramide de cet amas, ayant le sommet à la Terre et l'unité de surface sur le ciel pour base. Employant la loi approximative de densité énoncée ci-dessus et la formule de Lambert pour l'éclat d'une planète, la forme sphérique pouvant être prise comme la moyenne de toutes les formes irrégulières des météorites, on trouve la quantité cherchée de lumière :

$$I = \frac{C}{\sin e\sqrt{\sin e}}\int_e^{\alpha_0}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\sqrt{\sin\alpha}\,\partial\alpha.$$

C étant une constante, e l'angle à la Terre, α l'angle (extérieur) au météorite du triangle formé par le Soleil, la Terre et la météorite ; α_0 est la valeur de α, peu différente de 180°, correspondant à la distance limite (R) de la loi de densité. L'effectuation de l'intégration donne, si $e \leqq 90$,

$$I = \frac{10}{9}C\left[\frac{3}{5}\left(e - \frac{\alpha_0}{R^{\frac{3}{2}}}\right) + \cot e + \frac{\frac{2K-u}{3}}{\sin^2 e} - \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}}\left(\cot\frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha_0}{5} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^4\alpha_0}{9} + \ldots\right)\right],$$

où K est l'intégrale elliptique complète de module $\sqrt{-1}$ et u la même intégrale avec la limite supérieure $\sqrt{\sin e}$. Si $e \geqq 90°$, on trouve la même expression, seulement avec u au lieu de $2K - u$.

Pour le calcul numérique, l'auteur pose $R = 4$, en conséquence du précédent ; donc, $\sin\alpha_0 = \frac{1}{4}\sin e$. Mais il remarque que la substitution de $R = \infty$ et $\alpha_0 = 180°$ ne modifie que peu le résultat. L'éclat relatif du ciel le long du zodiaque, ainsi

calculé, est présente dans le tableau suivant :

Élongation.	I.	Élongation.	I.
1°	689,4	80°	1,32
5	61,6	90	1,22
10	21,8	100	1,16
15	11,9	110	1,09
20	7,7	120	1,05
25	5,6	130	1,03
30	4,3	140	1,02
40	2,9	150	1,01
50	2,2	160	1,00
60	1,8	170	1,00
70	1,5	180	1,00

Le grand éclat près du Soleil ne peut se voir que pendant les éclipses totales du Soleil ; alors il se manifeste comme la Couronne, qui a toujours, d'après les observations, un allongement sur l'écliptique.

A la fin, l'auteur fait mention de la lumière d'opposition, nommée *Gegenschein*, qui n'est pas une conséquence de la théorie précédente, mais qui peut être expliquée, sous certaines conditions, comme phénomène cosmique.

Les observations de cette lumière faible sont pourtant trop peu nombreuses ; il est remarquable que Jones ne le mentionne jamais, bien qu'il ait vu plusieurs fois la lumière zodiacale s'étendant sur tout le zodiaque. D'après Schiaparelli, on ne peut le voir aussi bien quand l'air est très-pur que quand il y est « un non so che di brumoso », ce qui rend vraisemblable l'idée qu'il s'agit ici d'une sorte de réfléchissement atmosphérique.

H. G.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES [1].

Tome LXXXIX; 1879.

N° 1; 7 juillet.

Sylvester. — Sur la valeur moyenne des coefficients dans le développement d'un déterminant gauche ou symétrique d'un ordre infiniment grand et sur les déterminants doublement gauches. (24).

M. Cayley a montré que, si le nombre des termes distincts dans le développement d'un déterminant symétrique de l'ordre x est $1.2.3\ldots x\Omega_x$, Ω_x aura pour fonc-

---

[1] Voir *Bulletin*, III₂, 120.

tion génératrice $\frac{e^{\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}}}{\sqrt{1-t}}$. M. Sylvester a montré de son côté que, si le nombre des termes distincts dans un déterminant gauche de l'ordre $2x$ est $1.3.5\ldots(2x-1)\omega_x$, ω_x aura pour sa fonction génératrice $\sqrt[4]{\frac{e^t}{1-t}}$; la somme des coefficients, pris tous positivement, étant $[1.3.5\ldots(2x-1)]^2$, on a les éléments suffisants pour arriver à la solution de la question. Dans la Communication actuelle, M. Sylvester donne seulement, pour la valeur moyenne des coefficients, une formule approchée; dans une Communication du 8 septembre (p. 496), il donne pour résultat exact $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{e^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{4}}$, où l'on doit supposer x infini.

Les déterminants *doublement* gauches sont gauches par rapport à l'une et à l'autre des deux diagonales. Pour que le déterminant ne soit pas nul, il faut que l'ordre soit divisible par 4. M. Sylvester donne diverses propriétés de la racine carrée de ces déterminants.

Appell. — Sur la série hypergéométrique et les polynômes de Jacobi. (31).

L'auteur donne le développement de la fonction $F(x)$ définie par la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, en supposant

$$\gamma > 0, \quad 1 > \gamma - \alpha - \beta > 0,$$

suivant les polynômes de Jacobi définis par l'égalité

$$X_m = F(\alpha + \beta + m, \ -m, \ \gamma, \ x).$$

Les coefficients sont indépendants de γ. En posant en outre

$$F_m = F(a + m, \ -m, \ b, \ x),$$

où

$$b > 0, \quad 1 > b - a > 0,$$

et en ne supposant plus que m soit un entier positif, M. Appell montre que l'intégrale

$$\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b} F_m F_{m'}\, dx$$

est nulle quand on prend pour m et m' deux racines distinctes de l'équation transcendante

$$\frac{\Gamma(-m)\Gamma(a+m)}{\Gamma(b+m)\Gamma(b-a-m)} = K,$$

où K est une constante quelconque.

Fouqué. — Sur la récente éruption de l'Etna. (33).

Saussure (H. de). — Sur la récente éruption de l'Etna. (35).

Baudrimont (*A.*). — Évaporation de l'eau sous l'influence de la radiation solaire ayant traversé des verres colorés. (42).

N° 2; 14 juillet.

Serret (*J.-A.*). — Addition à mon Mémoire sur le principe de la moindre action. (57).

Voir le *Bulletin*, 1re série, t. II, p. 97. L'auteur donne une transformation des équations (49) et (52).

Picard (*E.*). — Sur une application de la théorie des fonctions elliptiques. (74).

Étude de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + nk^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} \frac{dy}{dx} + \alpha y = 0,$$

où n est un entier positif et α une constante quelconque. Quand n est pair, l'intégrale générale est toujours uniforme. C'est une fonction doublement périodique de seconde espèce. M. Picard montre comment on peut former une solution de cette équation exprimée linéairement au moyen de la fonction

$$f(x) = \frac{\mathrm{H}(x+\omega)\, e^{\left[1-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x}}{\Theta(x)}$$

et de ses $n-1$ premières dérivées.

Planté. — Recherche sur les effets de la machine rhéostatique. (76).

Stephan. — Observations faites à l'Observatoire de Marseille. (89).

Callandreau. — Sur une intégrale définie. (90).

Pellet (*E.*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier. (92).

Soit $F = 0$ une équation aux dérivées partielles d'ordre m, le nombre des variables indépendantes étant n. Pour que l'équation différentielle $V - a = 0$, d'ordre μ inférieur à m, soit une intégrale intermédiaire de l'équation $F = 0$, il faut et il suffit que cette équation $F = 0$ soit satisfaite pour tout système de valeurs des dérivées de la fonction inconnue d'ordre supérieur à μ, satisfaisant à toutes les équations obtenues en prenant les dérivées successives de l'équation $V = a$ par rapport aux n variables indépendantes.

Thollon. — Minimum de dispersion des prismes; achromatisme de deux lentilles de même substance. (93).

N° 3; 21 juillet.

Villarceau (*Y.*). — Théorie du pendule simple à oscillations coniques, en ayant égard à la rotation de la Terre. (113).

Recherches analytiques provoquées par les expériences de M. Dejean de Fonroque et dont les résultats contredisent ces expériences.

Perrier (*E.*). — Observations astronomiques et mesure d'un arc de parallèle en Algérie. (130).

Peters (*E.*). — Découverte d'une petite planète à Clinton (New-York), le 17 juillet 1879. (140).

Picard (*E.*). — Sur une généralisation des fonctions périodiques et sur certaines équations différentielles linéaires. (140).

Sur les fonctions $f(x)$ telles que l'on ait

$$f(x+4K) = Af(x) + Bf(x+2K),$$
$$f(x+4iK') = A'f(x) + B'f(x+2iK'),$$

A, B, A', B' étant des constantes. Ces fonctions s'expriment au moyen des fonctions H, Θ, ... M. Picard applique ces résultats à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

où p et q sont des fonctions doublement périodiques : quand cette équation admet une intégrale uniforme, cette intégrale peut être exprimée au moyen des fonctions H, Θ, ...

Bjerknes. — Expériences hydrodynamiques avec des corps vibrants, et imitation, dans un sens inverse, des forces de l'électricité statique et du magnétisme. (144).

Bouty. — Sur un phénomène analogue au phénomène de Peltier. (146).

Blondlot. — Sur la capacité de polarisation voltaïque. (148).

Lippmann. — Action du magnétisme en mouvement sur l'électricité statique; inertie de l'électricité statique. (151).

Denza. — Sur les lois des variations de l'électricité atmosphérique déduites des observations régulières faites à l'Observatoire de Moncalieri. (153).

N° 4; 28 juillet.

Desains. — Recherches sur la réfraction de la chaleur obscure. (189).

Faye. — Sur la théorie de la grêle, d'après MM. Oltramare et D. Colladon. (196).

Boussingault. — Observations relatives à la Communication de M. Faye. (202).

David. — Sur les développements des fonctions algébriques. (219).

Stephan. — Observations de planètes nouvelles, faites à l'Observatoire de Marseille. (223).

Lucas (F.). — Sur une application de la Mécanique rationnelle à la théorie des équations. (224).

Les racines $z_1, z_2, \ldots, z_p$ d'une équation entière $F(z) = 0$ étant représentées, suivant l'habitude, par des points, si l'on attribue à ces points l'unité de masse et qu'on suppose qu'ils repoussent un point matériel P de même masse en raison inverse de la distance, il faut et il suffit, pour que ce point soit en équilibre, qu'il coïncide avec une racine de l'équation dérivée.

Il en résulte, par exemple, que tout contour fermé convexe environnant le groupe des points racines de l'équation proposée environne aussi le groupe des points racines de l'équation dérivée.

Pellat. — Action de la lumière sur les piles. (227).

Witz. — Du pouvoir refroidissant de l'air aux pressions élevées. (228).

N° 5; 4 août.

Faye. — Sur le dernier tornado des États-Unis, et sur les anciennes observations de trombes dues à Buffon et à Spallanzani. (285).

Flammarion. — Observation de l'occultation d'Antarès le 28 juillet 1879. (292).

Mouton. — Spectre calorifique normal du Soleil et de la lampe à pleine incandescence (Bourbouze). (295).

Thenard. — Observations relatives à la Communication de M. Mouton. (298).

Lechat. — Des vibrations à la surface des liquides. (299).

Trève. — Sur les courants d'Ampère. (301).

Trève. — Sur l'aimant. (302).

Gernez. — Distillation des liquides sous l'influence de l'électricité statique. (303).

N° 6; 11 août.

Daubrée. — Recherches expérimentales sur l'action érosive des gaz très comprimés et fortement échauffés; application à l'histoire des météorites et des bolides. (325).

Janssen. — Sur l'éclipse du 19 juillet dernier, observée à Marseille. (340).

Ledieu. — Deuxième et dernière remarque sur les Communications de M. Bouquet de la Grye, concernant les ondes atmosphériques. (343).

Poincaré. — Sur quelques propriétés des formes quadratiques. (344).

L'auteur apporte une nouvelle solution du problème général :

« Reconnaître si deux formes données sont équivalentes et par quelle substitution on peut passer de l'une à l'autre. »

Sa solution repose sur l'introduction d'éléments nouveaux qu'il appelle *nombres corrélatifs;* mais la Note ne donne pas le développement de cette théorie nouvelle, qui sera sans doute publiée d'une manière complète ultérieurement.

Gernez. — Distillation des liquides sous l'influence de l'électricité statique. (348).

Trève. — Sur les courants d'Ampère et le magnétisme rémanent. (350).

N° 7; 18 août.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal, M. G.-B. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le deuxième trimestre de l'année 1879. (390).

Sylvester. — Table des nombres de dérivées invariantives d'ordre

et de degré donnés, appartenant à la forme binaire du dixième ordre. (395).

Pour trouver par cette Table le nombre d'invariants ou de covariants fondamentaux de l'ordre ω et du degré δ, on cherche le chiffre situé au point de concours de la colonne ω et de la ligne δ.

Les Tables analogues pour la forme binaire de l'ordre 7 et de l'ordre 8 ont déjà paru dans les *Comptes rendus*, celle pour l'ordre 9 dans l'*American Journal of Mathematics*, en sorte que l'on connaît aujourd'hui le système complet des covariants et invariants pour toutes les formes binaires de degré inférieur à 11.

Lalanne. — Méthodes de calcul graphique ; emploi de ces méthodes pour la rédaction des projets que comporte le développement du réseau des chemins de fer français. (396).

Alexéief. — Intégration des irrationnelles du second degré. (403).

M. Alexéief avait fait connaître, dans une des séances de la Société Mathématique de France, un procédé d'extraction de la racine carrée d'un nombre N. Dans la Note actuelle, il indique quelques applications de sa méthode au calcul des intégrales irrationnelles du second degré.

Habich (Ed.). — Observations relatives à une Note de M. l'abbé Aoust sur le mouvement d'une droite dans un plan. (405).

Bouquet de la Grye. — Étude sur les ondes atmosphériques ; équation mensuelle lunaire. (406).

Forel (A.). — Scintillation des flammes du gaz d'éclairage. (408).

N° 8; 25 août.

Mouchez. — Découverte de deux comètes. (425).

Léauté. — Sur un procédé permettant d'obtenir d'un régulateur à boules quelconque le degré d'isochronisme qu'on veut et de maintenir ce degré d'isochronisme pour toutes les vitesses de régime. Théorie générale. (431).

Cruls. — Sur quelques étoiles multiples, d'après les observations faites à l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. (435).

Amagat. — Recherche sur la compressibilité des gaz à des pressions élevées. (437).

N° 9; 1er septembre.

Faye. — Note sur la théorie mathématique des oscillations d'un pendule double, par M. Peirce. (462).

Les instruments modernes dont on se sert pour étudier la gravité au moyen du pendule ont présenté quelques défauts; le pied métallique des appareils et même le pilier en pierre qui les porte sont affectés sensiblement par les oscillations du pendule. Pour éviter des corrections délicates, M. Faye suggéra l'idée de placer sur un même support deux pendules égaux oscillant en sens contraires dans la même amplitude. A la suite d'une étude mathématique de ce système, M. Peirce se prononce très-nettement en faveur de la méthode du double pendule.

Faye. — Note sur les expériences de M. Langley permettant d'arriver à quelques évaluations sur la température solaire. (463).

Janssen. — Note sur les températures solaires. (463).

Caligny (A. de). — Sur un moyen de diminuer la perte de force vive dans un ajutage divergent de grandes dimensions dont l'angle est trop ouvert et qu'on peut diviser en plusieurs par des surfaces coniques ayant le même axe. (471).

Léauté. — Sur un procédé permettant d'obtenir d'un régulateur à boules quelconque le degré d'isochronisme qu'on veut et de maintenir ce degré d'isochronisme pour toutes les vitesses de régime. Règles pratiques. (473).

N° 10; 8 septembre.

Sylvester. — Sur la valeur moyenne des coefficients numériques dans un déterminant gauche d'un ordre infiniment grand. (497).

Voir plus haut, n° 1, 7 juillet.

N° 11; 15 septembre.

Henry. — Observations de la comète Hartwig et de la planète Pallas, faites à l'Observatoire de Paris. (509).

Tacchini. — Observations du Soleil pendant le deuxième trimestre de l'année 1879.

N° 12; 22 septembre.

Willote (*H.*). — Essai théorique sur la loi de Dulong et Petit. Cas des gaz parfaits. (540).

N° 13; 29 septembre.

Tisserand. — Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où, les excentricités étant petites, l'inclinaison mutuelle des orbites est quelconque. (553).

Sainte-Claire Deville et *Mascart.* — Construction de la règle géodésique internationale et détermination de ses points de contrôle. (558).

Willotte. — Essai théorique sur la loi de Dulong et Petit. Cas des corps solides, liquides et vapeurs; corps composés. (568).

Decharme. — Formes vibratoires des bulles de liquide glycérique. (570).

Peters. — Découverte de deux petites planètes. (576).

МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ, издаваемій Московскимъ Математическимъ Обществомъ [1].

Tome IX, Ier et IIe cahiers; 1878-79.

Zilof (*P.*). — Recherches expérimentales sur la polarisation diélectrique dans les liquides. (5-64).

L'auteur remarque que, jusqu'à présent, la théorie de la diélectricité des liquides a été peu étudiée.

Excepté les expériences de Faraday, dont l'exactitude n'est pas rigoureuse, et le théorème de Helmholtz, qui n'a jamais été vérifié par l'expérience, rien n'a été fait. Les expériences faites par l'auteur ont eu pour résultat cette vérification : il en ré-

---

[1]) Voir *Bulletin*, II_2, 21.

sulte encore la preuve du fait que le milieu environnant les masses électriques exerce une influence sur l'action réciproque de ces masses.

Le Mémoire se compose de trois Chapitres :

Le premier, intitulé *La théorie du potentiel diélectrique*, explique certains faits de cette théorie qui, jusqu'à présent, étaient peu remarqués.

Le deuxième, intitulé *Recherches expérimentales sur la polarisation des isolateurs solides et gazeux*, est consacré à l'examen des expériences faites précédemment.

Dans le troisième, l'auteur expose ses propres expériences, faites à Berlin, dans l'Institut physique de Helmholtz (¹).

Sabinine (*E.-F.*). — Contribution au Mémoire de Cauchy sur l'intégration des équations différentielles (²).

A propos de ce Mémoire, l'auteur démontre que cette méthode peut être appliquée à la détermination, à l'aide des séries, des intégrales des équations différentielles linéaires d'un degré quelconque.

Oumof (*N.-A.*). — Des relations réciproques fictives entre les corps solides plongés dans un milieu d'élasticité constante. (72-108).

Supposons un milieu d'élasticité constante remplissant l'espace illimité, à l'exception de certaines parties limitées, occupées par les corps solides. Les surfaces de ces corps éprouveront soit une tension, soit une pression, qui pourrait produire sur eux des effets pareils à ceux que produiraient certaines actions réciproques existant entre ces corps.

L'objet du présent Mémoire est la détermination des caractères et des conditions nécessaires à ce que cette action soit possible.

Bougaïef (*N.-V.*). — Contribution à la théorie des équations fonctionnelles. (109-113).

Les équations de deuxième classe et du premier ordre de la forme

$$F[x, \psi(\alpha, x), \varphi(\alpha, x)]$$

s'intègrent par la méthode de Laplace.

Cette méthode peut être, dans certains cas, remplacée avantageusement par une autre où l'intégration de ces équations peut être amenée à l'intégration d'une équation à différences finies du deuxième ordre.

Liventsof (*A.-I.*). — Sur la méthode de résolution du problème d'Abel, par M. Letnikof. (114-120).

Ce problème est : « Trouver une fonction $F(\beta, \alpha)$ telle que l'intégrale définie

$$\int_\alpha^x F(\beta, x)\theta(\beta, \alpha)\,d\beta,$$

(¹) Les résultats de ces expériences ont été publiés en 1877 dans les *Annales de Poggendorff*, t. XV, 14.

(²) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. I, p. 339-340.

où la fonction (β, α) soit une fonction de α, ne contienne pas x. » Ce sont les conditions pour que F et θ aient une certaine forme déterminée que l'auteur cherche à trouver. Il résulte de ses recherches que la méthode de M. Letnikof, tout en paraissant, à première vue, très-générale, ne s'applique qu'exclusivement à la solution du problème d'Abel.

Oumof (*N.-A.*). — Du mouvement stationnaire de l'électricité sur les surfaces conductrices d'une forme quelconque. (120-127).

Minine (*A.-P.*). — Des séries numériques se trouvant en liaison avec les intégrales numériques. (128-136).

Désignons par $p', p'', p''', \ldots$ une série de nombres liés suivant une loi quelconque avec un nombre entier et positif n, et par F la caractéristique d'une certaine fonction numérique ; la somme $F(p') + F(p'') + F(p''') + \ldots$ sera l'intégrale numérique.

Peterson (*K.-M.*). — De l'intégration des équations aux dérivées partielles. (Seconde Partie.) Voir t. VIII, p. 291 ([1]). (137-193).

Le présent Mémoire contient les §§ 11, 12, 13, 14 et 15 traitant des sujets suivants :

1° Équations linéaires, bilinéaires et alinéaires aux dérivées partielles ;

2° Équations bilinéaires ;

3° Équations bilinéaires des deuxième et troisième ordres ;

4° Équations simultanées ;

5° Intégrales des équations simultanées, indéterminées, intermédiaires et particulières.

Andréief (*K.-A.*). — Des affinités géométriques dans leur application au problème de construction des lignes courbes ([2]). (194-287).

Sokolof (*A.*). — Problème de la torsion des prismes. (288-339).

La solution de ce problème obtenue par Saint-Venant, dans son Mémoire *Sur la torsion des prismes*, par une méthode purement géométrique, quoique simple et facile à saisir, ne présente pas cette exactitude rigoureuse que peut donner la méthode analytique. Quant aux études analytiques faites par Clebsch dans sa *Theorie der Elasticität fester Körper* et par Thomson dans sa *Natural Philosophy*, le problème y est plutôt posé que résolu.

L'auteur se propose de remplir cette lacune ; il traite ce problème dans son Mémoire d'une manière détaillée à l'aide des coordonnées curvilignes, et donne des formules générales pour deux formes de cylindres limités par des surfaces isothermes.

Tchebychef (*P.-L.*). — Des articulations simples. (340-351).

A. P.

---

[1] Voir *Bulletin*, II_2, 21.

[2] Voir *Bulletin*, III_1, 35. l'analyse de ce Mémoire par M. Bougaïef.

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON (1).

Tome XXXIX; novembre 1878 à juin 1879.

Todd (*C.*). — Observations faites en 1877 à l'Observatoire d'Adélaïde. (1-22).

Les observations les plus importantes sont relatives aux occultations, éclipses et passages des satellites de Jupiter; leur nombre est de 218.

Denning (*W.-F.*). — Note sur les essaims météoriques de juillet à décembre, d'après les observations faites en dehors de l'Angleterre. (22-31).

Le dépouillement des Catalogues de Heis, Weiss, Zezioli, Schiaparelli et Konkoly a conduit M. Denning à la détermination de 79 points radiants dont il donne la position et dont il fait connaître l'importance. Plusieurs d'entre eux étaient déjà connus par les recherches antérieures.

Pritchard (*C.*). — Note sur les travaux et les constructions complémentaires de l'Observatoire de l'Université d'Oxford. (32-34).

Les travaux consistent dans la mesure des photographies de la Lune obtenues avec le miroir de 13 pouces de M. de la Rue et dans des observations de la position relative de 42 étoiles des Pléiades. Il a été construit une bibliothèque avec salle de lecture, et des instruments sont à la disposition des étudiants.

Backhouse (*T.-W.*). — Sur le spectre de la nouvelle étoile du Cygne. (34-37).

La position des lignes lumineuses, telle qu'elle est déterminée par l'auteur, s'accorde généralement avec celles données par MM. Cornu, Vogel et Copeland; M. Backhouse signale cependant deux lignes brillantes de plus.

Smyth (*Piazzi*). — Note sur la ligne B du spectre solaire et les bandes moins réfrangibles. (38-43).

Le professeur Piazzi a réussi, en employant un spectroscope assez puissant et au cours d'un séjour à Lisbonne, à résoudre nettement en lignes fines les bandes voisines de B; il a même pu mesurer la longueur d'onde de trente-cinq d'entre elles. La Note du savant directeur de l'Observatoire d'Édimbourg est accompagnée d'une planche.

Schuster (*A.*). — Quelques remarques sur l'éclipse totale du 29 juillet 1878. (44-47).

---

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 203.

Les observations de M. Schuster à Las Animas (Colorado) ont montré que la couronne n'a été visible que 6 secondes après le commencement de la totalité; que sa lumière est en partie de la lumière propre et en partie de la lumière réfléchie; que l'intensité de la polarisation augmente à partir des bords de la Lune jusqu'à une certaine distance et diminue ensuite régulièrement.

Penrose (*F.-C.*). — L'éclipse totale de Soleil du 29 juillet 1878. (48-51).

L'auteur, qui observait à Denver (Colorado), donne un dessin et une description de la couronne et des gloires.

Gill (*D.*). — Note sur l'état d'avancement des réductions des observations faites pendant son expédition à l'Ascension. (51-72).

Les observations relatives à la longitude et à la latitude sont complétement réduites; la position de la station est :

Longitude ouest de Greenwich........	$0^h 57^m 39^s$
Latitude australe.......	$7° 59' 15'',5$

Les constantes nécessaires à la réduction des observations des distances de Mars sont elles-mêmes déjà calculées.

Neison (*E.*). — Note sur la correction apportée par M. Newcomb à la valeur de l'accélération séculaire de la Lune adoptée par Hansen. (72-75).

L'exactitude avec laquelle les anciennes éclipses peuvent être représentées rend probable que les marées sont sans action sur la rotation de la Terre.

Pritchard (*C.*). — Observations de la comète périodique de Tempel à son passage de 1878. (75).

Tebbutt (*J.*). — Observations de la comète d'Encke, faites à Windsor (N.-S.-W.) en août 1878. (75-76).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur les Catalogues et les observations d'étoiles doubles à l'Observatoire de Deaborn. (76).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur la loi de variation de la force qui, passant toujours par un point donné, donnerait au corps sur lequel elle agit une orbite conique. (77-91).

Le problème a été complétement résolu par MM. Darboux et Halphen; M. Glaisher examine comment il peut se résoudre par les méthodes développées autrefois par Newton.

Liveing (*F.-H.*). — Sur une disposition spéciale des chercheurs pour les instruments d'azimut et d'altitude. (91-96).

Safford (*T.-H.*). — Note sur l'étoile 2935 de Bradley. (96-97).

L'étoile a un mouvement propre assez rapide, représenté par les deux formules suivantes :

$$Æ = 22^h 3^m 11^s,38 - 0^s,064 (t. 1855),$$
$$\text{Ⓓ} = 82^\circ 10' 13'',1 - 0'',05 (t. 1855).$$

Gill (*D.*).— Comparaison des observations méridiennes des étoiles de Mars faites dans les différents Observatoires. (98-123).

La discussion rigoureuse des ascensions droites des étoiles de Mars, telles qu'elles résultent des observations multiples faites dans divers Observatoires d'Europe et d'Amérique, a montré à M. Gill qu'il existe entre les déterminations des divers établissements des erreurs systématiques, qui résultent, suivant lui :

1° D'une différence dans les positions des étoiles horaires ;

2° D'une irrégularité dans la forme des pivots, irrégularité qui produit des variations dans l'azimut de l'instrument, et probablement aussi de flexions dissymétriques dans les tubes des lunettes, flexions qui doivent avoir pour conséquence une variation de collimation avec la hauteur ;

3° Une erreur ou une équation personnelle dépendant de l'éclat de l'astre observé.

Il est certain, dit M. Gill, qu'une erreur de cette dernière espèce doit exister dans les observations chronographiques, et des observations directes de M. de Bakhuyzen font voir qu'elle se retrouve, quoique à un degré moindre, dans les observations faites par la méthode de l'œil et de l'oreille.

Après avoir fait, autant que possible, la part de ces diverses sources d'erreurs, M. Gill termine son Mémoire par un Tableau des ascensions droites et des déclinaisons des étoiles qui lui ont servi pour les observations héliométriques de Mars.

Gill (*D.*). — Observations de α du Centaure, faites à l'Ascension en 1877, avec l'héliomètre de lord Lindsay. (123-126).

Hall (*Maxwell*). — Additions à son Mémoire sur la théorie des systèmes sidéraux. (127-132).

L'auteur trouve un accord satisfaisant entre les déterminations expérimentales de parallaxes et de grandeurs des mouvements propres et l'hypothèse que le Soleil et les étoiles voisines tournent autour d'un point situé par 9° 15′ d'ascension droite et 63° 28′ de distance polaire nord, et à une distance du Soleil égale à 31 millions de fois la distance de la Terre au Soleil.

Downing (*A.-W.*). — Réduction des distances polaires nord du Catalogue du Cap à celles du Catalogue étalon d'Auwers. (133-137).

Pickering (*W.-H.*). — Note sur l'éclipse totale de Soleil du 2 juillet 1878. (137-139).

La couronne est polarisée dans un plan passant par le Soleil.

Airy (*G.-B.*). — Note sur la détermination de la masse de Mars. (140-141).

Airy (*G.-B.*). — Note sur la conjonction de Mars et de Saturne le 30 juin 1879. (141-142).

M. Dunkin a préparé une Carte donnant les positions respectives de ces deux planètes au moment de la conjonction et calculé pour divers instants la distance réciproque des deux astres telle qu'elle résulte des Tables.

Winnecke. — Note sur une ancienne observation des Pléiades, faite par Mœstelin le 24 décembre 1579. (146-148).

Neison (*E.*). — Note sur la solution générale du problème du mouvement elliptique troublé. (149-161).

Ranyard (*A.-C.*). — Note sur la présence de poussières météoriques dans l'atmosphère. (161-167).

Grant (*R.*). — Observations du passage de Mercure le 6 mai 1878 et de l'occultation de Mars par la Lune, le 3 juin 1878, faites à l'Observatoire de Glasgow. (167-168).

Young (*C.-A.*). — Mesures du diamètre de Mercure, faites à l'Observatoire de Princetown le 6 mai 1878. (168-171).

Les mesures ont été faites à l'aide d'un micromètre à fils inclinés; à la distance 1 ($\pi = 8',85$), le diamètre de la planète est $6'',524$.

Gill (*D.*). — Note sur les remarques faites par M. Maxwell Hall à propos de l'observation de l'opposition de Mars. (171-172).

Dunkin (*E.*). — Note sur les erreurs des Tables de Saturne, par Bouvard. (172-174).

Les erreurs sont moindres que celles qui résultent de la comparaison des Tables de Bouvard et des Tables de Le Verrier.

Downing (*A.-W.*). — Réduction des distances polaires nord du premier Catalogue général de Melbourne, pour 1870, au Catalogue d'Auwers. (174-176).

Perry (*S.-J.*). — Phénomènes des satellites de Jupiter, observés à Stonyhurst en 1877-1878. (177).

Airy (*G.-B.*). — Occultations et éclipses des satellites de Jupiter, observées à Greenwich en 1878. (178-181).

Marth (*A.*). — Éphémérides pour déterminer les positions des satellites d'Uranus en 1879. (181-182).

Sadler (*H.*). — Notes sur le *Cycle of celestial objets* de l'amiral Smyth, et en particulier sur le Catalogue de Bedford. (183-195).

Lindsay (*lord*) et *Copeland* (*R.*). — Note sur une fente voisine du cratère lunaire de Hyginus et non encore observée. (195-197).

Deux planches jointes à la Note des deux auteurs montrent que l'aspect de cette région de la Lune est très-variable suivant le mode d'éclairement.

Christie (*W.-H.-M.*). — Note sur les phénomènes qui se produisent dans l'occultation d'une étoile par le bord brillant de la Lune. (198).

L'étoile (4e grandeur) a disparu successivement en se noyant dans une sorte de brouillard lumineux. La formation de ce brouillard est attribuée par M. Christie à la zone de lumière diffractée qui existe forcément autour de la Lune.

Gore (*J.-E.*). — Note sur les variations d'éclat de ι Andromède. (199).

Levander (*F.-W.*). — Description d'un diaphragme à ouverture variable pour les observations solaires ou sidérales. (199-200).

Rapport annuel du Conseil de la Société astronomique. (201-320).

Ce Rapport, très-étendu et très-complet, ne compte pas moins de 120 pages; sans l'analyser d'une manière complète, nous y relèverons les renseignements suivants :

Le nombre des Membres de la Société était, au mois de décembre, de 631, en augmentation de 14 sur l'année précédente. Les cotisations et les rentes des fonds capitalisés ont produit en 1878 une somme de 51400 francs.

Le Volume XLIV des Mémoires de la Société est à l'impression. Il renfermera : 1° un Mémoire de M. E. Neison, sur une méthode générale pour traiter le mouvement de la Lune; 2° un Mémoire de M. N.-E. Green, sur les observations de Mars faites à Madère en août et septembre 1877; 3° des recherches de M. Maxwell Hall, sur l'opposition de Mars en 1877; 4° un Catalogue et des mesures d'étoiles doubles par M. Burnham, d'après ses observations de Dearborn.

Parmi les notices nécrologiques les plus importantes sont celles : de James Booth (1806-1878); de Robert Main (1808-1878), le savant directeur de l'Observatoire d'Oxford; du R. P. Secchi (1818-1878), si connu par ses travaux d'Astronomie physique.

La série des Rapports sur les travaux des Observatoires ne saurait être analysée d'une manière complète; j'y relève seulement les renseignements suivants :

Greenwich. — Un nouveau Catalogue de 2263 étoiles, formé d'après neuf années d'observations, est en distribution. Les observations sur le mouvement des étoiles dans la direction de la ligne de visée ont été continuées et étendues à onze astres nouveaux.

Observatoire Radcliffe (Oxford). — M. Stone succède à M. Main, comme Savilian professor et directeur de l'établissement.

Observatoire de l'Université d'Oxford. — M. Pritchard a effectué avec son *duplex micrometer* de nombreuses mesures des étoiles des Pléiades.

Observatoire de Markree. — Le grand équatorial est employé à une observation systématique de toutes les étoiles doubles comprises entre 65° et 85° de déclinaison nord.

Observatoire du Cap de Bonne-Espérance. — La réobservation de 9000 étoiles du Catalogue de Lacaille est terminée : un Catalogue de 13600 étoiles est sous presse.

Parmi les Notices sur les progrès de l'Astronomie, je signalerai :

1° Une analyse succincte des travaux de MM. Newcomb, Neison et Hill sur le mouvement de la Lune ;

2° Une Notice sur les huit planètes (184 à 191) et les quatre comètes découvertes en 1878 ;

3° Une Note sur les Cartes de la Lune par Schmidt et Lohrmann ;

4° Une analyse étendue des recherches photométriques de M. C.-S. Peirce.

Le Rapport annuel de la Société astronomique se termine enfin par l'Adresse du Président à M. Asaph Hall, auquel la Société a accordé la médaille d'or pour l'ensemble de ses travaux, et en particulier pour la découverte des satellites de Mars.

Tebbutt (*J.*). — Observations de la comète d'Encke, faites en août 1878 à Windsor (N.-S.-W.). (321-322).

Talmage (*C.-G.*). — Remarques sur la Communication de M. Sadler relative au *celestial cycle* de l'amiral Smyth. (323-234).

Nevins (*A.-E.*). — Note sur les avantages pratiques de la méthode employée par M. Hartnup pour vérifier les chronomètres. (325-337).

L'auteur montre, par la discussion de la marche de divers chronomètres employés dans des voyages au long cours, l'avantage incontestable qu'il y a à calculer la marche de ces chronomètres en tenant compte de la température par une formule de la forme

$$\text{Marche diurne} = R - (N^2 \times C).$$

R est la marche diurne à une température T, déterminée par expérience, N la différence entre la température observée et T, enfin C un coefficient expérimental qui reste sensiblement constant quel que soit l'état des huiles.

Knobel (*E.-B.*). — Note sur un manuscrit persan du Catalogue d'étoiles de Ulugh Beigh, appartenant à la Société astronomique. (337-363).

Ce manuscrit, écrit en persan, date de l'an 1255 de l'hégire. M. Knobel en compare le texte avec la traduction de Hyde (1665) et la publication de Baily (*Memoirs of the R. Astronomical Society*, vol. XIII). Il montre que dans ces deux textes il y a un assez grand nombre d'erreurs, provenant des fautes des copistes, et termine par une Table de la position et de la grandeur des étoiles telle qu'elle résulte du texte d'Ulugh Beigh.

Krueger (*A.*). — Formules pour réduire les précessions en ascensions droites et en déclinaisons de Bessel aux constantes de Struve. (364-365).

Savitsch (*M.-A.*). — Les longueurs du pendule à secondes à Poulkova, à Saint-Pétersbourg et aux différents points de la Russie occidentale, corrigées de l'influence produite par la flexion des supports du pendule construit par M. Repsold. (365-366).

Gill (*D.*). — Nouvelle méthode pour déterminer les réfractions astronomiques. (366-368).

M. Gill propose de déterminer la valeur expérimentale de la réfraction par des observations de hauteurs égales, de part et d'autre du méridien, d'étoiles de mêmes déclinaisons. La différence entre la somme des angles horaires ainsi déterminés et la différence d'ascension droite des deux étoiles égale le double de la réfraction pour la hauteur considérée.

Lynn (*W.-T.*). — Note sur la variation des erreurs des Tables lunaires de Hansen entre 1848 et 1876. (368-370).

Les erreurs en latitude n'ont que peu augmenté; il y a au contraire un accroissement considérable dans les erreurs en longitude.

Lynn (*W.-T.*). — Note sur η du Dragon. (371-372).

Hall (*A.*). — Note sur la masse de Saturne. (373-374).

Dreyer (*J.-L.-E.*). — Nouvelle étoile variable. (374).

L'étoile rouge n° 109 du Catalogue Schjellerup est variable.

Trouvelot (*E.-L.*). — Observations de vapeurs absorbantes sur le Soleil. (374-379).

Dans plusieurs circonstances, de 1872 à 1877, M. Trouvelot a constaté l'existence de masses de vapeurs absorbantes à la surface du Soleil. Ces vapeurs, totalement invisibles lorsqu'on examine la surface du Soleil par les procédés ordinaires, se révèlent au spectroscope par une absorption plus forte exercée sur les raies voisines de C. Par la comparaison des points où se montrent ces vapeurs et de ceux où apparaissent les taches, M. Trouvelot croit avoir démontré que ce phénomène, comme les facules, précède la formation des taches.

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation de Jupiter en 1879. (379-381).

Common (*A.-A.*). — Sur l'utilité d'obtenir des photographies de Saturne et de Mars pendant la prochaine conjonction. (381-382).

Common (*A.-A.*). — Note sur les télescopes de grande ouverture et les procédés à employer pour les monter. (382-386).

D'une comparaison des qualités et des défauts des miroirs et des objectifs, M. Common conclut que l'avantage est aux miroirs et que les telescopes doivent être montés suivant la méthode de Newton.

De Gasparis (*M.-A.*). — Sur quelques formules qui expriment l'anomalie excentrique en fonction de l'anomalie moyenne. (386-387).

Schuster (*A.*). — Sur la présence probable de l'oxygène dans la chromosphère solaire. (388).

Parmi les lignes du spectre de l'oxygène à basse température, quatre ont été vues brillantes par M. Young dans le spectre de la chromosphère.

Extrait *des minutes du Conseil*. (389-390).

Le Conseil déclare qu'il n'aurait pas autorisé l'impression des Notes de M. Sadler sur le *celestial cycle* de l'amiral Smith s'il avait eu connaissance des termes de ces Notes, termes de nature à diminuer la considération que l'on doit à l'amiral.

Pritchard. — Note sur le Catalogue d'étoiles doubles d'Herschel. (390).

Struve (*O.*). — Note sur l'ordre de publication des divers Volumes des observations de Poulkova. (390-391).

Hind. — Note sur deux erreurs du *Nautical Almanac* de 1882. (391).

Les erreurs sont relatives aux points de contact de Vénus et du Soleil lors du prochain passage de cette planète.

Pickering (*E.-C.*). — Requête aux astronomes relativement à la mesure de la grandeur des étoiles. (391-393).

Pour remédier aux discordances qui existent entre les différents astronomes relativement à l'appréciation de la grandeur des étoiles, M. Pickering les prie de vouloir bien observer la grandeur d'une série d'étoiles voisines du pôle, étoiles dont l'intensité relative a été déterminée au photomètre.

Neison (*E.*). — Note sur la détermination de la parallaxe solaire à l'aide de l'inégalité parallactique de la longitude de la Lune, et sur la correction du coefficient de l'équation annuelle dans la théorie de Hansen. (394-402).

Denning (*W.-F.*). — Note sur le point radiant des météores du 9-12 avril. (402-405).

Denning (*W.-F.*). — Catalogue de 222 météores stationnaires. (406-424).

Åstrand (*J.-J.*). — Deux méthodes aisées et faciles pour corriger les distances lunaires. (425-428).

Christie et *Maunder*. — Note sur le spectre de la comète de Brorsen, d'après les observations de Greenwich. (428-430).

Le spectre est formé des trois bandes ordinaires et ne présente pas aujourd'hui l'anomalie observée en 1878 par M. Huggins.

Copeland (*R.*) et *Lohse* (*J.-G.*) — Observations de la comète de Brorsen, faites à Dunecht. (430).

Tebbutt (*J.*). — Observations de la comète de Brorsen, faites à Windsor. (N.-S.-W.). (430-431).

Russel (*H.-C.*). — Observations de la comète de Brorsen, faites à l'équatorial de Sydney. (431).

Birmingham (*J.*). — Note sur une observation du cratère lunaire *Schroeter* faite par Gruithuisen. (432).

Green (*N.-E.*). — Note sur l'opposition prochaine de Mars. (433).

Stone (*E.-J.*). — Annonce de l'envoi de son Catalogue des étoiles du Cap de Bonne-Espérance. (433-434).

Gill (*D.*). — Sur la valeur de la parallaxe solaire, d'après les observations de Mars faites en 1877 à l'Ascension. (434-437).

$$\pi = 8'',78 \pm 0'',015.$$

Oppolzer (*Th.*).— Note sur la différence de longitude entre Vienne et Greenwich. (437-440).

En combinant les observations électriques faites entre Greenwich et Paris par M. Hilgard et entre Paris et Vienne par MM. Lœwy et Oppolzer, la différence de longitude entre le cercle méridien de Greenwich et le pilier est du nouvel Observatoire de Vienne est de $1^h\,5^m\,21^s,16$.

L'ancien Observatoire de Vienne est d'ailleurs à $10^s,52$ à l'est du nouveau.

Ces déterminations s'accordent très-bien avec les anciennes.

Draper (*H.*). — Note sur la coïncidence des lignes brillantes du spectre de l'oxygène avec des lignes brillantes du spectre solaire. (440-447).

Le Dr Draper fait l'historique de ses recherches sur le spectre des gaz incandescents et décrit l'instrument employé pour obtenir les photographies de ces spectres. Une seconde partie de sa Note est consacrée à l'exposé de quelques remarques sur les différences probables entre l'aspect des lignes lumineuses du Soleil et des lignes brillantes du spectre de l'oxygène.

Pritchard (*C.*). — Mesures photographiques du demi-diamètre de la Lune. (447-450).

Seabroke (*G.-M.*). — Observations spectroscopiques du mouvement des étoiles dans la direction de la ligne de visée, d'après les mesures faites à l'Observatoire Temple, à Rugby. (450-454).

L'auteur, après avoir insisté sur les difficultés des mesures de cette espèce, décrit la méthode à laquelle il a donné la préférence. On produit alternativement dans le champ du spectroscope le spectre de l'étoile et celui de la lumière de comparaison. Le micromètre est formé d'un trou très-petit pratiqué dans une plaque métallique mobile à l'aide d'une vis micrométrique. L'image de ce trou éclairé, amenée dans le champ de vision par réflexion sur la surface du dernier prisme, sert de pointeur pour la mesure du déplacement des raies.

La Note se termine par les mesures relatives à 68 étoiles.

Bosanquet (*R.-H.-M.*) et *Sayce* (*A.-H.*). — Recherches sur l'Astronomie des Babyloniens. (454-461).

Cette première Note est relative au Calendrier. Les auteurs établissent d'abord que les mois étaient lunaires, car les inscriptions relatives aux éclipses de Lune indiquent toujours que ces phénomènes sont arrivés le 14 du mois. Les noms des mois sont les noms hébreux. MM. Bosanquet et Sayce recherchent ensuite la loi d'intercalation du treizième mois, mais cette partie de leur Mémoire ne saurait être résumée en quelques lignes; notons seulement qu'ils établissent que le commencement de l'année était réglé par le lever héliaque de la Chèvre.

Russell (*H.-C.*). — Description d'une machine propre à donner un mouvement de rotation rigoureusement uniforme. (462-465).

Downing (*A.-M.-W.*). — Application des réfractions moyennes données par Bessel dans les *Fundamenta* aux observations de Washington. (465-468).

Les observations de distances polaires faites à Washington doivent, pour s'accorder avec celles faites au Cap, être réduites avec les réfractions des *Fundamenta*, qui sont un peu moindres que celles des *Tabulæ Regiomontanæ*.

Marth (*A.*). — Éphémérides pour l'observation physique de Mars en 1879-1880. (468-485).

Tebbutt (*J.*). — Observations de la comète de Brorsen, faites en février et mars 1879 à Windsor. (N.-S.-W.) (486).

Johnson (*R.-C.*). — Note sur une nouvelle méthode pour régulariser la marche du mouvement d'un équatorial. (486-488).

Lorsque les ailes d'un régulateur centrifuge s'écartent au delà de la limite assignée, elles ferment un circuit électrique qui met en action un frein électromagnétique.

Carpmael (*C.*). — Sur les valeurs des constantes de l'équation

$$ {}_rA_r x^{(r)} + {}_rA_{r-1}\, x^{(r-1)} + \ldots + {}_rA_t x^{(t)} + \ldots + {}_rA_0 - y_x = 0, $$

obtenue par la méthode des moindres carrés, d'après $n+1$ valeurs de y_x lorsque $x = 0, 1, 2, \ldots, n$; n étant plus grand que r. (489-504).

Airy (*G.-B.*). — Index des observations accidentelles comprises dans les *Annales de l'Observatoire de Greenwich* de 1836 à 1875. (504-511).

Pritchett (*C.-W.*). — Notes sur les couleurs apparentes de Mars et Saturne pendant leur conjonction du 29 juin 1879, d'après les observations faites à l'Observatoire de Glasgow (Missouri). (512-513).

Marth (*A.*). — Note sur le passage de la Terre et de la Lune sur le disque du Soleil tel qu'il serait vu de Mars le 12 novembre 1879. (513-514).

Lynn (*W.-T.*).—Remarques sur les variations de l'erreur moyenne de longitude de la Lune dans les Tables de Hansen depuis l'année 1876. (514-515).

Airy (*G.-B.*). — Surfaces moyennes occupées sur le Soleil par les ombres, taches et facules, d'après les mesures faites sur les photographies du Soleil obtenues à Greenwich depuis le 11 juillet 1873. (515-517).

Nous extrayons de cette Note les moyennes relatives aux diverses années :

	Surfaces moyennes des		
Années.	ombres.	taches entières.	facules.
1873	116	678	2882
1874	83	582	1096
1875	45	255	475
1876	25	132	226
1877	20	94	168

L'unité est le millionième de la surface visible du Soleil.

Hall (A.). — Note sur Hypérion. (517).

M. Hall énumère les quelques anciennes observations de Hypérion qui lui sont connues et fait appel aux astronomes pour lui en indiquer d'autres.

Lindsay (lord) et *Copeland (R.).* — Observations d'étoiles filantes, faites à Dun Echt le 27 novembre 1878. (518-520).

G. R.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, fondé par J. LIOUVILLE et continué par H. RESAL. — 3e série (¹).

Tome V; 1879.

Mathieu (É.). — Étude des solutions simples des équations aux différences partielles de la Physique mathématique. (5-20).

Dans toutes les questions de mouvements vibratoires ou de mouvements de la chaleur dans un corps de forme donnée, on commence par chercher une solution dite *simple*, qui ne dépend du temps t que par un facteur qui est le sinus d'un arc qui varie proportionnellement au temps, ou par un facteur qui renferme le temps en exposant. Cette solution simple satisfait non-seulement à une équation aux différences partielles, mais encore à certaines *conditions aux limites*. La solution la plus générale est la somme d'un nombre infini de ces solutions simples.

C'est de ces *solutions simples* que s'occupe M. Mathieu; il traite des équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\pm a^2 v,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Pepin. — Sur un théorème de Legendre (21-30).

L'auteur se propose de compléter la démonstration de ce théorème de Legendre : « Si c est premier ou double d'un nombre premier, deux formes trinaires différentes de c ne pourront répondre à un même diviseur trinaire de la formule t^2+cn^2. »

André (D.). — Sur le développement des fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable. (31-46).

Les fonctions $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$, $\mathrm{Al}_3(x)$ sont développables, dans tout le plan, en séries procédant suivant les puissances entières et positives de x. Les coefficients sont des polynômes entiers en k^2, et ce sont ces polynômes qu'étudie M. André.

(¹) Voir *Bulletin*, III₂, 5.

En posant

$$\mathrm{Al}(x) = P_0 - P_1 \frac{x^2}{1.2} + P_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots,$$

$$\mathrm{Al}_1(x) = Q_0 \frac{x}{1} - Q_1 \frac{x^3}{1.2.3} + Q_2 \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots,$$

$$\mathrm{Al}_2(x) = R_0 - R_1 \frac{x^2}{1.2} + R_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots,$$

$$\mathrm{Al}_3(x) = S_0 - S_1 \frac{x^2}{1.2} + S_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots,$$

puis

$$P_n = p_{n,0} + p_{n,1} k^2 + p_{n,2} k^4 + \dots,$$
$$Q_n = q_{n,0} + q_{n,1} k^2 + q_{n,2} k^4 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

il s'agit de la détermination des coefficients $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$; on a d'ailleurs

$$s_{n,t} = r_{n,t};$$

le problème est donc ramené à l'étude des trois premiers coefficients.

Les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les fonctions Al fournissent des relations entre les polynômes P, Q, R et leurs dérivées : celles-ci, à leur tour, donnent des relations entre les coefficients p, q, r : de ces dernières relations l'auteur tire les conséquences suivantes :

1° Les coefficients $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$, regardés comme des coefficients de n seulement, constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite;

2° La série récurrente ayant le coefficient $p_{n,t}$ pour terme général admet l'équation génératrice

$$\prod_{1}^{\eta}{}_{\tau} [z - (2\tau)^2]^{2t-2\tau^2+1} = 0;$$

les séries qui ont pour termes généraux respectifs les coefficients $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$ admettent chacune l'équation génératrice

$$\prod_{0}^{\eta}{}_{\tau} [z - (2\tau + 1)^2]^{2t-2\tau^2-2\tau+1} = 0,$$

η représentant, dans la première de ces équations, la partie entière de $\sqrt{t}$, et, dans la seconde, la partie entière de $\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{4t+1}\right)$;

3° Les formes générales des coefficients considérés, lesquelles se déduisent immédiatement des équations génératrices qui précèdent, sont données, pour $p_{n,t}$, par la formule

$$p_{n,t} = \sum_{1}^{\eta}{}_{\tau} \xi_\tau(n) [(2\tau)^2]^n;$$

pour $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$, par la formule

$$q_{n,t} = \sum_{0}^{\eta}{}_{\tau} \xi_\tau(n) [(2\tau+1)^2]^n,$$

n ayant, dans ces deux formules, les mêmes significations que dans les équations génératrices correspondantes qui précèdent, et $\xi_\tau(n)$ représentant un polynôme entier en n, du degré $2t - 2\tau^2$ dans la première formule, et du degré $2t - 2\tau^2 - 2\tau$ dans la seconde.

Escary. — Généralisation des fonctions X_n de Legendre au cas de deux entiers, ou des fonctions qui naissent du développement des expressions

$$\left[1 - 2\alpha x + \alpha^2\right]^{\pm\frac{2l+1}{2}}.$$

(47-66).

Développement de ces polynômes, qui se déduisent d'ailleurs aisément de ceux de Legendre; relations entre les fonctions consécutives; étude des équations obtenues en les égalant à zéro; étude des intégrales analogues à

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_m dx, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx, \quad \ldots.$$

Guyou. — Cinématique et Dynamique des ondes courantes sur un sphéroïde liquide. Application à l'involution de la protubérance autour d'un sphéroïde liquide déformé par l'attraction d'un astre éloigné. (69-106).

Lalanne. — De l'emploi de la Géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités. (107-130).

Dans le nombre infini de triangles possibles dont les côtés ne sont assujettis qu'à la condition d'être compris entre deux limites connues a et b, quelles sont les valeurs moyennes des trois côtés, rangés préalablement par ordre de grandeur?

Cette question est traitée par des considérations de Géométrie et de Statique élémentaire. L'auteur a imprimé, en outre, dans le corps de son travail (p. 115-123) une Note due à feu Philbert *Sur la détermination analytique de la valeur moyenne d'une fonction de plusieurs variables*.

André (*D.*). — Développements des trois fonctions $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$ suivant les puissances croissantes du module. (131-142).

L'auteur a précédemment donné les développements de ces fonctions suivant les puissances croissantes de l'argument, et les coefficients sont alors des polynômes en k^2; si l'on ordonne les séries trouvées en réunissant les termes qui multiplient une même puissance de k^2, on trouvera des résultats de la forme

$$\mathrm{Al}(x) = A_0 + A_1 k^2 + A_2 k^4 + \ldots,$$
$$\mathrm{Al}_1(x) = B_0 + B_1 k^2 + B_2 k^4 + \ldots,$$
$$\mathrm{Al}_2(x) = C_0 + C_1 k^2 + C_2 k^4 + \ldots,$$

où les A, B, C sont des séries que l'on peut ordonner suivant les puissances de x.

M. André traite de la sommation de ces séries, qui rentrent d'ailleurs, comme cas particuliers, dans les séries étudiées par lui dans un Mémoire inséré dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (2e série, t. VIII, p. 151). Voici les résultats auxquels il parvient :

$$A_t = \sum g_{i,j} x^{2i} \cos 2jx + \sum h_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx,$$

les $\sum$ s'étendant, le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers non négatifs i et j qui satisfont à la relation

$$i + j^2 \leqq t,$$

et le second à tous ceux qui satisfont à la relation

$$i + j^2 \leqq t - 1;$$

$$B_t = \sum g_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \sum h_{i,j} x^{2i-1} \cos(2j+1)x.$$

$$C_t = \sum g_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \sum h_{i,j} x^{2i-1} \sin(2j+1)x.$$

Dans ces deux dernières formules, les $\sum$ s'étendent, le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers non négatifs i et j qui satisfont à la relation

$$i + j^2 + j \geqq t,$$

le second à tous ceux qui satisfont à la relation

$$i + j^3 + j \geqq t - 1.$$

Hall (*A.*). — Observations et orbites des satellites de Mars avec les éphémérides pour 1879. *Traduction et résumé par M. P. Guieysse.* (143-162).

Historique de la découverte, par M. Hall, des deux satellites de Mars, *Deimos* et *Phobos* : discussion des observations, calculs relatifs aux orbites et aux éphémérides.

Boussinesq. — Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et des mouvements des solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres. (163-192).

I. Caractère distinctif des modes d'équilibre que présentent les corps très-allongés ou très-aplatis (tiges et plaques).

II. Des modes d'équilibre d'un prisme qui servent de type à ceux d'un tronçon de tige.

III. Application à la théorie des tiges.

Sourander. — Sur l'équation dont dépendent les inégalités séculaires des planètes. (193-208).

L'auteur démontre la proposition de Kummer sur la décomposition en sept carrés du discriminant de cette équation dans le cas où elle est du troisième degré.

Dostor (*G.*). — Propriétés générales des polyèdres réguliers étoilés. (209-226).

I. Relations générales entre les rayons des trois sphères, l'une inscrite à un polyèdre régulier quelconque, l'autre tangente aux arêtes et la troisième circonscrite au polyèdre régulier.

II. Inclinaison mutuelle des faces adjacentes dans les polyèdres réguliers.

III. Expressions générales des rayons des trois sphères, en valeur de l'arête des polyèdres réguliers.

Resal (*H.*). — Résumé d'une conférence sur la théorie mathématique de l'élasticité faite aux élèves de l'École Polytechnique (promotion de 1877-1879). (227-248).

Sommations qui représentent les composantes des pressions. — Expression des pressions en fonction des déplacements. — Interprétation géométrique des formules qui représentent les pressions intérieures. — De la torsion des prismes. — Application au cylindre elliptique. — De la flexion d'un prisme. — Équation à laquelle doit satisfaire le périmètre pour que les hypothèses précédemment faites soient admissibles. — Deuxième solution du problème au moyen de fonctions algébriques.

Laurent. — Mémoire sur les équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue. (149-284).

La méthode proposée par M. Laurent pour l'intégration d'un système (complètement intégrable) d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, à une seule fonction inconnue, repose sur la théorie des systèmes aux différentielles totales, théorie qu'il commence par rappeler dans ses traits essentiels, en simplifiant la démonstration de M. Mayer relative aux conditions d'intégrabilité d'un tel système. Il parvient aux conclusions suivantes :

Désignons par $f_1, f_2, \ldots f_n$ des fonctions données des variables $x_1, x_2, \ldots x_m$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et des dérivées partielles $p_1, p_2, \ldots, p_m$ d'une fonction inconnue u prises par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_m$; tout système d'équations aux dérivées partielles simultanées à une seule fonction inconnue u, ne renfermant pas explicitement la fonction u elle-même, pourra être présenté sous la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t_1} = f_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t_2} = f_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial t_n} = f_n;$$

cela posé, si les équations dont le type est

$$(2) \qquad \begin{cases} du = p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m + f_1 dt_1 + \ldots + f_n dt_n, \\ -dx_i = \frac{\partial f_1}{\partial p_i} dt_1 + \frac{\partial f_2}{\partial p_i} dt_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial p_i} dt_n, \\ dp_i = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dt_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_i} dt_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_i} dt_n, \end{cases}$$

forment un système d'équations aux différentielles totales que l'on puisse intégrer de telle sorte que pour $t_1 = t_1^0, \ldots, t_n = t_n^0$ les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, u se réduisent à $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0, u^0$ respectivement, les équations (1) seront satisfaites par la valeur de u que l'on obtiendra en éliminant $x_1^0, \ldots, x_m^0$, $p_1^0, \ldots, p_m^0, p_1, p_2, \ldots, p_m$ entre les intégrales du système (2) et les équations

$$u^0 = \varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$$

$$p_1^0 = \frac{\partial\varpi}{\partial x_1^0}, \quad p_2^0 = \frac{\partial\varpi}{\partial x_2^0}, \quad \ldots, \quad p_m^0 = \frac{\partial\varpi}{\partial x_m^0},$$

où ϖ désigne une fonction arbitraire.

Réciproquement, si l'on connaît une solution des équations (1) renfermant, outre la constante additive que l'on peut toujours introduire, m autres constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, le système (3) sera intégrable et les intégrales de ce système seront données par les formules

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} = -\beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ tirées de ces équations et portées dans l'équation

$$du = p_1\, dx_1 + \ldots + p_m\, dx_m + f_1\, dt_1 + \ldots + f_n\, dt_n$$

rendront cette équation intégrable, et la valeur de u que l'on en déduira sera précisément la solution complète en question.

L'auteur obtient ensuite les conditions d'intégrabilité du système (2), (3), en appliquant à ce système les conditions générales d'intégrabilité d'un système aux différentielles totales, traite comme exemple un système d'équations linéaires, discute les opérations à effectuer pour opérer l'intégration du système (3), montre finalement comment l'intégration d'un système de n équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue de $m+n$ variables, ne contenant pas explicitement cette fonction inconnue, dépend de l'intégration d'un seul système d'équations canoniques contenant $2m$ équations, indique quelques simplifications obtenues par l'application des méthodes de Jacobi et de Mayer et enfin traite un exemple particulier.

Halphen. — Sur certaines propriétés métriques relatives aux polygones de Poncelet. (285-292).

Le Mémoire de M. Weill (*Journal de Mathématiques*, t. IV, p. 265) sur les polygones inscrits à un cercle, circonscrits à un autre, donne à M. Halphen l'occasion de montrer comment la théorie des fonctions doublement périodiques peut s'appliquer à la théorie des polygones de Poncelet, qui, ainsi que l'a montré Jacobi, constituent une représentation de la multiplication de l'argument dans les fonctions doublement périodiques à deux infinis.

$F(z)$ étant une telle fonction, on sait qu'il existe une équation algébrique symétrique en x, x_1 du second degré par rapport à ces deux variables entre

$$x = F(z), \quad x_1 = F(z+a);$$

réciproquement à une telle équation en x, x_1 correspond un tel mode de représentation des deux variables. Soient maintenant deux coniques A, B et soient P, P_1 les points de rencontre de A avec une tangente à B; en supposant les points de la

conique A représentés uniformément au moyen d'un paramètre variable, on voit que le mode de représentation qui vient d'être exposé convient aux paramètres des deux points P, P_1. Si donc on construit une ligne polygonale inscrite dans A, circonscrite à B, les paramètres successifs des sommets P, $P_1, \ldots, P_{m-1}$ seront $F(z)$, $F(z+a), \ldots, F[z+(m-1)a]$.

Pour que la ligne polygonale se ferme et forme un polygone de m côtés, il faut et il suffit qu'on ait

$$F(z+ma) = F(z);$$

cette égalité a lieu pour $2z+ma = \alpha+\alpha'$, α et α' étant les infinis de $F(z)$; cette équation détermine quatre points particuliers P. Si l'on prend l'un d'eux pour le premier sommet de la ligne polygonale, cette ligne se replie sur elle-même et se ferme sans constituer un polygone véritable. On voit aisément quels sont ces points P. Si m est un nombre pair, P est le sommet de rang $\frac{m}{2}+1$ d'une ligne polygonale dont le premier sommet est l'un des quatre points communs à A et à B. Si m est un nombre impair, P est le sommet de rang $\frac{m+1}{2}$ d'une ligne polygonale dont l'extrémité est le point de contact de A avec une des tangentes communes.

Soient ω, ω' les périodes de $F(z)$. Si l'on a $ma = p\omega + p'\omega'$, l'équation

$$F(z+ma) = F(z),$$

a lieu quel que soit z : d'où le théorème de Poncelet sur les polygones inscrits à une conique, circonscrits à une autre.

Cela posé, les propositions de la théorie des fonctions doublement périodiques que M. Halphen interprète par cette méthode sont les suivantes :

Soient $a = \alpha - \alpha'$ la différence des *deux* infinis d'une fonction doublement périodique $F(z)$; la somme

$$\varphi(z) = F(z) + F(z+a) + \ldots + F[z+(m-1)a]$$

n'a que deux infinis α et $\alpha' - (m-1)\alpha$.

Si le produit ma est la somme de multiples des deux périodes, $\varphi(z)$ est une constante.

Soient α et α', ω et ω' les périodes de $F(z)$; soient aussi m, n, p, p' des entiers tels que l'on ait

$$\frac{\alpha-\alpha'}{n} = \frac{p\omega+p'\omega'}{m} = a;$$

la somme précédemment désignée par $\varphi(z)$ est indépendante de a.

Soient α l'un des infinis et β l'un des zéros de la fonction $F(z)$; si l'on a

$$\frac{\beta-\alpha}{n} = \frac{p\omega+p'\omega'}{m} = a,$$

le produit

$$\psi(z) = F(z)F(z+a)F(z+2a)\ldots F[z+(m-1)a]$$

est indépendant de z.

Les premières propositions conduisent M. Halphen aux théorèmes fondamentaux de M. Weill et à des généralisations de ces théorèmes; la dernière proposition lui fournit le théorème suivant :

« Soient Ω, Ω′ deux polygones, le premier variable, le second fixe, inscrits dans un cercle et circonscrits à une conique : le produit des distances d'un sommet fixe de Ω′ à tous les sommets de Ω est au produit des distances d'un autre sommet fixe de Ω′ à tous les sommets de Ω dans un rapport constant. »

Weichold (*G.*). — Solution du cas irréductible, c'est-à-dire du problème consistant à exprimer les racines d'une équation complète du troisième degré comme fonctions algébriques, finies et numériquement calculables sous forme finie, des coefficients de cette équation, dans le cas où ces racines sont toutes à la fois réelles et au moins une d'elles commensurable. (293-318).

Ce titre est accompagné de la Note suivante :

« De cette définition du problème du cas irréductible il résulte évidemment :

» 1° Que la résolution d'une pareille équation au moyen des fonctions trigonométriques n'est nullement une solution du cas irréductible, pas plus que la division d'un angle en trois parties égales au moyen d'un rapporteur ne serait la solution du problème de la trisection d'un angle, puisque cette résolution revient en dernier lieu à la consultation de Tables où les racines de toutes les équations particulières de ce genre sont calculées d'avance par *approximation* et spécifiées en face de chaque cas particulier. Les racines de l'équation proposée ainsi, exprimées au moyen des fonctions trigonométriques, ne sont d'ailleurs ni fonctions algébriques, ni fonctions finies des coefficients de cette équation ;

» 2° Que le cas où les trois racines de l'équation proposée sont toutes incommensurables à la fois n'entre pas dans le problème du cas irréductible, puisqu'il serait aussi absurde d'exiger que l'on exprimât ces racines numériquement exactes et sous forme finie que de vouloir exiger que l'on extraie une racine d'un nombre entier positif qui n'est pas une puissance exacte du même degré d'un autre nombre entier exactement et sous forme finie, et puisque la détermination approximative des valeurs de ces racines incommensurables peut être effectuée par la formule de Cardan, en développant les racines cubiques qu'elle renferme en séries convergentes. »

Resal. — Note sur les conditions de résistance d'un tube elliptique, dont l'épaisseur est faible, soumis à l'action d'une pression uniforme intérieure. (319-328).

Boussinesq. — Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres. (329-342).

Suite du Mémoire portant le même titre. Équation d'équilibre d'une plaque.

Jordan (*C.*). — Sur les covariants des formes binaires. (343-378).

Soient $a, b, c, \ldots$ un système de formes binaires en nombre quelconque, dont les ordres respectifs ne surpassent pas N. Tout covariant de ce système sera une fonction linéaire de produits RST ainsi définis :

R est un covariant dont l'ordre O et le degré D par rapport aux coefficients sont

limités par les inégalités suivantes :

$$O < 2N^2,$$
$$D < (9N^2 - O)3^{\rho+1}.$$

où ρ est le plus grand entier satisfaisant à l'inégalité

$$\rho - 1 < \frac{\log \frac{N}{4}}{\log \frac{4}{3}};$$

S est un produit de covariants dont l'ordre ne dépasse pas $2N - 2$ et dont le degré ne surpasse pas $2.3^{\rho+1}$.

T est un produit d'invariants dont le degré est inférieur à $(7N - 5)3^{\rho+1}$.

Telle est la proposition principale à la démonstration de laquelle est consacré le Mémoire de M. Jordan ; toutefois l'auteur montre qu'on peut encore resserrer les limites, en ne s'astreignant plus à leur donner une forme aussi simple que précédemment, et établit le théorème suivant :

Tout covariant d'un système de formes d'ordre $\overline{\gtrless} N$ peut s'exprimer en fonction entière de covariants dont l'ordre O ne surpasse pas la plus grande des limites suivantes :

$$N, \quad 2N - 2, \quad N\delta - 2\varphi(\delta).$$

δ étant le plus grand entier qui satisfasse à l'inégalité

$$f(\delta) < \frac{N}{2};$$

f et φ sont des fonctions numériques définies par les égalités suivantes :

$$f(i) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2,$$
$$f(2i+3) = f(2i+2) + 2E\left[\frac{f(i+3)}{4}\right],$$
$$f(2i+2) = f(2i+1) + 2E\left[\frac{f(i+2) - 2}{4}\right],$$
$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 3.$$
$$\varphi(i) = \varphi(i-1) + f(i),$$

qui se calculent aisément de proche en proche.

On trouve ainsi pour

$$N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

les limites

$$1, 2, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 22, 26.$$

Mathieu (*É.*). — Mémoire sur la théorie des perturbations des mouvements des planètes. (379-404).

M. Mathieu s'est proposé de trouver des séries qui expriment les coordonnées de la comète dans le plan de son orbite et le temps t au moyen d'une même variable et qui, lorsque l'excentricité est très-voisine de l'unité, soient très-convergentes dans

toute l'étendue de l'orbite. De plus, de même que les formules connues pour les développements de r et Φ, dans la théorie des planètes, sont très-commodes pour étudier le mouvement troublé dans des orbites presque circulaires, il a cherché à approprier les formules nouvelles au calcul des perturbations d'un corps qui se meut dans une orbite extrêmement allongée.

Pepin. — Sur l'équation

$$7x^4 - 5y^4 = 2z^2.$$

(405-424).

La résolution en nombres entiers des équations comprises dans la formule

$$ax^4 + by^4 = cz^2$$

est le plus souvent impossible; mais, lorsqu'une équation de cette sorte admet une solution, elle en admet une infinité qu'on déduit successivement l'une de l'autre au moyen de diverses formules; toutefois, il n'est pas toujours possible d'affirmer que, en opérant ainsi, on ne laisse échapper aucune solution : pour l'exemple particulier qu'il traite, le P. Pepin donne diverses méthodes permettant d'obtenir avec certitude toutes les solutions exprimées par des nombres inférieurs à une limite donnée.

J. T.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE (¹).

Tome VII; 1878. 2e série.

Gernez (D.). — Recherches sur la cristallisation des solutions sursaturées. (9-72).

Gourier. — Sur l'équation de Kepler. (73-76).

L'auteur a rédigé, d'après les indications de M. Hermite, la démonstration d'une propriété importante des racines de l'équation de Kepler.

L'équation

$$z - \alpha - \mathrm{E}\sin z = 0,$$

où α représente un angle donné compris entre 0 et π et E une constante positive inférieure à l'unité, a une racine réelle comprise entre 0 et π et une infinité de racines imaginaires; en divisant le plan sur lequel on figure les valeurs de z par des bandes parallèles à l'axe des y, et distantes de π, chaque bande de rang impair du côté des x positives comprend deux racines conjuguées, et de même chaque bande de rang pair du côté des x négatives.

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 149.

Si l'on considère la bande de rang $2k+1$ du côté des x positives, et si l'on représente par $x \pm yi$ les deux racines comprises dans cette bande, la valeur de x, pour les grandes valeurs de k, est à peu près égale à $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, et celle de y à $\log \frac{2}{E} + \log\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Lemonnier (*H.*). — Mémoire sur l'élimination (Ire Partie). (77-96).

Dans la première Partie de ce Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences le 26 juillet 1875, l'auteur met en évidence l'intime liaison qui unit les méthodes d'élimination d'Euler, de Cayley, de Bézout, de Cauchy; il en déduit l'expression et la formation, par des déterminants, des conditions suffisantes et nécessaires pour que deux équations entières en x aient p racines communes, ainsi que de l'équation propre à donner ces p racines.

Darboux (*G.*). — Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux (Ire Partie). (97-150).

Le Mémoire précédent constitue la première Partie d'un travail étendu, qui a paru en entier dans le Recueil. Il contient le développement méthodique des recherches faites depuis assez longtemps par l'auteur et dont les principaux résultats ont été donnés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, LXXXIII et LXXXIV. Voici les titres des différents articles avec l'indication de leur contenu :

§ I. Définition d'une opération différentielle et formules qui s'y rapportent. L'opération dont il est question ici est définie par l'équation

$$\delta_u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

§ 2. Application à la formation de l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait le paramètre d'une famille de surfaces faisant partie d'un système orthogonal. Cette équation est donnée sous une forme simple et vérifiée par comparaison avec des résultats donnés précédemment par MM. Bouquet et Puiseux. L'auteur retrouve aussi la forme irrationnelle très-élégante due à M. Cayley.

§ 3. Intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont toutes les solutions donnent une famille de surfaces faisant partie d'un système orthogonal. Cette équation est la suivante :

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= f(u)(x^2 + y^2 + z^2) + 2xf_1(u) + 2yf_2(u) + 2zf_3(u) + \varphi(u).$$

L'auteur montre qu'on peut en trouver une solution complète en considérant une famille de sphères. Cette solution complète une fois obtenue, on pourra en déduire la solution générale.

§ 4. Remarques nouvelles sur l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

Cet article se rapporte à différentes transformations de l'équation aux dérivées partielles du problème. Entre autres applications, nous citerons la formation de

l'équation aux dérivées partielles qui caractérise toute surface qui, par son déplacement, peut engendrer une des trois familles de surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal.

§ 5. Formation de l'équation aux dérivées partielles quand u est une fonction implicite de x, y, z. Comme vérification de l'équation, l'auteur retrouve la condition obtenue par M. Maurice Levy pour qu'une des familles du système triple orthogonal soit composée de surfaces du second degré ayant les mêmes plans de symétrie. Il démontre d'une manière générale que, si une famille de surfaces faisant partie d'un système triple est composée de surfaces ayant chacune un plan de symétrie, les plans de symétrie de toutes ces surfaces doivent coïncider, excepté dans certains cas particuliers qui sont nettement définis par la démonstration elle-même.

§ 6. Notions sur les coordonnées pentasphériques.

Cet article contient un résumé, nécessaire pour les applications qui vont suivre, des principales propositions relatives à ce système de coordonnées dans lequel un point est défini par ses puissances par rapport à cinq sphères, deux à deux orthogonales.

§ 7. Des systèmes orthogonaux formés d'une famille de cyclides.

§ 8. Extension de la méthode de formation de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre à l'étude de problèmes différents.

L'auteur montre que les méthodes qu'il a précédemment fait connaître peuvent s'appliquer dans d'autres cas. Il résout en particulier la question suivante. On sait qu'il existe une infinité de systèmes doubles orthogonaux définis de la façon suivante : la première famille (Σ) est formée de surfaces lieux des points dont la somme des distances à deux surfaces fixes (A) et (B) est constante ; la deuxième (Σ') est formée des surfaces lieux des points pour lesquels la différence des distances aux mêmes surfaces est constante. On demande si l'on peut adjoindre à ces deux familles de surfaces une troisième formée de surfaces les coupant à angle droit.

Lemonnier (*H.*). — Mémoire sur l'élimination (II[e] Partie). (151-214).

Geoffroy (*L.*). — Mémoire sur la résistance qu'éprouve une surface mobile de la part d'un milieu dans lequel elle se meut. (215-226).

L'auteur commence par considérer la résistance normale sur l'élément superficiel, et il prend pour base la loi de Newton, d'après laquelle cette résistance est proportionnelle au carré de la vitesse V de l'élément et au carré du cosinus de l'angle φ que fait la normale à l'élément superficiel avec la direction de la vitesse V. Il étudie d'abord les surfaces de résistance nulle et établit que ce sont des surfaces hélicoïdes ; puis il recherche les lignes de résistance nulle sur une surface mobile quelconque, le lieu des points d'une surface mobile où la résistance est la même par unité de surface et enfin le point de la surface où la résistance est maximum.

Il traite ensuite du frottement du milieu sur la surface mobile et il admet que ce frottement est proportionnel en chaque point au carré de la vitesse projetée sur le plan tangent à la surface. Le travail se termine par l'étude spéciale de l'hélice motrice des navires. L'auteur retrouve la formule déjà établie par MM. Guède et Jay dans leur étude sur cette question d'application.

Darboux (*G.*). — Mémoires sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux. IIe Partie. (227-260).

L'auteur se propose d'étendre les résultats établis dans la première Partie de son travail aux systèmes orthogonaux à n variables. Pour cela, il considère n fonctions $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ satisfaisant aux relations d'orthogonalité, et il démontre d'abord que chacune de ces fonctions devra satisfaire à deux groupes distincts d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre. Les équations du premier groupe, au nombre de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, sont tout à fait analogues à celle que l'on connaît pour le cas de trois variables; mais les $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ équations du second groupe sont nouvelles. M. Darboux démontre que ces équations sont suffisantes et que, toutes les fois qu'une fonction u satisfera à chacune d'elles, on pourra lui adjoindre $n-1$ fonctions formant avec elle un système orthogonal.

Comme application, l'auteur cherche les systèmes orthogonaux pour lesquels on aura

$$u = X_1 + \ldots + X_n,$$

X_i désignant une fonction de la seule variable x_i, et il montre que les fonctions X_i doivent satisfaire à l'équation du troisième ordre

$$X'_i X'''_i - 2 X''^2_i = a X''_i + b,$$

identique à celle qui a été obtenue par M. Serret dans l'étude de la même question pour le cas de trois variables. Parmi les résultats obtenus par l'auteur, nous citerons les suivants :

La famille

$$u = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$

forme un système orthogonal avec les $n-1$ familles obtenues par l'élimination de λ entre l'équation

$$v = \left(\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}\right)^{m_n}$$

et sa dérivée par rapport à λ.

La famille

$$u = xyz$$

forme un système orthogonal avec les deux familles de surfaces représentées par les équations

$$\sqrt{v} = \sqrt{x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2} \pm \sqrt{x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2},$$

résultat déjà donné sans démonstration par M. Cayley (ω désigne une racine cubique de l'unité).

Les surfaces algébriques représentées par les équations

$$\frac{xy}{z(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)} = u,$$

$$\arcsin \frac{2R\sqrt{x^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2} \pm \arcsin \frac{2R\sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2 - R^2} = \text{const.}$$

forment un système triple orthogonal.

Les enveloppes des surfaces représentées par l'équation

$$u = \left(\lambda + \frac{x^2}{m}\right)^m \left(\lambda + \frac{y^2}{n}\right)^n \left(\lambda + \frac{z^2}{p}\right)^p \lambda^q,$$

où l'on fait varier λ, forment un système orthogonal triple et un.

Dans le § XI *bis*, M. Darboux généralise les résultats précédents, et il détermine les lignes de courbure d'une classe étendue de surfaces. Voici, en se bornant au cas de deux variables, les deux théorèmes principaux obtenus par l'auteur :

Soient X, Y, Z trois fonctions satisfaisant aux équations différentielles

$$\begin{aligned} X'X''' &= 2(X'' - a)(X'' - b), \\ Y'Y''' &= 2(Y'' - a)(Y'' - b), \\ Z'Z''' &= 2(Z'' - a)(Z'' - b). \end{aligned}$$

Si l'on détermine trois valeurs de λ par l'équation

$$\frac{X'^2}{\lambda - X''} + \frac{Y'^2}{\lambda - Y''} + \frac{Z'^2}{\lambda - Z''} + A = 0,$$

où A désigne une constante, les trois fonctions

$$\begin{aligned} u_k = {} & X'^2 \int_\alpha^{\lambda_k} \frac{(\lambda - a)^{\frac{a}{b-a}}(\lambda - b)^{\frac{b}{a-b}}}{\lambda - X''}\, d\lambda + Y'^2 \int_\alpha^{\lambda_k} \frac{(\lambda - a)^{\frac{a}{b-a}}(\lambda - b)^{\frac{b}{a-b}}}{\lambda - Y''}\, d\lambda \\ & + Z'^2 \int_\alpha^{\lambda_k} \frac{(\lambda - a)^{\frac{a}{b-a}}(\lambda - b)^{\frac{b}{a-b}}}{\lambda - Z''}\, d\lambda + A \int_\alpha^{\lambda_k} (\lambda - a)^{\frac{a}{a-b}}(\lambda - b)^{\frac{b}{b-a}} d\lambda, \end{aligned}$$

où λ_k est une des trois racines de l'équation en λ et où α désigne celui des deux nombres a et b pour lesquels l'exposant de $\lambda - \alpha$ est plus grand que -1, ces trois fonctions forment un système orthogonal. Dans le cas où A est nul, on retrouve les systèmes de M. Serret.

Le second théorème se rapporte aux lignes de courbure et peut s'énoncer ainsi :

Les lignes de courbure de la surface

$$X + Y + Z = C,$$

où les trois fonctions X, Y, Z *satisfont aux équations*

$$\begin{aligned} X'X''' &= 2K(X'' - a)(X'' - b), \\ Y'Y''' &= 2K(Y'' - a)(Y'' - b), \\ Z'Z''' &= 2K(Z'' - a)(Z'' - b), \end{aligned}$$

sont à l'intersection de la surface et des enveloppes des surfaces

$$u = \int_\alpha^\lambda \varpi(\lambda)\left(\frac{X'^2}{\lambda - X''} + \frac{Y'^2}{\lambda - Y''} + \frac{Z'^2}{\lambda - Z''}\right) d\lambda,$$

où $\varpi(\lambda)$ *est une fonction satisfaisant à l'équation*

$$k\varpi'(\lambda)(\lambda - a)(\lambda - b) = -\lambda\varpi(\lambda)$$

et où α est un des trois nombres a, b, x défini par la condition

$$\frac{\varpi(\alpha)(\alpha-a)(\alpha-b)}{\alpha}=0,$$

qu'il est toujours possible de vérifier.

Les applications de cette proposition sont nombreuses. Elle donne les lignes de courbure des surfaces de Lamé

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^m+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1$$

et de plusieurs surfaces assez générales du troisième et du quatrième ordre, par exemple les suivantes :

$$ax^m+by^m+cz^m+\mathrm{K}(x^2+y^2+z^2)=\mathrm{C},$$
$$ax^3+by^3+cz^3+\alpha(x^2+y^2+z^2)=\mathrm{C}.$$

Il y a aussi des surfaces transcendantes; voici l'une des plus simples

$$\frac{\cos mx}{m^2}+\frac{\cos ny}{n^2}+\frac{\cos pz}{p^2}=\mathrm{C}.$$

Tisserand (F.). — Sur un point important de la théorie des perturbations planétaires. (261-274).

« On sait que les éléments elliptiques des planètes sont soumis à deux genres d'inégalités, les inégalités périodiques et les inégalités séculaires : ces dernières sont d'une grande importance, surtout dans la question de la stabilité du système planétaire. Laplace a montré le premier, en 1773, que, dans la première approximation, les grands axes des orbites, seuls parmi tous les éléments elliptiques, ne contiennent pas de terme séculaires ; mais il n'avait obtenu cet important résultat qu'en tenant compte des premières et des secondes puissances des excentricités et des inclinaisons supposées très-petites. En 1776, Lagrange établit, d'un trait de plume, pour employer une expression de Jacobi, que le théorème a lieu quelque loin qu'on pousse l'approximation par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, mais en s'arrêtant à la première approximation relative aux termes proportionnels aux masses des planètes.

» Dans un Mémoire publié en 1808, Poisson fit faire un pas de plus à la question ; il arriva à démontrer l'invariabilité des grands axes, même en tenant compte des termes affectés des carrés et des produits des masses, termes qui sont introduits par la seconde approximation ; il réussit à montrer que cette approximation ne peut amener, dans les expressions des grands axes, aucun terme proportionnel au temps. La démonstration de Poisson comprend deux parties; la première est très-simple : c'est celle dans laquelle on examine l'effet des variations des éléments de la planète troublée; la seconde partie, où l'on tient compte des variations des éléments de la planète troublante, est très-compliquée; cela tient à ce que les fonctions perturbatrices ne sont pas les mêmes dans les deux cas; elles diffèrent, comme on le sait, par les termes en $\frac{xx'+yy'+zz'}{r^3}$ et $\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}$. Si les fonctions perturbatrices avaient été les mêmes, ou bien avaient été dans un rapport constant, la

seconde partie de la démonstration de Poisson aurait été identique à la première, et le théorème se serait ainsi trouvé établi d'une façon très-simple.

» Le Mémoire de Poisson rappela l'attention de Lagrange sur ce sujet, et, quelques mois après, il présentait à l'Académie des Sciences un travail dont nous voulons donner une idée.

» Il rapporte les planètes, non plus au centre du Soleil, mais au centre de gravité du Soleil et des planètes; il obtient alors des équations symétriques, dans lesquelles la fonction perturbatrice est la même pour toutes les planètes ; il peut donc appliquer la première partie de la démonstration de Poisson et prouver, d'une façon simple, l'invariabilité des grands axes, en ayant égard aux termes de l'ordre du carré des forces perturbatrices; mais il s'agit des grands axes des orbites elliptiques variables, décrites par les planètes autour du centre de gravité considéré plus haut. Il fallait passer de là à l'invariabilité des grands axes des orbites décrites autour du centre du Soleil ; soient $2a$ le grand axe de l'orbite d'une planète dans le premier cas, 2α dans le second. Lagrange arrive à trouver la relation

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi_2,$$

φ_1 étant une fonction des coordonnées des deux planètes, comme φ_2; mais φ_1 est une fonction du premier ordre relativement aux masses, tandis que φ_2 est du second ordre. Si donc on néglige le troisième ordre, il suffira de substituer dans φ_2 les valeurs x, y, z, x', y', z' exprimées avec le temps et les éléments elliptiques constants; on n'obtiendra ainsi aucun terme proportionnel au temps; dans φ_1, il faut remplacer les coordonnées par leurs valeurs exprimées au moyen du temps et des éléments elliptiques variables fournis par la première approximation. Cette substitution pourra introduire dans φ_1 un terme proportionnel au temps ; mais ce terme disparaîtra quand on formera $\frac{d\varphi_1}{dt}$. Telle est la méthode suivie par Lagrange; malheureusement l'expression à laquelle il est arrivé pour exprimer la différence entre $\frac{1}{2a}$ et $\frac{1}{2\alpha}$, au moyen de la somme $\frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi_2$, est inexacte, par suite de plusieurs fautes de calcul, comme l'a démontré M. J.-A. Serret dans sa nouvelle édition des *Œuvres de Lagrange*, et la démonstration se trouve ainsi réduite à néant.

» J'ai remarqué qu'il suffisait de rapprocher le commencement du Mémoire de Lagrange de certains passages du célèbre Mémoire de Jacobi *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps*, pour donner une démonstration très-simple et très-satisfaisante du théorème de Poisson.

» Les passages du Mémoire de Jacobi auxquels je viens de faire allusion ont été repris et développés par M. Radau (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. V). Il a montré dans ce travail que, si l'on rapporte le mouvement de la première planète au Soleil, celui de la deuxième au centre de gravité de la première planète et du Soleil, celui de la troisième au centre de gravité des deux premières planètes et du Soleil, et ainsi de suite, les coordonnées relatives dépendent d'équations différentielles symétriques, dans lesquelles la fonction perturbatrice est la même. En partant de là, j'ai donc vu que la première partie de la démonstration de Poisson s'appliquait comme dans le cas considéré par Lagrange, où l'on rapporte tous les mouvements des planètes au centre de gravité du Soleil et de ces planètes ; donc tous les grands axes des orbites elliptiques variables ne contiennent aucun terme proportionnel au temps, en ayant égard aux carrés et au produit des masses ; mais le mouvement de la première planète se trouve tout rapporté au

Soleil ; donc, au lieu d'avoir, comme Lagrange,

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi_2,$$

on a simplement

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{2\alpha},$$

et le théorème est ainsi démontré pour la première planète. Il est bien vrai que la démonstration n'est pas faite pour les autres planètes ; mais rien ne s'oppose à ce qu'on fasse jouer à la seconde planète le rôle assigné à la première, et l'on voit ainsi que le théorème a lieu pour toutes les planètes ».

Darboux (*G.*). — Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux. III[e] Partie. (275-349).

Dans cette troisième et dernière Partie de son long travail, l'auteur s'est proposé de donner la solution complète d'une question importante et difficile dont il avait déjà esquissé l'étude dans sa Thèse insérée au Tome III du même Recueil.

Dans cette Thèse M. Darboux avait étudié la méthode que Lamé a fait connaître dans les *Leçons sur les coordonnées curvilignes* pour la recherche et l'étude des systèmes orthogonaux. Cette étude l'avait conduit à des résultats nouveaux, consignés soit dans son travail primitif, soit dans des Notes insérées aux Tomes LXVII, LXVIII et LXIX des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. L'auteur reprend d'abord cette recherche en l'étendant au cas de n variables et en étudiant d'une manière plus complète les propriétés de chaque groupe d'équations.

Considérant l'équation

$$dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 = H_1^2\, d\rho_1^2 + \ldots + H_n^2\, d\rho_n^2,$$

il étudie les relations aux dérivées partielles auxquelles doivent satisfaire les quantités H_i, et il montre qu'elles se ramènent à deux types différents. Si l'on pose

$$\beta_{kk'} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_{k'}}{\partial\rho_k}, \quad \beta_{kk} = 0,$$

on aura les deux systèmes

$$(1) \qquad \frac{\partial\beta_{kk'}}{\partial\rho_{k''}} = \beta_{kk''}\beta_{k''k'}, \quad (k \gtrless k' \gtrless k'')$$

et

$$(2) \qquad \frac{\partial\beta_{kk'}}{\partial\rho_k} + \frac{\partial\beta_{k'k}}{\partial\rho_{k'}} + \beta_{1k}\beta_{1k'} + \ldots + \beta_{nk}\beta_{nk'} = 0, \quad (k \gtrless k').$$

Une première remarque, déjà faite pour le cas de $n=3$ par M. Combescure, est la suivante : à un même système de valeurs des β satisfaisant aux équations précédentes correspondent une infinité de systèmes orthogonaux. Comme application M. Darboux considère le système orthogonal à n variables, fondé sur les formules généralisées de la transformation par rayons vecteurs réciproques, et il en déduit un système orthogonal contenant n fonctions arbitraires d'une variable.

On vient de voir que les quantités H doivent satisfaire aux deux systèmes (1) et (2) ; mais on peut se demander ce qui arrive si elles satisfont seulement au premier de

ces systèmes. L'auteur établit alors que l'on est conduit à un système de coordonnées curvilignes jouissant seulement d'une partie des propriétés des systèmes orthogonaux. Par exemple, dans le cas de $n = 3$, il est formé de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées. Cette recherche conduit en particulier au théorème suivant :

Pour que deux systèmes de coordonnées curvilignes puissent se correspondre de telle manière qu'aux points correspondants les plans tangents aux trois surfaces aient la même direction dans les deux systèmes, il est nécessaire et suffisant que les surfaces de chaque système se coupent mutuellement suivant des systèmes de lignes conjuguées sur chacune de ces surfaces.

L'emploi des systèmes orthogonaux est soumis à de telles restrictions, ces systèmes sont si peu nombreux que l'on sera nécessairement conduit, en Physique mathématique, à adopter des systèmes de coordonnées curvilignes obliques. Le groupe particulier formé de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées pourra alors être employé avec avantage. M. Darboux, au § XV de son travail, fait connaître plusieurs systèmes jouissant de cette propriété.

Le § XVI contient la démonstration d'une proposition déjà donnée par l'auteur au Tome LXIX des *Comptes rendus*. M. Darboux avait montré comment de la connaissance d'un système orthogonal à n variables on peut déduire des systèmes orthogonaux à $n-1$, puis $n-2, \ldots$ variables. Depuis ces premières études de l'auteur, M. Lie a établi, dans les *Nachrichten* de Gœttingue, des résultats du même genre. L'article XVI contient le développement des recherches antérieures de l'auteur, en même temps que des résultats nouveaux et différents de ceux de M. Lie.

Après ces études générales, se trouve abordée la solution générale d'un problème étendu qui a son origine dans un beau théorème de M. Bertrand. Dans son Mémoire sur les systèmes orthogonaux *isothermes* (*Journal de Liouville*, t. IX, p. 317) M. Bertrand a démontré que chacune des surfaces qui composent un système orthogonal peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. Mais la réciproque n'est pas vraie, et l'on connaît au moins un système, celui des cyclides homofocales, qui, sans être isotherme, jouit de la même propriété. On peut donc se proposer de chercher tous les systèmes orthogonaux qui jouissent de la propriété que toute surface de l'une quelconque des familles soit divisible en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, et l'on sera conduit à des systèmes entre lesquels il n'y aura plus qu'à chercher les systèmes isothermes. Déjà, dans son travail de 1866, M. Darboux avait réuni tous les éléments nécessaires pour la solution de ce problème, beaucoup plus difficile que la recherche des systèmes à la fois orthogonaux et isothermes. D'ailleurs, des travaux récents de M. Wangerin ont montré l'intérêt qu'il y aurait à le résoudre complétement et d'une manière détaillée. L'auteur reprend donc et développe sa première méthode, et il obtient les systèmes suivants :

1° Ceux qui sont formés d'une famille de plans parallèles, de deux familles de cylindres isothermes, et les transformés de ces systèmes par la transformation par rayons vecteurs réciproques ou inversion ;

2° Les systèmes formés d'une famille de plans passant par une droite et de deux familles de surfaces de révolution ayant cette droite pour axe et dont les méridiens forment un système orthogonal isotherme, ainsi que leurs transformés par inversion ;

3° Les systèmes formés d'une famille de sphères concentriques, de deux familles de cônes isothermes orthogonaux et leurs transformés par inversion.

4° Un système pour lequel on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{N^2}\left[\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2 d\rho^2}{a} + \frac{(\rho_2 - \rho)^2 d\rho_1^2}{a_1} + \frac{(\rho - \rho_1)^2 d\rho_2^2}{a_2}\right],$$

où a, a_1, a_2 sont trois polynômes du second degré respectivement en ρ, ρ_1, ρ_2;

5° Un système pour lequel on a

$$ds^2 = \frac{1}{N^2}\left[\frac{1}{a}(\rho_1 - \rho_2)^4 d\rho^2 + \frac{1}{a_1}(\rho_2 - \rho)^4 d\rho_1^2 + \frac{1}{a_2}(\rho - \rho_1)^4 d\rho_2^2\right]$$

a, a_1, a_2 étant des constantes dont la somme est nulle;

6° Le système des cyclides homofocales;

7° Enfin un dernier système pour lequel on a

$$ds^2 = \frac{1}{M^2}\left[\frac{(\rho_1 - \rho_2)\, d\rho^2}{a} + \frac{(\rho_2 - \rho)\, d\rho_1^2}{a_1} + \frac{(\rho - \rho_1)\, d\rho_2^2}{a_2}\right],$$

où a, a_1, a_2 désignent des polynômes du troisième degré en ρ, ρ_1, ρ_2 respectivement.

Ces systèmes en comprennent beaucoup d'autres comme cas particuliers. Ainsi le système des cyclides homofocales comprend, comme cas particulier, celui qui est formé des surfaces homofocales du second degré. Pour ces différents systèmes, l'auteur donne les expressions de x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2; il n'y a d'exception que pour le dernier, qui ne paraît pas formé de surfaces algébriques.

Terquem (*A.*). — Sur les courbes dues à la coexistence de deux mouvements vibratoires perpendiculaires. (349-374).

André (*D.*). — Terme général d'une série quelconque, déterminée à la façon des séries récurrentes. (375-408).

Combescure (*E.*). — Sur les paramètres différentiels des fonctions et sur les lignes isothermes permanentes. (409-434).

Supplément au T. VII.

Chamberland (*Ch.*). — Recherches sur l'origine et le développement des organismes microscopiques. (3-94).

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT [1].

Tome IX; 1878.

Schlömilch (*O.*). — Trois problèmes de Géométrie analytique. (21-22).

Schäwen (*v.*). — Les équations diophantiques du premier degré. (105-118).

L'auteur, en s'aidant des propriétés des déterminants, ramène la résolution de n équations à $n+p$ inconnues à celle d'une équation à $p+1$ inconnues.

Prandtl. — Diverses manières de compter l'intérêt [2]. (119-122).

Il s'agit des divers produits du capital par les fractions

$$\frac{p}{100+p}, \quad \frac{p}{100}, \quad \frac{p}{100-p}.$$

Lühmann (*F. v.*) et *Schlömilch* (*O.*). — Problèmes résolus. (123-127).

Heilermann. — Remarques sur l'enseignement de l'Algèbre. (185-186).

Heilermann. — Les cinq angles polyèdres réguliers dont les faces sont des angles de polygones réguliers. (186-188).

Matthiessen (*L.*). — Les équations diophantiques du premier degré. (194-197).

Critique de l'article précédent de M. *v. Schäwen*.

Schlömilch (*O.*). — Remarques sur les valeurs-limites. (197-200).

L'auteur fait voir sur des exemples que l'on ne peut pas poser *a priori*, dans une série d'une infinité de termes, dans un produit d'une infinité de facteurs, etc., les égalités

$$\lim \Sigma u = \Sigma \lim u, \quad \lim \Pi u = \Pi \lim u, \quad \ldots.$$

---

[1] *Bulletin*, II_2, 36.

[2] Procente *auf*, *in* und *von* 100.

Junghans (*F.*). — Notice sur *Hermann Grassmann*. (250-253).

Erler. — Sur les inégalités. (261-266, 341-346).

Cet article fait ressortir les analogies et les différences entre le calcul des inégalités et celui des égalités et comble une lacune qui se fait souvent sentir dans l'enseignement élémentaire.

Reidt (*Fr.*). — Problèmes sur le triangle. (267-274).

Hoffmann (*J.-C.-V.*). — Sur la didactique. (275-278).

Biedermann (*G. v.*). — Sur le problème de Délos. (279-280).

Schuster. — Remarques sur les articles p. 132-135 et p. 497-500 du Tome VIII. (283-284).

Voir *Bulletin*, II_2, 40. Quoi qu'en dise l'auteur des remarques, l'équation $z^{\overset{0}{0}} = 1$ n'est ni vraie ni fausse; elle n'a absolument aucun sens.

Diekmann (*J.*). — Sur l'emploi des invariants dans l'enseignement. (347-355, 417-425).

Schlömilch (*O.*). — Sur les valeurs-limites des fonctions de plusieurs variables. (356-359).

Bolze. — Projet d'une nouvelle application du stéréoscope à l'Astronomie. (359-360).

Schlothe (*J.*). — Remarques sur l'article précédent. (361).

Schäwen (*v.*) et *Matthiessen* (*L.*). — Suite de la discussion sur les équations diophantiques du premier degré. (367-369).

Pick. — Sur les solutions graphiques approchées de la duplication du cube et de la quadrature du cercle, par le Dr G. Buonafalce. (383-391).

Schlömilch (*O.*). — Possibilité et réalisation. (427-430).

L'auteur n'admet pas l'impossibilité de s'appuyer sur le résultat d'une construction géométrique avant de savoir effectuer cette construction. Il suffit de pouvoir démontrer d'une manière quelconque la *possibilité* de cette construction.

Problèmes proposés et résolus. (201-204, 284-288, 370-373, 431-438).

PROGRAMMES scolaires pour les années 1877 et 1878. (77-79, 160-162, 243-247, 322-327, 400-402, 456-462).

Tome X; 1879.

Schäwen (*P. v.*). — Le flacon de Mariotte. (4-12).

Bardey (*E.*). — Remarque critique. (17-18).

Il ne serait pas permis, d'après cette remarque, de définir une puissance (entière et positive) comme un *produit de facteurs égaux*, parce que, si $aaaaa$ était une puissance, il faudrait dire que $a+a+a+a+a$ est un *produit*, ce qui ne peut se dire que de $a \times 5$. Rien n'est plus important que l'exactitude et la précision du langage; mais il nous semble que, poussées jusqu'à de pareils scrupules, ces qualités mériteraient un autre nom. Le but est de s'entendre, et, si une façon de parler universellement usitée est claire pour tout le monde, il y a quelque puérilité à vouloir la changer.

Treutlein (*P.*). — La démonstration du théorème de Brianchon et le principe de dualité. (89-98).

Günther (*S.*). — Solution, par des constructions planes, de problèmes élémentaires d'Astronomie. (99-105).

La réduction d'un problème astronomique à une construction plane, et par suite celle du calcul des éléments à une question de Trigonométrie rectiligne, est toujours avantageuse lorsque les éléments du problème sont des arcs de petits cercles.

Matthiessen (*L.*). — Sur une antique solution du problème dit *des restes*, présentée sous la forme moderne. (106-110).

Ce problème consiste dans la résolution des équations

$$N = m_1 x_1 + r_1 = m_2 x_2 + r_2 = \ldots,$$

lesquelles sont en nombre moindre d'une unité que le nombre des inconnues.

Schlegel (*V.*). — Sur la méthode d'exposition mathématique. (169-176).

Meutzner. — Sur l'enseignement de la Physique. Un Chapitre de l'Acoustique. (177-183).

Hoffmann (*J.-C.-V.*). — La réforme de l'enseignement des Sciences mathématiques et physiques dans les gymnases de Prusse. (184-190, 317-332, 401-406).

Treutlein. — Sur le théorème de Brianchon. (191-193).

Regel (*A.*). — Éloge de Carl-Anton Bretschneider. (237-242, 310-314).

Suivi de la liste de ses écrits.

Edler (*Fr.*). — Sur les maxima et les minima dans les figures planes. (245-259).

On connaît les deux Mémoires publiés par Steiner dans le *Journal de Crelle*, t. XXIV, sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général. La méthode de Steiner se distingue par son extrême simplicité. Malheureusement ses démonstrations sont entachées d'un vice commun, que Lejeune-Dirichlet signala à l'auteur et qui rend les raisonnements illusoires. Personne jusqu'ici n'avait songé à faire disparaître cette erreur; M. Edler entreprend cette correction dans le présent travail, en se bornant au cas des figures planes.

Kornek (*G.*). — Construction fausse du pentagone régulier. (264-265).

Bardey (*E.*). — Équations dont les racines forment une progression arithmétique ou géométrique. (333-345).

Weinmeister. — Addition à la Note p. 191 sur le théorème de Brianchon. (407-408).

Kurz (*A.*). — Sur le calcul des moments d'inertie. (409).

Schuster. — Encore la forme $\frac{0}{0}$ et l'égalité $7 = 13$. (409-412).

La discussion ne semble pas près de finir!

Hoffmann (*J.-C.-V.*). — Sur un problème de Schlömilch et sur le théorème de Rulf. (412-414).

Hoffmann (*J.-C.-V.*). — Sur les démonstrations inutiles. (414-415).

L'auteur cite comme inutile la démonstration de cette vérité, qu'un cercle n'a qu'un seul centre. Il est clair qu'il n'y a aucun effort à faire pour convaincre de ce fait le premier venu; seulement il n'y a aucun inconvénient d'expliquer comment cette vérité dépend d'autres vérités précédemment admises, et, quoique l'explication n'exige pas deux lignes d'écriture, ce n'en est pas moins une *démonstration*. En Géométrie, les démonstrations ont bien moins pour but d'imposer la conviction des faits que de relier méthodiquement ces faits entre eux.

Problèmes proposés et résolus. (115-119, 196-199, 266-269, 346-352, 416-421).

Programmes scolaires pour les années 1878-1879. (212-215, 297-300, 382-383, 461-463).

ГЛАСНИК Српског ученог Друштва (¹). У Београду у државној штампарији.

Tome XXV; 1869.

D. Stoïanovitch. — Le théorème de Sturm. (100-176).

Résumé des travaux sur ce théorème.

Tome XXVII; 1870.

D. Stoïanovitch. — Théorie des moindres carrés. (1-80).

Exposé des travaux anciens et récents.

Tome XLI; 1875.

L. Kléritch. — Problèmes de Cinématique. (283-315).

Quelques problèmes sur les notations géométriques et leurs applications; sur les sections coniques engendrées par le mouvement d'un mobile dans le plan.

L. Kléritch. — Applications de Statique graphique à la résolution des problèmes de Géométrie.

Le polygone des forces appliqué à la résolution des problèmes de Géométrie élémentaire.

Tome XLIII; 1876.

D. Stoïanovitch. — La réfraction de la lumière. (173-237).

Théorie mathématique de la biréfraction.

(¹) *Recueil des Mémoires de la Société savante serbe.* Belgrade, à l'imprimerie de l'État. Paraissant en un ou deux volumes par an et contenant des Mémoires sur les Sciences historiques et les Sciences exactes.

L. Kléritch. — La théorie et la construction du pantographe polaire (conchoïdographe). (238-260).

Similitude des figures obtenues par le pantographe.

Tome XLIV; 1877.

L. Kléritch. — Point d'application et grandeur de la force centrifuge d'une surface circulaire qui se meut autour de l'axe vertical sous un certain angle et avec la vitesse angulaire constante. (153-168).

L'auteur étudie le cas d'un cône et étend ainsi un théorème de Weisbach donné dans sa *Mécanique théorique*.

Tome XLV; 1877.

L. Kléritch. — Application de Dynamique graphique à la Géométrie. (174-201).

L'auteur donne la théorie de l'hodographe de Hamilton et retrouve d'intéressantes relations entre les lignes courbes et leurs tangentes. Le terme de *Dynamique graphique* est employé, à tort suivant nous, dans le sens de phoronomie.

Tome XLVI; 1878.

D. Stoïanovitch. — Diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole et rayon de courbure de la parabole. (4-19).

Les résultats obtenus par M. Kléritch retrouvés par des procédés purement géométriques.

D. Stoïanovitch. — Le rayon de courbure de l'ellipse et de l'hyperbole. (20-41).

Suite de l'article précédent.

D. Néchitch. — Essai de quadrature du cercle. (177-214).

Par un procédé ingénieux, l'auteur démontre une fois de plus l'impossibilité de la solution du problème de la quadrature du cercle.

S..

RAD JUGOSLAVENSKE ACADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI U ZAGREBU (¹).

Tome XV.

M. Seculić. — Fluorescence et calorescence. (77-86).

Essai d'une théorie mathématique de ces deux phénomènes.

Tome XIX.

S. Subić. — Théorie mécanique de la chaleur. (12-61).

Exposé des résultats de la Théorie mécanique de la chaleur.

Tome XX.

M. Sekulić. — L'aurore boréale. La cause de l'électricité terrestre. (39-60).

Tome XXIII.

M. Sekulić. — Recherches sur l'arc-en-ciel. (75-85).

Tome XXIV.

S. Subić. — Théorie mécanique de la chaleur. (150-266).

Suite du Mémoire inséré au tome XIX.

Tome XXVI.

M. Sekulić. — Physique des atomes et des molécules. (109-152).

Tome XXIX.

S. Subić. — Théorie dynamique des gaz. (1-144).

Tome XXXIV.

A. Laske. — Sur la théorie atomique. (59-74).

(¹) *Actes de l'Académie yougoslave des Sciences et des Arts.* Agram. Paraissant en quatre volumes par an et contenant des Mémoires de Sciences, de Lettres et des Arts.

Tome XL.

S. Subić. — Sur les moyens que nous donnent les Sciences mathématiques pour corriger les résultats des expériences de Physique. (45-115).

Théorie de moindres carrés, interpolation, etc.

K. Zahradník. — Sur la convergence et la divergence des séries infinies. (147-158).

K. Zahradník. — La connexion des logarithmes népériens avec les logarithmes naturels. (159-165).

K. Zahradník. — Sur quelques courbes obtenues par la section du cône. (166-171).

S.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME III; 1879. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Mathematische Annalen, herausgegeben von F. KLEIN und AD. MAYER. T. XII-XIII; 1877-1878. — 145-154, 175-184.

Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XXXIV-XLI; 1867-1878. — 39-41.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XXXVII-XLII; 1869-1878. — 36-39.

Mémorial de l'Officier du Génie. 2e série, T. XXV; 1876. — 75-78.

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of London. T. XXXIX; 1878-1879. 204-214.

Nieuw Archief voor Wiskunde, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. T. III-V; 1877-1879. — 168-175.

Nouvelle Correspondance mathématique, rédigée par E. CATALAN. T. IV; 1878. — 57-64.

Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par MM. GERONO et BRISSE. 2e série, T. XVII; 1878. — 43-56.

The Observatory, a Monthly Review of Astronomy, edited by W.-H.-M. CHRISTIE. T. I; 1877-1878. — 78-103.

Rad Jugoslavenske Akademije znasnosti i umjetnosti u Zagrebu. T. XV-XL. — 239-340.

Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Années 1875-1877. — 118-121.

Tidsskrift for Mathematik, udgivet af H.-G. ZEUTHEN. 4e série, T. I-II; 1877-1878. — 163-166.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. T. XI-XIII; 1876-1878. — 20-36.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. HOFFMANN. T. IX-X; 1878-1879. — 233-237.

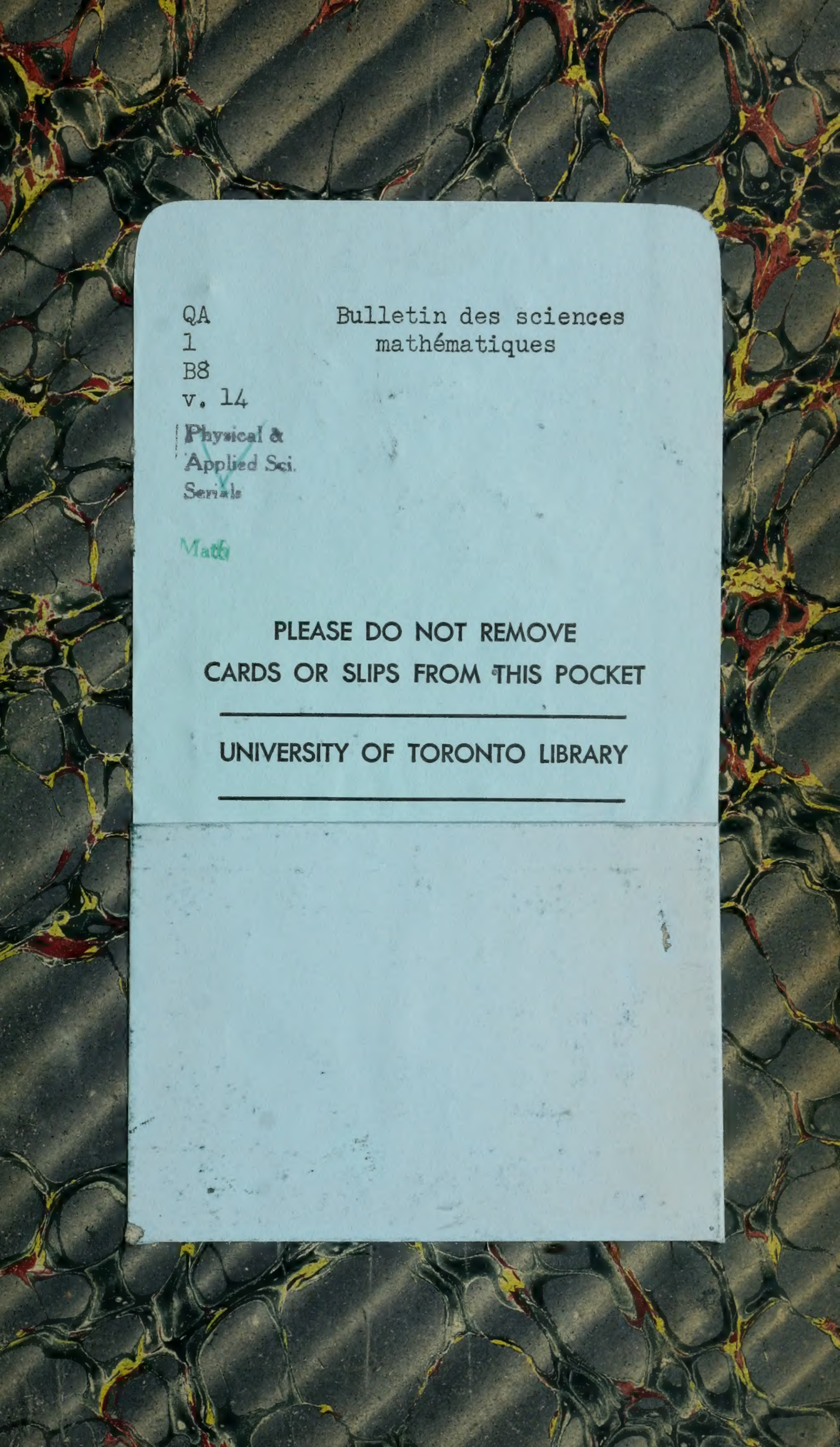
TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME III.

5243 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.





QA
1
B8
v. 14
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math
Bulletin des sciences
mathématiques
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

